

КАФЕДРА ПРОБЛЕМ ФИЗИКИ И АСТРОФИЗИКИ

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ФОРМУЛЯР

2009 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

Алгебраические соотношения . . . . .	3
Векторные тождества . . . . .	4
Дифференциальные операторы в криволинейных координатах	6
Размерности и единицы измерения физ. величин . . . . .	10
Международная система единиц (СИ) . . . . .	13
Метрические приставки . . . . .	13
Физические константы (СИ) . . . . .	14
Физические константы (СГС) . . . . .	16
Преобразование формул между системами . . . . .	18
Уравнения Максвелла . . . . .	19
Электричество и магнетизм . . . . .	20
Шкала электромагнитных волн . . . . .	21
Переменный ток . . . . .	22
Безразмерные числа в гидродинамике . . . . .	23
Ударные волны . . . . .	26
Фундаментальные параметры плазмы . . . . .	28
Плазменная дисперсионная функция . . . . .	30
Столкновения и перенос . . . . .	31
Характерные величины в типичных примерах плазмы . .	40
Параметры ионосферы . . . . .	42
Параметры Солнца . . . . .	43
Термоядерный синтез . . . . .	44
Релятивистские пучки электронов . . . . .	46
Пучковые неустойчивости . . . . .	48
Лазеры . . . . .	51
Излучение в атомной физике . . . . .	53
Атомная спектроскопия . . . . .	59
Пылевая плазма . . . . .	62
Литература . . . . .	67

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Прирост в децибелах мощности  $P_2$  по сравнению с  $P_1$

$$G = 10 \log_{10}(P_2/P_1).$$

С точностью до 2%

$$(2\pi)^{1/2} \approx 2.5; \quad \pi^2 \approx 10; \quad e^3 \approx 20; \quad 2^{10} \approx 10^3.$$

Константа Эйлера-Машерони<sup>1</sup>  $\gamma = 0.57722$

Гамма-функция  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ :

$\Gamma(1/6) = 5.5663$	$\Gamma(3/5) = 1.4892$
$\Gamma(1/5) = 4.5908$	$\Gamma(2/3) = 1.3541$
$\Gamma(1/4) = 3.6256$	$\Gamma(3/4) = 1.2254$
$\Gamma(1/3) = 2.6789$	$\Gamma(4/5) = 1.1642$
$\Gamma(2/5) = 2.2182$	$\Gamma(5/6) = 1.1288$
$\Gamma(1/2) = 1.7725 = \sqrt{\pi}$	$\Gamma(1) = 1.0$

Биномиальная теорема (применима для  $|x| < 1$ ):

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \equiv 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Тождество Роше-Хагена<sup>2</sup> (применимо для всех комплексных  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , кроме случаев сингулярности):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{x}{x+kz} \binom{x+kz}{k} \frac{y}{y+(n-k)z} \binom{y+(n-k)z}{n-k} \\ = \frac{x+y}{x+y+nz} \binom{x+y+nz}{n}. \end{aligned}$$

Формула суммирования Ньюбергера<sup>3</sup> [применима для нецелых  $\mu$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) > -1$ ]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n J_{\alpha-\gamma n}(z) J_{\beta+\gamma n}(z)}{n+\mu} = \frac{\pi}{\sin \mu\pi} J_{\alpha+\gamma\mu}(z) J_{\beta-\gamma\mu}(z).$$

## ВЕКТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА<sup>4</sup>

Обозначения:  $f, g$ , — скаляры;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , и т.д., — векторы;  $T$  — тензор;  $I = \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z$  — единичная диада.

$$(1) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$(2) \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$(3) \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$$

$$(4) (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$(5) (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}$$

$$(6) \nabla(fg) = \nabla(gf) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$(7) \nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$$

$$(8) \nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}$$

$$(9) \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$(10) \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$(11) \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$(12) \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$(13) \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$$

$$(14) \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

$$(15) \nabla \times \nabla f = 0$$

$$(16) \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

Если  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — ортонормированный базис, то можно записать тензор второго порядка  $T$  в диадической форме:

$$(17) T = \sum_{i,j} T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

В декартовых координатах дивергенция тензора — это вектор с компонентами

$$(18) (\nabla \cdot T)_i = \sum_j (\partial T_{ji} / \partial x_j)$$

[Это определение согласовано с ур.(29)]. В общем случае

$$(19) \nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$(20) \nabla \cdot (fT) = \nabla f \cdot T + f\nabla \cdot T$$

Пусть  $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$  — радиус-вектор из начала координат,  $r = |\mathbf{r}|$ . Тогда

$$(21) \quad \nabla \cdot \mathbf{r} = 3$$

$$(22) \quad \nabla \times \mathbf{r} = 0$$

$$(23) \quad \nabla r = \mathbf{r}/r$$

$$(24) \quad \nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$$

$$(25) \quad \nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 4\pi\delta(\mathbf{r})$$

$$(26) \quad \nabla \otimes \mathbf{r} = I$$

Если  $V$  — объём, окружённый поверхностью площади  $S$ , и  $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к ней, то

$$(27) \quad \int_V dV \nabla f = \int_S d\mathbf{S} f$$

$$(28) \quad \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}$$

$$(29) \quad \int_V dV \nabla \cdot T = \int_S d\mathbf{S} \cdot T$$

$$(30) \quad \int_V dV \nabla \times \mathbf{A} = \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$$

$$(31) \quad \int_V dV (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) = \int_S d\mathbf{S} \cdot (f \nabla g - g \nabla f)$$

$$(32) \quad \int_V dV (\mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) \\ = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B})$$

Если  $S$  — поверхность, натянутая на контур  $C$  с элементом длины  $d\mathbf{l}$ , то

$$(33) \quad \int_S d\mathbf{S} \times \nabla f = \oint_C d\mathbf{l} f$$

$$(34) \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}$$

$$(35) \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{A} = \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{A}$$

$$(36) \int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla f \times \nabla g) = \oint_C f dg = - \oint_C g df$$

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ<sup>5</sup>

### Цилиндрические координаты

Дивергенция

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Градиент

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}; \quad (\nabla f)_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi}; \quad (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Ротор

$$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi}$$

Лапласиан

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Лапласиан вектора

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} - \frac{A_r}{r^2}$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{r^2}$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_z = \nabla^2 A_z$$

Компоненты  $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B})_r = A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} + A_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{A_\phi B_\phi}{r}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B})_\phi = A_r \frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + A_z \frac{\partial B_\phi}{\partial z} + \frac{A_\phi B_r}{r}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B})_z = A_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Дивергенция тензора

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} - \frac{T_{\phi\phi}}{r}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{z\phi}}{\partial z} + \frac{T_{\phi r}}{r}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}$$

## Сферические координаты

Дивергенция

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Градиент

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}; \quad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}; \quad (\nabla f)_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

Ротор

$$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}$$

Лапласиан

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Лапласиан вектора

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta A_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\theta = \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}$$



Компоненты  $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla\mathbf{B})_r = A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi}{r}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla\mathbf{B})_\theta = A_r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} + \frac{A_\theta B_r}{r} - \frac{\text{ctg } \theta A_\phi B_\phi}{r}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla\mathbf{B})_\phi = A_r \frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_\phi B_r}{r} + \frac{\text{ctg } \theta A_\phi B_\theta}{r}$$

Дивергенция тензора

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{T})_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T_{\theta r}) \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{T})_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T_{\theta\theta}) \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{T_{\theta r}}{r} - \frac{\text{ctg } \theta T_{\phi\phi}}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{T})_\phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\phi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T_{\theta\phi}) \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{\phi r}}{r} + \frac{\text{ctg } \theta T_{\phi\theta}}{r} \end{aligned}$$

## РАЗМЕРНОСТИ И ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ

(Числа, кратные 3, встречаются из-за использования приближённого значения скорости света  $c = 299\,792\,458\text{ м/сек} \approx 3 \times 10^{10}\text{ см/сек}$ ).

Физическая величина	Символ	Размерность		СИ	СГС
		СИ	СГС		
Ёмкость	$C$	$\frac{t^2 q^2}{ml^2}$	$l$	1 Ф (фарад)	$9 \times 10^{11}\text{ см}$
Заряд	$q$	$q$	$\frac{m^{1/2} l^{3/2}}{t}$	1 Кл (кулон)	$3 \times 10^9$
Плотность заряда	$\rho$	$\frac{q}{l^3}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{3/2} t}$	1 Кл/м <sup>3</sup>	$3 \times 10^3$
Проводимость	$\frac{1}{R}$	$\frac{tq^2}{ml^2}$	$\frac{l}{t}$	1 См (сименс)	$9 \times 10^{11}\text{ см/сек}$
Удельная проводимость	$\sigma$	$\frac{tq^2}{ml^3}$	$\frac{1}{t}$	1 См/м	$9 \times 10^9\text{ сек}^{-1}$
Сила тока	$I$	$\frac{q}{t}$	$\frac{m^{1/2} l^{3/2}}{t^2}$	1 А (ампер)	$3 \times 10^9$
Плотность тока	$\mathbf{j}$	$\frac{q}{l^2 t}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2} t^2}$	1 А/м <sup>2</sup>	$3 \times 10^5$
Плотность	$\rho$	$\frac{m}{l^3}$	$\frac{m}{l^3}$	1 кг/м <sup>3</sup>	$10^{-3}\text{ г/см}^3$
Эл. индукция (эл. смещение)	$\mathbf{D}$	$\frac{q}{l^2}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2} t}$	1 Кл/м <sup>2</sup>	$12\pi \times 10^5$
Напряжённость эл. поля	$\mathbf{E}$	$\frac{ml}{t^2 q}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2} t}$	1 В/м	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$
Э.Д.С.	$\mathcal{E}$	$\frac{ml^2}{t^2 q}$	$\frac{m^{1/2} l^{1/2}}{t}$	1 В (вольт)	$\frac{1}{3} \times 10^{-2}$
Энергия, работа	$U, W$	$\frac{ml^2}{t^2}$	$\frac{ml^2}{t^2}$	1 Дж (джоуль)	$10^7\text{ эрг}$
Плотность энергии	$\varepsilon, w$	$\frac{m}{lt^2}$	$\frac{m}{lt^2}$	1 Дж/м <sup>3</sup>	$10\text{ эрг/см}^3$

Физическая величина	Сим-вол	Размерность		СИ	СГС
		СИ	СГС		
Сила	<b>F</b>	$\frac{ml}{t^2}$	$\frac{ml}{t^2}$	1 Н (ньютон)	$10^5$ дин
Частота	$\nu, f$	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t}$	1 Гц (герц)	1 Гц
Импеданс	$Z$	$\frac{ml^2}{tq^2}$	$\frac{t}{l}$	1 Ом	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$ сек/см
Индуктивность	$L$	$\frac{ml^2}{q^2}$	$\frac{t^2}{l}$	1 Гн(генри)	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$ сек <sup>2</sup> /см
Длина	$l$	$l$	$l$	1 м	$10^2$ см
Напряжённость магн. поля	<b>H</b>	$\frac{q}{lt}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	1 А/м	$4\pi \times 10^{-3}$ Э (эрстед)
Магнитный поток	$\Phi$	$\frac{ml^2}{tq}$	$\frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t}$	1 Вб (вебер)	$10^8$ Мкс (максвелл)
Магнитная индукция	<b>B</b>	$\frac{m}{tq}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	1 Т (тесла)	$10^4$ Гс (гаусс)
Магнитный момент	$m, \mu$	$\frac{l^2q}{t}$	$\frac{m^{1/2}l^{5/2}}{t}$	1 А·м <sup>2</sup>	$10^3$ Э·см <sup>3</sup>
Намагниченность	<b>M</b>	$\frac{q}{lt}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	1 А/м	$4\pi \times 10^{-3}$ Э
М.Д.С.	$\mathcal{M}$	$\frac{q}{t}$	$\frac{m^{1/2}l^{1/2}}{t^2}$	1 А	$\frac{4\pi}{10}$
Масса	$m, M$	$m$	$m$	1 кг	$10^3$ г
Импульс	<b>p, P</b>	$\frac{ml}{t}$	$\frac{ml}{t}$	кг·м/с	$10^5$ г· ·см/сек
Плотность импульса		$\frac{m}{l^2t}$	$\frac{m}{l^2t}$	кг·с/м <sup>2</sup>	$10^{-1}$ г/ /(см·сек)
Магнитная проницаемость	$\mu$	$\frac{ml}{q^2}$	1	Гн/м	$\frac{1}{4\pi} \times 10^7$

Физическая величина	Символ	Размерность		СИ	СГС
		СИ	СГС		
Диэлектрическая проницаемость	$\epsilon$	$\frac{t^2 q^2}{ml^3}$	1	1 Ф/м	$36\pi \times 10^9$
Поляризация	$\mathbf{P}$	$\frac{q}{l^2}$	$\frac{m^{1/2}}{l^{1/2}t}$	1 Кл/м <sup>2</sup>	$3 \times 10^5$
Потенциал	$V, \phi$	$\frac{ml^2}{t^2 q}$	$\frac{m^{1/2}l^{1/2}}{t}$	1 В	$\frac{1}{3} \times 10^{-2}$
Мощность	$P$	$\frac{ml^2}{t^3}$	$\frac{ml^2}{t^3}$	1 Вт (ватт)	$10^7$ эрг/ /сек
Плотность потока энергии		$\frac{m}{lt^3}$	$\frac{m}{lt^3}$	1 Вт/м <sup>3</sup>	$10$ эрг/ /(сек·см <sup>3</sup> )
Давление	$p, P$	$\frac{m}{lt^2}$	$\frac{m}{lt^2}$	1 Па (паскаль)	$10$ дин/ /см <sup>2</sup>
Магнитное сопротивление	$\mathcal{R}$	$\frac{q^2}{ml^2}$	$\frac{1}{l}$	1 А/Вб	$4\pi \times 10^{-9}$ см <sup>-1</sup>
Электрическое сопротивление	$R$	$\frac{ml^2}{tq^2}$	$\frac{t}{l}$	1 Ом	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$ сек/см
Удельное эл. сопротивление	$\eta, \rho$	$\frac{ml^3}{tq^2}$	$t$	1 Ом·м	$\frac{1}{9} \times 10^{-9}$ сек
Теплопроводность	$\kappa$	$\frac{ml}{t^3}$	$\frac{ml}{t^3}$	1 Вт/(м·К)	$10^5$ эрг/ (см·сек·К)
Время	$t$	$t$	$t$	1 с	1 сек
Вектор-потенциал	$\mathbf{A}$	$\frac{ml}{tq}$	$\frac{m^{1/2}l^{1/2}}{t}$	1 Вб/м	$10^6$ Гс·см
Скорость	$\mathbf{v}$	$\frac{l}{t}$	$\frac{l}{t}$	1 м/с	$10^2$ см/сек
Вязкость	$\eta, \mu$	$\frac{m}{lt}$	$\frac{m}{lt}$	1 кг/(м·с)	10 пуаз
Завихрённость	$\zeta$	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t}$	1 с <sup>-1</sup>	1 сек <sup>-1</sup>

## МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ (СИ)<sup>6</sup>

Величина	Единица	Символ	Величина	Единица	Символ
*длина	метр	м	электрический потенциал	вольт	В
*масса	килограмм	кг		электрическое сопротивление	ом
*время	секунда	с	электрическая проводимость		сименс
*сила тока	ампер	А		электрическая ёмкость	фарад
*температура	кельвин	К	магнитный поток		вебер
*колич-во вещества	моль	моль		индуктивность	генри
*сила света	кандела	кд	магнитная индукция		тесла
†плоский угол	радиан	рад		световой поток	люмен
†телесный угол	стерадиан	ср	освещённость		люкс
частота	герц	Гц		активность радиоакт-го источника	беккерель
энергия	джоуль	Дж	поглощ. доза ионизир-го излучения		грэй
сила	ньютон	Н			
давление	паскаль	Па			
мощность	ватт	Вт			
заряд	кулон	Кл			

\*Основные единицы

†Вспомогательные единицы

### МЕТРИЧЕСКИЕ ПРИСТАВКИ

Множитель	Приставка	Символ	Множитель	Приставка	Символ
$10^{-1}$	деци	д	10	дека	да
$10^{-2}$	санти	с	$10^2$	гекто	г
$10^{-3}$	милли	м	$10^3$	кило	к
$10^{-6}$	микро	мк	$10^6$	мега	М
$10^{-9}$	нано	н	$10^9$	гига	Г
$10^{-12}$	пико	п	$10^{12}$	тера	Т
$10^{-15}$	фемто	ф	$10^{15}$	пета	П
$10^{-18}$	атто	а	$10^{18}$	экса	Э

## ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ (СИ)<sup>7</sup>

Физическая величина	Символ	Значение	Размерн.
Постоянная Больцмана	$k$	$1.3807 \times 10^{-23}$	Дж·К <sup>-1</sup>
Элементарный заряд	$e$	$1.6022 \times 10^{-19}$	Кл
Масса электрона	$m_e$	$9.1094 \times 10^{-31}$	кг
Масса протона	$m_p$	$1.6726 \times 10^{-27}$	кг
Гравитационная постоянная	$G$	$6.6726 \times 10^{-11}$	м <sup>3</sup> с <sup>-2</sup> кг <sup>-1</sup>
Постоянная Планка	$h$	$6.6261 \times 10^{-34}$	Дж·с
	$\hbar = h/2\pi$	$1.0546 \times 10^{-34}$	Дж·с
Скорость света в вакууме	$c$	$2.9979 \times 10^8$	м·с <sup>-1</sup>
Диэлектрическая проницаемость вакуума	$\epsilon_0$	$8.8542 \times 10^{-12}$	Ф·м <sup>-1</sup>
Магнитная проницаемость вакуума	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$	Гн·м <sup>-1</sup>
Отношение масс протона и электрона	$m_p/m_e$	$1.8362 \times 10^3$	
Отношение заряда и массы электрона	$e/m_e$	$1.7588 \times 10^{11}$	Кл·кг <sup>-1</sup>
Постоянная Ридберга	$R_\infty = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2ch^3}$	$1.0974 \times 10^7$	м <sup>-1</sup>
Радиус Бора	$a_0 = \epsilon_0\hbar^2/\pi me^2$	$5.2918 \times 10^{-11}$	м
Атомное сечение	$\pi a_0^2$	$8.7974 \times 10^{-21}$	м <sup>2</sup>
Классический радиус электрона	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$	$2.8179 \times 10^{-15}$	м
Томсоновское сечение	$(8\pi/3)r_e^2$	$6.6525 \times 10^{-29}$	м <sup>2</sup>
Комптоновская длина для электрона	$h/m_e c$	$2.4263 \times 10^{-12}$	м
	$\hbar/m_e c$	$3.8616 \times 10^{-13}$	м
Постоянная тонкой структуры	$\alpha = e^2/2\epsilon_0 hc$	$7.2974 \times 10^{-3}$	
	$\alpha^{-1}$	137.04	
Первая постоянная излучения	$c_1 = 2\pi\hbar c^2$	$3.7418 \times 10^{-16}$	Вт·м <sup>2</sup>
Вторая постоянная излучения	$c_2 = hc/k$	$1.4388 \times 10^{-2}$	м·К
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma$	$5.6705 \times 10^{-8}$	Вт·м <sup>-2</sup> К <sup>-4</sup>

Физическая величина	Символ	Значение	Размерн.
1 эВ	$h\nu_0$	$1.6022 \times 10^{-19}$	Дж
Длина волны излучения с энергией в 1 эВ	$\lambda_0 = hc/e$	$1.2398 \times 10^{-6}$	м
Частота излучения с энергией в 1 эВ	$\nu_0 = e/h$	$2.4180 \times 10^{14}$	Гц
Волновое число для энергии в 1 эВ	$k_0 = e/hc$	$8.0655 \times 10^5$	$\text{м}^{-1}$
1 Ридберг	$me^4/8\epsilon_0^2h^2$	13.606	эВ
Энергия, соотв. 1К	$k/e$	$8.6174 \times 10^{-5}$	эВ
Температура, соотв. 1эВ	$e/k$	$1.1604 \times 10^4$	К
Число Авогадро	$N_A$	$6.0221 \times 10^{23}$	моль <sup>-1</sup>
Постоянная Фарадея	$F = N_A e$	$9.6485 \times 10^4$	Кл·моль <sup>-1</sup>
Газовая постоянная	$R = N_A k$	8.3145	Дж·К <sup>-1</sup> · моль <sup>-1</sup>
Число Лошмидта	$n_0$	$2.6868 \times 10^{25}$	$\text{м}^{-3}$
Атомная единица массы	а.е.м.	$1.6605 \times 10^{-27}$	кг
Стандартная температура	$T_0$	273.15	К
Атмосферное давление	$p_0 = n_0 k T_0$	$1.0133 \times 10^5$	Па
Давление в 1 мм рт.ст. (1 торр)		$1.3332 \times 10^2$	Па
Молярный объём при норм. условиях	$V_0 = RT_0/p_0$	$2.2414 \times 10^{-2}$	м <sup>3</sup>
Молярная масса воздуха	$M_{\text{возд}}$	$2.8971 \times 10^{-2}$	кг
1 калория (кал)		4.1868	Дж
Ускорение свободного падения	$g$	9.8067	$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$

## ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ (СГС)<sup>7</sup>

Физическая величина	Символ	Значение	Размерн.
Постоянная Больцмана	$k$	$1.3807 \times 10^{-16}$	эрг·град <sup>-1</sup>
Элементарный заряд	$e$	$4.8032 \times 10^{-10}$	
Масса электрона	$m_e$	$9.1094 \times 10^{-28}$	г
Масса протона	$m_p$	$1.6726 \times 10^{-24}$	г
Гравитационная постоянная	$G$	$6.6726 \times 10^{-8}$	дин·см <sup>2</sup> /г <sup>2</sup>
Постоянная Планка	$h$	$6.6261 \times 10^{-27}$	эрг·сек
	$\hbar = h/2\pi$	$1.0546 \times 10^{-27}$	эрг·сек
Скорость света в вакууме	$c$	$2.9979 \times 10^{10}$	см/сек
Отношение масс протона и электрона	$m_p/m_e$	$1.8362 \times 10^3$	
Отношение заряда и массы электрона	$e/m_e$	$5.2728 \times 10^{17}$	(ед.зар./г)
Постоянная Ридберга	$R_\infty = \frac{2\pi^2 m e^4}{ch^3}$	$1.0974 \times 10^5$	см <sup>-1</sup>
Радиус Бора	$a_0 = \hbar^2/m_e e^2$	$5.2918 \times 10^{-9}$	см
Атомное сечение	$\pi a_0^2$	$8.7974 \times 10^{-17}$	см <sup>2</sup>
Классический радиус электрона	$r_e = e^2/mc^2$	$2.8179 \times 10^{-13}$	см
Томсоновское сечение	$(8\pi/3)r_e^2$	$6.6525 \times 10^{-25}$	см <sup>2</sup>
Комптоновская длина для электрона	$h/m_e c$	$2.4263 \times 10^{-10}$	см
	$\hbar/m_e c$	$3.8616 \times 10^{-11}$	см
Постоянная тонкой структуры	$\alpha = e^2/\hbar c$	$7.2974 \times 10^{-3}$	
	$\alpha^{-1}$	137.04	
Первая постоянная излучения	$c_1 = 2\pi\hbar c^2$	$3.7418 \times 10^{-5}$	эрг·см <sup>2</sup> /сек
Вторая постоянная излучения	$c_2 = hc/k$	1.4388	см·град
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma$	$5.6705 \times 10^{-5}$	эрг·сек <sup>-1</sup> . см <sup>-2</sup> ·град <sup>-4</sup>



Физическая величина	Символ	Значение	Размерн.
1 эВ	$h\nu_0$	$1.6022 \times 10^{-12}$	эрг
Длина волны излучения с энергией в 1 эВ	$\lambda_0$	$1.2398 \times 10^{-4}$	см
Частота излучения с энергией в 1 эВ	$\nu_0$	$2.4180 \times 10^{14}$	Гц
Волновое число для энергии в 1 эВ	$k_0$	$8.0655 \times 10^3$	см <sup>-1</sup>
1 Ридберг	$me^4/2\hbar^2$	13.606	эВ
Энергия, соотв. 1К		$8.6174 \times 10^{-5}$	эВ
Температура, соотв. 1эВ		$1.1604 \times 10^4$	град(К)
Число Авогадро	$N_A$	$6.0221 \times 10^{23}$	моль <sup>-1</sup>
Постоянная Фарадея	$F = N_A e$	$2.8925 \times 10^{14}$	ед.зар. ·моль <sup>-1</sup>
Газовая постоянная	$R = N_A k$	$8.3145 \times 10^7$	эрг·град <sup>-1</sup> . ·моль <sup>-1</sup>
Число Лошмидта	$n_0$	$2.6868 \times 10^{19}$	см <sup>-3</sup>
Атомная единица массы	а.е.м.	$1.6605 \times 10^{-24}$	г
Стандартная температура	$T_0$	273.15	град(К)
Атмосферное давление	$p_0 = n_0 k T_0$	$1.0133 \times 10^6$	дин/см <sup>2</sup>
Давление в 1 мм рт.ст. (1 торр)		$1.3332 \times 10^3$	дин/см <sup>2</sup>
Молярный объём при норм. условиях	$V_0 = RT_0/p_0$	$2.2414 \times 10^4$	см <sup>3</sup>
Молярная масса воздуха	$M_{\text{возд}}$	28.971	г
1 калория (кал)		$4.1868 \times 10^7$	эрг
Ускорение свободного падения	$g$	$9.8067 \times 10^2$	см/сек <sup>2</sup>

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОРМУЛ<sup>8</sup>

Здесь  $\alpha = 10^2$  см/м,  $\beta = 10^7$  эрг/Дж,  $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$  Ф/м,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Гн/м,  $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2} = 2.9979 \times 10^8$  м/с, и  $\hbar = 1.0546 \times 10^{-34}$  Дж·с. Для перевода формулы из СГС в СИ нужно каждую физическую величину  $\bar{Q}$  заменить по правилу:  $\bar{Q} = \bar{k}Q$ , где  $\bar{k}$  — соответствующий коэффициент из второго столбца таблицы (чертой обозначены переменные в системе СГС). Так, формула для боровского радиуса  $\bar{a}_0 = \bar{\hbar}^2/\bar{m}\bar{e}^2$  переходит в  $\alpha a_0 = (\hbar\beta)^2/[(m\beta/\alpha^2)(e^2\alpha\beta/4\pi\epsilon_0)]$ , или  $a_0 = \epsilon_0\hbar^2/\pi m e^2$ . При переводе из СИ в т.н. естественную систему  $\hbar = c = 1$  (обозначим её крышкой) аналогично  $Q = \hat{k}^{-1}\hat{Q}$ , где  $\hat{k}$  — коэффициент из третьего столбца. Так,  $\hat{a}_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/[(\hat{m}\hbar/c)(\hat{e}^2\epsilon_0\hbar c)] = 4\pi/\hat{m}\hat{e}^2$  (при переводе из СИ не нужно заменять  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  и  $c$ ).

Физическая величина	СГС в СИ	Естеств. в СИ
Ёмкость	$\alpha/4\pi\epsilon_0$	$\epsilon_0^{-1}$
Заряд	$(\alpha\beta/4\pi\epsilon_0)^{1/2}$	$(\epsilon_0\hbar c)^{-1/2}$
Плотность заряда	$(\beta/4\pi\alpha^5\epsilon_0)^{1/2}$	$(\epsilon_0\hbar c)^{-1/2}$
Ток	$(\alpha\beta/4\pi\epsilon_0)^{1/2}$	$(\mu_0/\hbar c)^{1/2}$
Плотность тока	$(\beta/4\pi\alpha^3\epsilon_0)^{1/2}$	$(\mu_0/\hbar c)^{1/2}$
Электрическое поле	$(4\pi\beta\epsilon_0/\alpha^3)^{1/2}$	$(\epsilon_0/\hbar c)^{1/2}$
Электростат. потенциал	$(4\pi\beta\epsilon_0/\alpha)^{1/2}$	$(\epsilon_0/\hbar c)^{1/2}$
Электрич. проводимость	$(4\pi\epsilon_0)^{-1}$	$\epsilon_0^{-1}$
Энергия	$\beta$	$(\hbar c)^{-1}$
Плотность энергии	$\beta/\alpha^3$	$(\hbar c)^{-1}$
Сила	$\beta/\alpha$	$(\hbar c)^{-1}$
Частота	1	$c^{-1}$
Индуктивность	$4\pi\epsilon_0/\alpha$	$\mu_0^{-1}$
Длина	$\alpha$	1
Магнитная индукция	$(4\pi\beta/\alpha^3\mu_0)^{1/2}$	$(\mu_0\hbar c)^{-1/2}$
Напряжённость магнитного поля	$(4\pi\mu_0\beta/\alpha^3)^{1/2}$	$(\mu_0/\hbar c)^{1/2}$
Масса	$\beta/\alpha^2$	$c/\hbar$
Импульс	$\beta/\alpha$	$\hbar^{-1}$
Мощность	$\beta$	$(\hbar c^2)^{-1}$
Давление	$\beta/\alpha^3$	$(\hbar c)^{-1}$
Сопротивление	$4\pi\epsilon_0/\alpha$	$(\epsilon_0/\mu_0)^{1/2}$
Время	1	$c$
Скорость	$\alpha$	$c^{-1}$

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Название или описание	СИ	СГС
Закон Фарадея	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Закон Ампера	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$
Уравнение Пуассона [Отсутствие магнитных монополей]	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Сила Лоренца	$q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$
Материальные уравнения	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$

В плазме  $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Гн/м (СГС:  $\mu \approx 1$ ). Диэлектрическая проницаемость равна  $\epsilon \approx \epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$  Ф/м (СГС:  $\epsilon \approx 1$ ), если все заряды считать свободными. Использование дрейфового приближения  $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$  для вычисления плотности поляризационных зарядов приводит к следующей формуле для диэлектрической проницаемости:  $\epsilon/\epsilon_0 = 1 + 36\pi \times 10^9 \rho/B^2$  (СИ)  $= 1 + 4\pi\rho c^2/B^2$  (СГС), где  $\rho$  — плотность массы.

Энергия электромагнитного поля в объёме  $V$  равна

$$W = \frac{1}{2} \int_V dV (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (\text{СИ})$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_V dV (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (\text{СГС}).$$

Теорема Умова–Пойнтинга:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \int_S \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV,$$

где  $S$  — поверхность, ограничивающая объём  $V$ , а вектор Умова–Пойнтинга (поток энергии через  $S$ ) равен  $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  (СИ) или  $\mathbf{N} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  (СГС).

## ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Здесь приняты обозначения:  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  — магнитная проницаемость проводника,  $\mu'$  — магнитная проницаемость окружающей среды,  $\sigma$  — проводимость,  $f = \omega/2\pi$  — частота излучения,  $\kappa_m = \mu/\mu_0$  и  $\kappa_e = \epsilon/\epsilon_0$ . Нижние индексы: «1» означает проводящую среду, «2» — диэлектрическую (без потерь). Все величины выражены в СИ, если не оговорено противное.

Диэл. проницаемость вакуума	$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная проницаемость вакуума	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м}$ $= 1.2566 \times 10^{-6} \text{ Гн/м}$
«Сопrotивление вакуума»	$R_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 376.73 \text{ }\Omega$
Ёмкость параллельных пластин площади $S$ , разнесённых на расстояние $d$	$C = \epsilon S/d$
Ёмкость концентрических цилиндров длины $l$ с радиусами $a$ и $b$	$C = 2\pi\epsilon l / \ln(b/a)$
Ёмкость концентрических сфер с радиусами $a$ и $b$	$C = 4\pi\epsilon ab / (b - a)$
Индуктивность провода длины $l$ , при протекании однородного тока	$L = \mu l$
Взаимная индукция параллельных проводов длины $l$ и радиуса $a$ , разнесённых на расстояние $d$	$L = (\mu' l / 4\pi) [1 + 4 \ln(d/a)]$
Индуктивность кольца радиуса $b$ , сделанного из провода радиуса $a$ , при протекании однородного тока	$L = b \left\{ \mu' [\ln(8b/a) - 2] + \mu/4 \right\}$
Время релаксации в диссип. среде	$\tau = \epsilon/\sigma$
Толщина скин-слоя	$\delta = (2/\omega\mu\sigma)^{1/2} = (\pi f\mu\sigma)^{-1/2}$
Волновой импеданс	$Z = [\mu/(\epsilon + i\sigma/\omega)]^{1/2}$
Коэффициент прозрачности проводящей поверхности <sup>9</sup> (верно только при $T \ll 1$ )	$T = 4.22 \times 10^{-4} (f\kappa_{m1}\kappa_{e2}/\sigma)^{1/2}$
Магнитное поле на расстоянии $r$ от прямого провода, по которому течёт ток $I$ (А)	$B_\theta = \mu I / 2\pi r \text{ Тл}$ $= 0.2I/r \text{ Гс } (r \text{ в см})$
Магнитное поле на расстоянии $z$ вдоль оси кольца радиуса $a$ , по которому течёт ток $I$	$B_z = \mu a^2 I / [2(a^2 + z^2)^{3/2}]$

## ШКАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН<sup>10</sup>

Излучение	Частоты		Длины волн	
	Нижняя	Верхняя	Нижняя	Верхняя
УНЧ*		30 Гц	10 Мм	
ГЧ*	30 Гц	300 Гц	1 Мм	10 Мм
ЧНЧ	300 Гц	3 кГц	100 км	1 Мм
ОНЧ	3 кГц	30 кГц	10 км	100 км
НЧ	30 кГц	300 кГц	1 км	10 км
СЧ	300 кГц	3 МГц	100 м	1 км
ВЧ	3 МГц	30 МГц	10 м	100 м
ОВЧ	30 МГц	300 МГц	1 м	10 м
УВЧ	300 МГц	3 ГГц	10 см	1 м
СВЧ†	3 ГГц	30 ГГц	1 см	10 см
S	2.6	3.95	7.6	11.5
G	3.95	5.85	5.1	7.6
J	5.3	8.2	3.7	5.7
H	7.05	10.0	3.0	4.25
X	8.2	12.4	2.4	3.7
M	10.0	15.0	2.0	3.0
R	12.4	18.0	1.67	2.4
K	18.0	26.5	1.1	1.67
R	26.5	40.0	0.75	1.1
КВЧ	30 ГГц	300 ГГц	1 мм	1 см
Субмиллиметровое	300 ГГц	3 ТГц	100 мкм	1 мм
Инфракрасное	3 ТГц	430 ТГц	700 нм	100 мкм
Видимое	430 ТГц	750 ТГц	400 нм	700 нм
Ультрафиолетовое	750 ТГц	30 ПГц	10 нм	400 нм
Рентгеновское	30 ПГц	3 ЭГц	100 пм	10 нм
Гамма	3 ЭГц			100 пм

В спектроскопии иногда используется ангстрем ( $1\text{\AA} = 10^{-8}\text{см} = 0.1\text{нм}$ ). \*Граница между УНЧ и голосовыми частотами определена нечётко. †Ниже в таблице указано, как приблизительно подразделяется диапазон СВЧ.<sup>11</sup>

## ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

В цепи, состоящей из последовательно соединённых сопротивлений  $R$ , индуктивности  $L$ , ёмкости  $C$  и э.д.с.  $V = V_0 \exp(i\omega t)$ , ток даётся выражением  $I = dq/dt$ , где  $q$  удовлетворяет уравнению

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V.$$

Решениями являются  $q(t) = q_s + q_t$ ,  $I(t) = I_s + I_t$ , где вынужденные («установившиеся») колебания тока  $I_s = i\omega q_s = V/Z$  с импедансом  $Z = R + i(\omega L - 1/\omega C)$ , а собственные  $I_t = dq_t/dt$ . При начальных значениях  $q(0) \equiv q_0 = \bar{q}_0 + q_s$ ,  $I(0) \equiv I_0$ , переходный процесс может быть трёх типов, в зависимости от значения  $\Delta = R^2 - 4L/C$ :

(а) апериодический,  $\Delta > 0$

$$q_t = \frac{I_0 + \gamma_+ \bar{q}_0}{\gamma_+ - \gamma_-} \exp(-\gamma_- t) - \frac{I_0 + \gamma_- \bar{q}_0}{\gamma_+ - \gamma_-} \exp(-\gamma_+ t),$$

$$I_t = \frac{\gamma_+ (I_0 + \gamma_- \bar{q}_0)}{\gamma_+ - \gamma_-} \exp(-\gamma_+ t) - \frac{\gamma_- (I_0 + \gamma_+ \bar{q}_0)}{\gamma_+ - \gamma_-} \exp(-\gamma_- t),$$

где  $\gamma_{\pm} = (R \pm \Delta^{1/2})/2L$ ;

(б) критический,  $\Delta = 0$  (наиболее быстрое затухание)

$$q_t = [\bar{q}_0 + (I_0 + \gamma_R \bar{q}_0)t] \exp(-\gamma_R t),$$

$$I_t = [I_0 - (I_0 + \gamma_R \bar{q}_0)\gamma_R t] \exp(-\gamma_R t),$$

где  $\gamma_R = R/2L$ ;

(в) периодический,  $\Delta < 0$

$$q_t = \left[ \frac{\gamma_R \bar{q}_0 + I_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \bar{q}_0 \cos \omega_1 t \right] \exp(-\gamma_R t),$$

$$I_t = \left[ I_0 \cos \omega_1 t - \frac{(\omega_1^2 + \gamma_R^2) \bar{q}_0 + \gamma_R I_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] \exp(-\gamma_R t),$$

Здесь  $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$  — резонансная частота, а  $\omega_1 = \omega_0(1 - R^2 C/4L)^{1/2}$ . При  $\omega = \omega_0$ ,  $Z = R$ . Добротность контура равна  $Q = \omega_0 L/R$ . Когда  $L$ ,  $R$ ,  $C$  не одного знака, режим нестационарный.

## БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ЧИСЛА В ГИДРОДИНАМИКЕ<sup>12</sup>

Название(я)	Обозн.	Определение	Смысл
Альфвен, Карман	Al, Ka	$V_A/V$	(Давл-е магн. поля/ плотн. кин. энерг.) <sup>1/2</sup>
Бонд	Bd	$(\rho' - \rho)L^2g/\Sigma$	Сила тяжести/сила поверхн. натяжения
Боузи- нескью	B	$V/(2gR)^{1/2}$	(Центростр. ускор-е/ ускор-е своб. пад-я) <sup>1/2</sup>
Бринкман	Br	$\mu V^2/k\Delta T$	Мощность сил вязк. трения/поток тепла
капилляр	Cr	$\mu V/\Sigma$	Сила вязкого трения/ сила поверхн. натяж-я
Карно	Ca	$(T_2 - T_1)/T_2$	КПД цикла Карно
Коши, Гук	Cu, Hk	$\rho V^2/\Gamma = M^2$	Плотн. кин. энергии/ модуль всест. сжатия
Чандра- секар	Ch	$B^2L^2/\rho\nu\eta$	Магнитная сила/ диссипативные силы
Клаузиус	Cl	$LV^3\rho/k\Delta T$	Поток кин. энергии/ поток тепла
Каулинг	C	$(V_A/V)^2 = Al^2$	Давление магн. поля/ плотн. кин. энергии
[коэфф.]	Cr	$\mu\kappa/\Sigma L$	Влияние диффузии/ влияние пов. натяж-я
Дин	D	$D^{3/2}V/\nu(2r)^{1/2}$	Центробежн. сила/ сила вязк. трения
[коэф.аэрод. сопрот-я]	$C_D$	$(\rho' - \rho)Lg/\rho'V^2$	Работа сил сопрот-я/ кинетич. энергия
Эккерт	E	$V^2/c_p\Delta T$	Кинетич. энергия/ энтальпия
Экман	Ek	$(\nu/2\Omega L^2)^{1/2} =(Ro/Re)^{1/2}$	(Сила вязкого трения/ сила Кориолиса) <sup>1/2</sup>
Эйлер	Eu	$\Delta p/(\rho V^2/2)$	Падение давления/ динамич. давление
Фруд	Fr	$V/(gL)^{1/2}$ $V/NL$	Ск-сть плавуч. тела/ характ. скор-ть волн
Гей-Люссак	Ga	$1/\beta\Delta T$	(Объёмн. расширение при нагревании) <sup>-1</sup>
Грасгоф	Gr	$gL^3\beta\Delta T/\nu^2$	Подъёмная сила/ сила вязкого трения
[коэфф. Холла]	$C_H$	$\lambda/r_L$	Циклотр. частота/ частота столкновений

Хартман	H	$BL/(\mu\eta)^{1/2} = (Rm Re C)^{1/2}$	(Магнитная сила/диссипативные силы) <sup>1/2</sup>
Кнудсен	Kn	$\lambda/L$	Время своб. пробега/характ. время столкновения
Льюис	Le	$\kappa/D$	Температуропроводность/коэффициент диффузии
Лоренц	Lo	$V/c$	Величина релят. эффектов
Лундквист	Lu	$\mu_0 LV_A/\eta = Al Rm$	Сила Ампера/сила диффузного магнетосопр-я
Мах	M	$V/C_S$	Величина эффектов сжатия
Магнитный Мах	Mm	$V/V_A = Al^{-1}$	(Плотн. кинет. энергии/давление магн. поля) <sup>1/2</sup>
Магнитный Рейнольдс	Rm	$\mu_0 LV/\eta$	Скорость потока/ск-ть магнитной диффузии
Ньютон	Nt	$F/\rho L^2 V^2$	Работа прилож. силы/кинетич. энергия
Нуссельт	N	$\alpha L/k$	Полный поток тепла/теплопроводн. поток
Пекле	Pe	$LV/\kappa$	Конвекция/теплопров-ть
Пуазейль	Po	$D^2 \Delta p/\mu LV$	Сила давл-я/сила вязк-ти
Прандтль	Pr	$\nu/\kappa$	Перенос импульса/тепла
Рэлей	Ra	$gH^3 \beta \Delta T/\nu \kappa$	Подъёмн./диффуз. сила
Рэйнольдс	Re	$LV/\nu$	Кин. эн-я/работа вязк. сил
Ричардсон	Ri	$(NH/\Delta V)^2$	Подъёмные эффекты/эффекты вертик. сдвига
Россби	Ro	$V/2\Omega L \sin \Lambda$	Центростр./Кориолис. уск-е
Шмидт	Sc	$\nu/D$	Перенос импульса/вещ-ва
Стэнтон	St	$\alpha/\rho c_p V$	Поток тепла/энтальпии
Стэфан	Sf	$\sigma LT^3/k$	Излучаемое/провод. тепло
Стокс	S	$\nu/L^2 f$	Коэф. вязкого затухания/частота вихреобразования
Струхаль	Sr	$fL/V$	Скорость вихрей/потока
Тэйлор	Ta	$(2\Omega L^2/\nu)^2 R^{1/2}(\Delta R)^{3/2} \cdot (\Omega/\nu)$	Центробежн./вязк. сила (Центробежн. сила/сила вязк. трения) <sup>1/2</sup>
Тринг, Больцман	Th, Bo	$\rho c_p V/\epsilon \sigma T^3$	Конвективный/излучат-ный перенос тепла
Вебер	W	$\rho LV^2/\Sigma$	Кин. энергия/работа сил поверхностного натяжения



**Обозначения:**

$B$	Магнитная индукция
$C_s, c$	Скорости звука, света
$c_p$	Уд. теплоёмкость при пост. давлении ( $\text{м}^2\text{с}^{-2}\text{К}^{-1}$ )
$D = 2R, R$	Диаметр и радиус трубки тока
$F$	Приложенная сила
$f$	Частота колебаний/вихреобразования
$g$	Ускорение свободного падения
$H, L$	Характерные вертик. и гориз. размеры
$k = \rho c_p \kappa$	Коэффициент теплопроводности ( $\text{кг}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}$ )
$N = (g/H)^{1/2}$	Частота Брунта–Вайсалы
$r$	Радиус кривизны трубки тока
$r_L$	Ларморовский радиус
$T$	Температура
$V$	Характерная скорость потока
$V_A = B/(\mu_0\rho)^{1/2}$	Скорость Альфвена
$\alpha$	Коэффициент в законе Фурье: $\alpha\Delta T = k \frac{\partial T}{\partial x}$
$\beta$	Коэфф. объёмного расширения: $dV/V = \beta dT$
$\Gamma$	Модуль всестороннего сжатия ( $\text{кг}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}$ )
$\Delta R, \Delta V, \Delta p, \Delta T$	Разница радиусов, скоростей, давлений, температур
$\epsilon$	Термоэмиссионная способность поверхности
$\eta$	Удельное электрическое сопротивление
$\kappa, \mathcal{D}$	Коэффициенты температуропроводности и диффузии ( $\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$ )
$\Lambda$	Географическая широта
$\lambda$	Длина свободного пробега
$\mu = \rho\nu$	Вязкость
$\mu_0$	Магнитная проницаемость вакуума (СИ)
$\nu$	Кинематическая вязкость ( $\text{м}^2/\text{с}$ )
$\rho$	Плотность жидкости/газа
$\rho'$	Плотность пузырька, капли или движущегося тела
$\Sigma$	Коэффициент поверхностного натяжения ( $\text{кг}/\text{с}^2$ )
$\sigma$	Постоянная Стефана–Больцмана
$\Omega$	Угловая частота вращения твёрдого тела

## УДАРНЫЕ ВОЛНЫ <sup>13,14</sup>

Граничные условия на фронте ударной волны, распространяющейся в жидкости под углом  $\theta$  к магнитному полю  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \rho U = \bar{\rho} \bar{U} \equiv q; \\
 (2) \quad & \rho U^2 + p + B_{\perp}^2/2\mu = \bar{\rho} \bar{U}^2 + \bar{p} + \bar{B}_{\perp}^2/2\mu; \\
 (3) \quad & \rho UV - B_{\parallel} B_{\perp}/\mu = \bar{\rho} \bar{U} \bar{V} - \bar{B}_{\parallel} \bar{B}_{\perp}/\mu; \\
 (4) \quad & B_{\parallel} = \bar{B}_{\parallel}; \\
 (5) \quad & UB_{\perp} - VB_{\parallel} = \bar{U} \bar{B}_{\perp} - \bar{V} \bar{B}_{\parallel}; \\
 (6) \quad & \frac{1}{2}(U^2 + V^2) + w + (UB_{\perp}^2 - VB_{\parallel} B_{\perp})/\mu\rho U \\
 & = \frac{1}{2}(\bar{U}^2 + \bar{V}^2) + \bar{w} + (\bar{U} \bar{B}_{\perp}^2 - \bar{V} \bar{B}_{\parallel} \bar{B}_{\perp})/\mu\bar{\rho} \bar{U}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $U$  и  $V$  — нормальная и тангенциальная к фронту волны (в её системе отсчёта) компоненты скорости жидкости;  $\rho = 1/v$  — плотность;  $p$  — давление;  $B_{\perp} = B \sin \theta$ ,  $B_{\parallel} = B \cos \theta$ ;  $\mu$  — магнитная проницаемость ( $\mu = 4\pi$  в единицах СГС);  $w = e + pv$ ,  $e$  — удельные энтальпия и внутренняя энергия. Чертой обозначены величины, относящиеся к области позади фронта. При  $\mathbf{B} = 0$  <sup>15</sup>

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & U - \bar{U} = [(\bar{p} - p)(v - \bar{v})]^{1/2}; \\
 (8) \quad & (\bar{p} - p)(v - \bar{v})^{-1} = q^2; \\
 (9) \quad & \bar{w} - w = \frac{1}{2}(\bar{p} - p)(v + \bar{v}); \\
 (10) \quad & \bar{e} - e = \frac{1}{2}(\bar{p} + p)(v - \bar{v}).
 \end{aligned}$$

Далее полагаем, что жидкость — идеальный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 1 + 2/n$ , где  $n$  — число степеней свободы. Тогда  $p = \rho RT/m$  ( $m$  — молярная масса), скорость звука  $C_s^2 = (\partial p/\partial \rho)_s = \gamma p v$ , а  $w = \gamma e = \gamma p v/(\gamma - 1)$ . В общем случае косоуго фронта волны в идеальном газе величина  $X = r^{-1}(U/V_A)^2$  удовлетворяет<sup>14</sup>:

$$(11) \quad (X - \beta/\alpha)(X - \cos^2 \theta)^2 = X \sin^2 \theta \left\{ [1 + (r - 1)/2\alpha] X - \cos^2 \theta \right\}, \text{ где } r = \bar{\rho}/\rho, \alpha = \frac{1}{2}[\gamma + 1 - (\gamma - 1)r] \text{ и } \beta = C_s^2/V_A^2 = 4\pi\gamma p/B^2.$$

Отношение плотностей ограничено условием:

$$(12) \quad 1 < r < (\gamma + 1)/(\gamma - 1).$$

Если поле  $\mathbf{B}$  касательно к фронту (т.е. если  $\theta = \pi/2$ ), то

$$(13) \quad U^2 = (r/\alpha) \left\{ C_s^2 + V_A^2 [1 + (1 - \gamma/2)(r - 1)] \right\};$$

$$(14) \quad U/\bar{U} = \bar{B}/B = r;$$

$$(15) \quad \bar{V} = V;$$

$$(16) \quad \bar{p} = p + (1 - r^{-1})\rho U^2 + (1 - r^2)B^2/2\mu.$$

Если  $\theta = 0$ , то возможны 2 случая: ударная волна включения, для возникновения которой должно быть  $\beta < 1$  и для которой

$$(17) \quad U^2 = rV_A^2;$$

$$(18) \quad \bar{U} = V_A^2/U;$$

$$(19) \quad \bar{B}_\perp^2 = 2B_\parallel^2(r - 1)(\alpha - \beta);$$

$$(20) \quad \bar{V} = \bar{U}\bar{B}_\perp/B_\parallel;$$

$$(21) \quad \bar{p} = p + \rho U^2(1 - \alpha + \beta)(1 - r^{-1}),$$

и акустическая (гидродинамическая) ударная волна:

$$(22) \quad U^2 = (r/\alpha)C_s^2;$$

$$(23) \quad \bar{U} = U/r;$$

$$(24) \quad \bar{V} = \bar{B}_\perp = 0;$$

$$(25) \quad \bar{p} = p + \rho U^2(1 - r^{-1}).$$

В акустических волнах удельные объём и давление связаны:

$$(26) \quad \bar{v}/v = [(\gamma + 1)p + (\gamma - 1)\bar{p}] / [(\gamma - 1)p + (\gamma + 1)\bar{p}].$$

В терминах числа Маха падающей волны  $M = U/C_s$ :

$$(27) \quad \bar{\rho}/\rho = v/\bar{v} = U/\bar{U} = (\gamma + 1)M^2 / [(\gamma - 1)M^2 + 2];$$

$$(28) \quad \bar{p}/p = (2\gamma M^2 - \gamma + 1) / (\gamma + 1);$$

$$(29) \quad \bar{T}/T = [(\gamma - 1)M^2 + 2](2\gamma M^2 - \gamma + 1) / (\gamma + 1)^2 M^2;$$

$$(30) \quad \bar{M}^2 = [(\gamma - 1)M^2 + 2] / [2\gamma M^2 - \gamma + 1].$$

Скачок энтропии на фронте волны:

$$(31) \quad \Delta s \equiv \bar{s} - s = c_v \ln[(\bar{p}/p)(\rho/\bar{\rho})^\gamma],$$

где  $c_v = R/(\gamma - 1)m$  — удельная теплоёмкость при постоянном объёме. В пределе слабой ударной волны ( $M \rightarrow 1$ )

$$(32) \quad \Delta s \rightarrow c_v \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{3(\gamma + 1)} (M^2 - 1)^3 \approx \frac{16\gamma R}{3(\gamma + 1)m} (M - 1)^3.$$

Радиус сильной ударной волны, возникающей при взрывном выбросе энергии  $E$  в однородной среде с плотностью  $\rho$ , в момент времени  $t$  равен

$$(33) \quad R_S = C_0(Et^2/\rho)^{1/5}, \text{ где } C_0 = \text{const}(\gamma). \text{ При } \gamma = 7/5, C_0 = 1.033.$$

## ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПЛАЗМЫ

Все величины даны в СГС, кроме температуры, приведённой в эВ, и массы ионов, выраженной в единицах массы протона  $\mu = m_i/m_p$ .  $K$  — волновое число,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\ln \Lambda$  — кулоновский логарифм.

### Частота

циклотронная $e^-$	$f_{ce} = \omega_{ce}/2\pi = 2.80 \times 10^6 B \text{ Гц}$
	$\omega_{ce} = eB/m_e c = 1.76 \times 10^7 B \text{ рад/сек}$
циклотронная $i$	$f_{ci} = \omega_{ci}/2\pi = 1.52 \times 10^3 Z\mu^{-1} B \text{ Гц}$
	$\omega_{ci} = ZeB/m_i c = 9.58 \times 10^3 Z\mu^{-1} B \text{ рад/сек}$
плазменная $e^-$	$f_{pe} = \omega_{pe}/2\pi = 8.98 \times 10^3 n_e^{1/2} \text{ Гц}$
	$\omega_{pe} = (4\pi n_e e^2/m_e)^{1/2}$
	$= 5.64 \times 10^4 n_e^{1/2} \text{ рад/сек}$
плазменная $i$	$f_{pi} = \omega_{pi}/2\pi$
	$= 2.10 \times 10^2 Z\mu^{-1/2} n_i^{1/2} \text{ Гц}$
	$\omega_{pi} = (4\pi n_i Z^2 e^2/m_i)^{1/2}$
	$= 1.32 \times 10^3 Z\mu^{-1/2} n_i^{1/2} \text{ рад/сек}$
захвата $e^-$	$\nu_{Te} = (eKE/m_e)^{1/2}$
	$= 7.26 \times 10^8 K^{1/2} E^{1/2} \text{ сек}^{-1}$
захвата $i$	$\nu_{Ti} = (ZeKE/m_i)^{1/2}$
	$= 1.69 \times 10^7 Z^{1/2} K^{1/2} E^{1/2} \mu^{-1/2} \text{ сек}^{-1}$
столкновений $e^-$	$\nu_e = 2.91 \times 10^{-6} n_e \ln \Lambda T_e^{-3/2} \text{ сек}^{-1}$
столкновений $i$	$\nu_i = 4.80 \times 10^{-8} Z^4 \mu^{-1/2} n_i \ln \Lambda T_i^{-3/2} \text{ сек}^{-1}$

### Длина

волны де-Бройля $e^-$	$\lambda = \hbar/(m_e k T_e)^{1/2} = 2.76 \times 10^{-8} T_e^{-1/2} \text{ см}$
классич. расстояние макс. сближения	$e^2/kT = 1.44 \times 10^{-7} T^{-1} \text{ см}$
циклотр. радиус $e^-$	$r_e = v_{Te}/\omega_{ce} = 2.38 T_e^{1/2} B^{-1} \text{ см}$
циклотр. радиус $i$	$r_i = v_{Ti}/\omega_{ci}$
	$= 1.02 \times 10^2 \mu^{1/2} Z^{-1} T_i^{1/2} B^{-1} \text{ см}$
инерционная $e^-$	$c/\omega_{pe} = 5.31 \times 10^5 n_e^{-1/2} \text{ см}$
инерционная $i$	$c/\omega_{pi} = 2.28 \times 10^7 Z^{-1} (\mu/n_i)^{1/2} \text{ см}$
радиус Дебая	$\lambda_D = (kT/4\pi n e^2)^{1/2} = 7.43 \times 10^2 T^{1/2} n^{-1/2} \text{ см}$

## Скорость

тепловая $e^-$	$v_{Te} = (kT_e/m_e)^{1/2}$ $= 4.19 \times 10^7 T_e^{1/2}$ см/сек
тепловая $i$	$v_{Ti} = (kT_i/m_i)^{1/2}$ $= 9.79 \times 10^5 \mu^{-1/2} T_i^{1/2}$ см/сек
звука ионная	$C_s = (\gamma Z k T_e / m_i)^{1/2}$ $= 9.79 \times 10^5 (\gamma Z T_e / \mu)^{1/2}$ см/сек
Альфвена	$v_A = B / (4\pi n_i m_i)^{1/2}$ $= 2.18 \times 10^{11} \mu^{-1/2} n_i^{-1/2} B$ см/сек

## Безразмерные

(отношение масс $e^-$ и $p$ ) <sup>1/2</sup>	$(m_e/m_p)^{1/2} = 2.33 \times 10^{-2} = 1/42.9$
число частиц в сфере Дебая	$(4\pi/3)n\lambda_D^3 = 1.72 \times 10^9 T^{3/2} n^{-1/2}$
скорость Альфвена/света	$v_A/c = 7.28 \mu^{-1/2} n_i^{-1/2} B$
плазм./циклотр. частота $e^-$	$\omega_{pe}/\omega_{ce} = 3.21 \times 10^{-3} n_e^{1/2} B^{-1}$
плазм./циклотр. частота $i$	$\omega_{pi}/\omega_{ci} = 0.137 \mu^{1/2} n_i^{1/2} B^{-1}$
энергия тепловая/магн. поля	$\beta = 8\pi n k T / B^2 = 4.03 \times 10^{-11} n T B^{-2}$
энергия магн. поля/покоя $i$	$B^2 / 8\pi n_i m_i c^2 = 26.5 \mu^{-1} n_i^{-1} B^2$

## Разное

коэфф. диффузии Бома	$D_B = (ckT/16eB)$ $= 6.25 \times 10^6 T B^{-1}$ см <sup>2</sup> /сек
поперечное удельное сопротивление Спитцера	$\eta_{\perp} = 1.15 \times 10^{-14} Z \ln \Lambda T^{-3/2}$ сек $= 1.03 \times 10^{-2} Z \ln \Lambda T^{-3/2}$ Ом·см

Низкочастотная ионно-звуковая турбулентность приводит к аномальной частоте столкновений

$$\nu^* \approx \omega_{pe} \tilde{W} / kT = 5.64 \times 10^4 n_e^{1/2} \tilde{W} / kT \text{ сек}^{-1},$$

где  $\tilde{W}$  — полная энергия волн, у которых  $\omega/K < v_{Ti}$ .

Давление магнитного поля равно

$$P_{\text{mag}} = B^2 / 8\pi = 3.98 \times 10^6 (B/B_0)^2 \text{ дин/см}^2 = 3.93 (B/B_0)^2 \text{ атм},$$

где  $B_0 = 10 \text{ кГ} = 1 \text{ Т}$ .

## ПЛАЗМЕННАЯ ДИСПЕРСИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Определение<sup>16</sup> (первое выражение верно только при  $\text{Im } \zeta > 0$ ):

$$Z(\zeta) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt \exp(-t^2)}{t - \zeta} = 2i \exp(-\zeta^2) \int_{-\infty}^{i\zeta} dt \exp(-t^2).$$

Физический смысл величины  $\zeta = x + iy$  — отношение фазовой скорости волны к тепловой скорости. Дисперсионная функция подчиняется дифференциальному уравнению:

$$\frac{dZ}{d\zeta} = -2(1 + \zeta Z), \quad Z(0) = i\pi^{1/2}; \quad \frac{d^2 Z}{d\zeta^2} + 2\zeta \frac{dZ}{d\zeta} + 2Z = 0.$$

При  $y = 0$ ,  $Z(x) = \exp(-x^2) \left( i\pi^{1/2} - 2 \int_0^x dt \exp(t^2) \right)$ .

При  $x = 0$ ,  $Z(iy) = i\pi^{1/2} \exp(y^2) [1 - \text{erf}(y)]$ .

При  $|\zeta| \ll 1$ ,

$$Z(\zeta) = i\pi^{1/2} \exp(-\zeta^2) - 2\zeta \left( 1 - 2\zeta^2/3 + 4\zeta^4/15 - 8\zeta^6/105 + \dots \right).$$

При  $|\zeta| \gg 1$ ,<sup>17</sup>

$$Z(\zeta) = i\pi^{1/2} \sigma \exp(-\zeta^2) - \zeta^{-1} \left( 1 + 1/2\zeta^2 + 3/4\zeta^4 + 15/8\zeta^6 + \dots \right),$$

где

$$\sigma = \begin{cases} 0 & y > |x|^{-1} \\ 1 & |y| < |x|^{-1} \\ 2 & y < -|x|^{-1} \end{cases}$$

Свойства симметрии (\*-ой обозначено комплексное сопряжение):

$$Z(\zeta^*) = -[Z(-\zeta)]^*;$$

$$Z(\zeta^*) = [Z(\zeta)]^* + 2i\pi^{1/2} \exp[-(\zeta^*)^2] \quad (y > 0).$$

Достаточно хорошим является двухполюсное приближение<sup>18</sup>

(верно при  $\text{Im } \zeta > 0$ , кроме случая, когда  $y < \pi^{1/2} x^2 \exp(-x^2)$ ,  $x \gg 1$ ):

$$Z(\zeta) \approx \frac{0.50 + 0.81i}{a - \zeta} - \frac{0.50 - 0.81i}{a^* + \zeta}, \quad a = 0.51 - 0.81i;$$

$$Z'(\zeta) \approx \frac{0.50 + 0.96i}{(b - \zeta)^2} + \frac{0.50 - 0.96i}{(b^* + \zeta)^2}, \quad b = 0.48 - 0.91i.$$

## СТОЛКНОВЕНИЯ И ПЕРЕНОС

Температуры приведены в эВ; соответствующее значение постоянной Больцмана  $k = 1.60 \times 10^{-12}$  эрг/эВ; массы  $\mu, \mu'$  выражены в единицах  $m_p$ ;  $e_\alpha = Z_\alpha e$  — заряд частиц сорта  $\alpha$ . Все остальные величины даны в СГС, если не оговорено противное.

### Скорости релаксации

относятся к четырём процессам релаксации, возникающим при взаимодействии пробных частиц сорта  $\alpha$ , движущихся со скоростью  $\mathbf{v}_\alpha$  сквозь среду, состоящую из частиц сорта  $\beta$ :

торможение	$\frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} = -\nu_s^{\alpha\backslash\beta} \mathbf{v}_\alpha$
поперечная диффузия	$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_\alpha - \bar{\mathbf{v}}_\alpha)_\perp^2 = \nu_\perp^{\alpha\backslash\beta} v_\alpha^2$
прямая диффузия	$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_\alpha - \bar{\mathbf{v}}_\alpha)_\parallel^2 = \nu_\parallel^{\alpha\backslash\beta} v_\alpha^2$
энергетические потери	$\frac{d}{dt} v_\alpha^2 = -\nu_\epsilon^{\alpha\backslash\beta} v_\alpha^2,$

где  $v_\alpha = |\mathbf{v}_\alpha|$ , а усреднения проведены по ансамблю пробных частиц и максвелловскому распределению частиц среды. Можно найти точные формулы<sup>19</sup>

$$\begin{aligned} \nu_s^{\alpha\backslash\beta} &= (1 + m_\alpha/m_\beta)\psi(x^{\alpha\backslash\beta})\nu_0^{\alpha\backslash\beta}; \\ \nu_\perp^{\alpha\backslash\beta} &= 2 \left[ (1 - 1/2x^{\alpha\backslash\beta})\psi(x^{\alpha\backslash\beta}) + \psi'(x^{\alpha\backslash\beta}) \right] \nu_0^{\alpha\backslash\beta}; \\ \nu_\parallel^{\alpha\backslash\beta} &= \left[ \psi(x^{\alpha\backslash\beta})/x^{\alpha\backslash\beta} \right] \nu_0^{\alpha\backslash\beta}; \\ \nu_\epsilon^{\alpha\backslash\beta} &= 2 \left[ (m_\alpha/m_\beta)\psi(x^{\alpha\backslash\beta}) - \psi'(x^{\alpha\backslash\beta}) \right] \nu_0^{\alpha\backslash\beta}, \end{aligned}$$

где

$$\nu_0^{\alpha\backslash\beta} = 4\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 \lambda_{\alpha\beta} n_\beta / m_\alpha^2 v_\alpha^3; \quad x^{\alpha\backslash\beta} = m_\beta v_\alpha^2 / 2kT_\beta;$$

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt t^{1/2} e^{-t}; \quad \psi'(x) = \frac{d\psi}{dx},$$

а  $\lambda_{\alpha\beta} = \ln \Lambda_{\alpha\beta}$  — кулоновский логарифм (см. далее). Ниже в таблице приведены предельные ограничения на  $\nu_s, \nu_\perp$  и  $\nu_\parallel$ . Все

выражения имеют размерность см<sup>3</sup>/сек. Энергия пробных частиц  $\epsilon$  и температура частиц среды  $T$  выражены в эВ;  $\mu = m_i/m_p$ ;  $Z = Z_i$ ; в электрон–электронных и ион–ионных взаимодействиях величины, относящиеся к частицам среды, обозначены штрихом. Граничные выражения приведены для очень медленных ( $x^{\alpha\backslash\beta} \ll 1$ ) и очень быстрых ( $x^{\alpha\backslash\beta} \gg 1$ ) пробных частиц.

	<u>Медленные</u>	<u>Быстрые</u>
<b>Электрон–электрон</b>		
$\nu_s^{e e}/n_e\lambda_{ee}$	$\approx 5.8 \times 10^{-6} T^{-3/2}$	$\longrightarrow 7.7 \times 10^{-6} \epsilon^{-3/2}$
$\nu_{\perp}^{e e}/n_e\lambda_{ee}$	$\approx 5.8 \times 10^{-6} T^{-1/2} \epsilon^{-1}$	$\longrightarrow 7.7 \times 10^{-6} \epsilon^{-3/2}$
$\nu_{\parallel}^{e e}/n_e\lambda_{ee}$	$\approx 2.9 \times 10^{-6} T^{-1/2} \epsilon^{-1}$	$\longrightarrow 3.9 \times 10^{-6} T \epsilon^{-5/2}$
<b>Электрон–ион</b>		
$\nu_s^{e i}/n_i Z^2 \lambda_{ei}$	$\approx 0.23 \mu^{3/2} T^{-3/2}$	$\longrightarrow 3.9 \times 10^{-6} \epsilon^{-3/2}$
$\nu_{\perp}^{e i}/n_i Z^2 \lambda_{ei}$	$\approx 2.5 \times 10^{-4} \mu^{1/2} T^{-1/2} \epsilon^{-1}$	$\longrightarrow 7.7 \times 10^{-6} \epsilon^{-3/2}$
$\nu_{\parallel}^{e i}/n_i Z^2 \lambda_{ei}$	$\approx 1.2 \times 10^{-4} \mu^{1/2} T^{-1/2} \epsilon^{-1}$	$\longrightarrow 2.1 \times 10^{-9} \mu^{-1} T \epsilon^{-5/2}$
<b>Ион–электрон</b>		
$\nu_s^{i e}/n_e Z^2 \lambda_{ie}$	$\approx 1.6 \times 10^{-9} \mu^{-1} T^{-3/2}$	$\longrightarrow 1.7 \times 10^{-4} \mu^{1/2} \epsilon^{-3/2}$
$\nu_{\perp}^{i e}/n_e Z^2 \lambda_{ie}$	$\approx 3.2 \times 10^{-9} \mu^{-1} T^{-1/2} \epsilon^{-1}$	$\longrightarrow 1.8 \times 10^{-7} \mu^{-1/2} \epsilon^{-3/2}$
$\nu_{\parallel}^{i e}/n_e Z^2 \lambda_{ie}$	$\approx 1.6 \times 10^{-9} \mu^{-1} T^{-1/2} \epsilon^{-1}$	$\longrightarrow 1.7 \times 10^{-4} \mu^{1/2} T \epsilon^{-5/2}$
<b>Ион–ион</b>		
$\frac{\nu_s^{i i'}}{n_{i'} Z^2 Z'^2 \lambda_{ii'}}$	$\approx 6.8 \times 10^{-8} \frac{\mu'^{1/2}}{\mu} \left(1 + \frac{\mu'}{\mu}\right)^{-1/2} T^{-3/2}$	$\longrightarrow 9.0 \times 10^{-8} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right) \frac{\mu^{1/2}}{\epsilon^{3/2}}$
$\frac{\nu_{\perp}^{i i'}}{n_{i'} Z^2 Z'^2 \lambda_{ii'}}$	$\approx 1.4 \times 10^{-7} \mu'^{1/2} \mu^{-1} T^{-1/2} \epsilon^{-1}$	$\longrightarrow 1.8 \times 10^{-7} \mu^{-1/2} \epsilon^{-3/2}$
$\frac{\nu_{\parallel}^{i i'}}{n_{i'} Z^2 Z'^2 \lambda_{ii'}}$	$\approx 6.8 \times 10^{-8} \mu'^{1/2} \mu^{-1} T^{-1/2} \epsilon^{-1}$	$\longrightarrow 9.0 \times 10^{-8} \mu^{1/2} \mu'^{-1} T \epsilon^{-5/2}$

В тех же пределах верно выражение для скорости передачи энергии:

$$\nu_{\epsilon} = 2\nu_s - \nu_{\perp} - \nu_{\parallel},$$

кроме случая, когда на ионах рассеиваются быстрые электроны или ионы. В этом случае старшие члены пропадают, и соответ-



ствующие пределы принимают вид:

$$\nu_{\epsilon}^{e|i} \longrightarrow 4.2 \times 10^{-9} n_i Z^2 \lambda_{ei} \left[ \epsilon^{-3/2} \mu^{-1} - 8.9 \times 10^4 (\mu/T)^{1/2} \epsilon^{-1} \exp(-1836 \mu \epsilon / T) \right] \text{сек}^{-1}$$

и

$$\nu_{\epsilon}^{i|i'} \longrightarrow 1.8 \times 10^{-7} n_{i'} Z^2 Z'^2 \lambda_{ii'} \left[ \epsilon^{-3/2} \mu^{1/2} / \mu' - 1.1 [(\mu + \mu') / \mu \mu'] (\mu' / T')^{1/2} \epsilon^{-1} \exp(-\mu' \epsilon / \mu T') \right] \text{сек}^{-1}.$$

В общем случае скорость передачи энергии  $\nu_{\epsilon}^{\alpha \setminus \beta}$  положительна при  $\epsilon > \epsilon_{\alpha}^*$  и отрицательна при  $\epsilon < \epsilon_{\alpha}^*$ , где  $x^* = (m_{\beta} / m_{\alpha}) \epsilon_{\alpha}^* / T_{\beta}$  — решение ур-ния  $\psi'(x^*) = (m_{\alpha} / m_{\beta}) \psi(x^*)$ . Ниже в таблице приведено отношение  $\epsilon_{\alpha}^* / T_{\beta}$  для нескольких конкретных пар  $\alpha$  и  $\beta$ :

$\alpha \setminus \beta$	$i e$	$e e, i i$	$e p$	$e D$	$e T, e He^3$	$e He^4$
$\frac{\epsilon_{\alpha}^*}{T_{\beta}}$	1.5	0.98	$4.8 \times 10^{-3}$	$2.6 \times 10^{-3}$	$1.8 \times 10^{-3}$	$1.4 \times 10^{-3}$

Когда оба сорта частиц имеют близкие к максвелловскому распределения с  $T_i \lesssim T_e$ , есть лишь две характерные скорости столкновений. При  $Z = 1$ ,

$$\begin{aligned} \nu_e &= 2.9 \times 10^{-6} n \lambda T_e^{-3/2} \text{сек}^{-1}; \\ \nu_i &= 4.8 \times 10^{-8} n \lambda T_i^{-3/2} \mu^{-1/2} \text{сек}^{-1}. \end{aligned}$$

**Изотропизация температуры** описывается уравнением

$$\frac{dT_{\perp}}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dT_{\parallel}}{dt} = -\nu_T^{\alpha} (T_{\perp} - T_{\parallel}),$$

где при  $A \equiv T_{\perp} / T_{\parallel} - 1 > 0$

$$\nu_T^{\alpha} = \frac{2\sqrt{\pi} e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2 n_{\alpha} \lambda_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}^{1/2} (kT_{\parallel})^{3/2}} A^{-2} \left[ -3 + (A + 3) \frac{\text{tg}^{-1}(A^{1/2})}{A^{1/2}} \right];$$

если же  $A < 0$ , то  $\text{tg}^{-1}(A^{1/2}) / A^{1/2}$  заменяется на

$\text{th}^{-1}(-A)^{1/2}/(-A)^{1/2}$ . При  $T_{\perp} \approx T_{\parallel} \equiv T$

$$\nu_T^e = 8.2 \times 10^{-7} n \lambda T^{-3/2} \text{сек}^{-1},$$

$$\nu_T^i = 1.9 \times 10^{-8} n \lambda Z^2 \mu^{-1/2} T^{-3/2} \text{сек}^{-1}.$$

### Установление теплового равновесия

Если компоненты плазмы имеют разную температуру, но покоятся друг относительно друга, то переход к равновесию описывается уравнением

$$\frac{dT_{\alpha}}{dt} = \sum_{\beta} \bar{\nu}_{\epsilon}^{\alpha \setminus \beta} (T_{\beta} - T_{\alpha}),$$

$$\text{где } \bar{\nu}_{\epsilon}^{\alpha \setminus \beta} = 1.8 \times 10^{-19} \frac{(m_{\alpha} m_{\beta})^{1/2} Z_{\alpha}^2 Z_{\beta}^2 n_{\beta} \lambda_{\alpha\beta}}{(m_{\alpha} T_{\beta} + m_{\beta} T_{\alpha})^{3/2}} \text{сек}^{-1}.$$

При  $T_e \approx T_i \equiv T$  это даёт

$$\bar{\nu}_{\epsilon}^{e|i} / n_i = \bar{\nu}_{\epsilon}^{i|e} / n_e = 3.2 \times 10^{-9} Z^2 \lambda / \mu T^{3/2} \text{см}^3 / \text{сек}.$$

### Кулоновский логарифм

Для пробных частиц с массой  $m_{\alpha}$  и зарядом  $e_{\alpha} = Z_{\alpha} e$ , рассеивающихся на частицах среды с массой  $m_{\beta}$  и зарядом  $e_{\beta} = Z_{\beta} e$ , кулоновский логарифм определяется как  $\lambda = \ln \Lambda \equiv \ln(r_{\max}/r_{\min})$ . Здесь  $r_{\min} = \max\{e_{\alpha} e_{\beta} / m_{\alpha\beta} \bar{u}^2, \hbar / 2m_{\alpha\beta} \bar{u}\}$ , причём усреднение производится по распределениям обеих частиц, а  $m_{\alpha\beta} = m_{\alpha} m_{\beta} / (m_{\alpha} + m_{\beta})$  и  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}$ ;  $r_{\max} = (4\pi \sum n_{\gamma} e_{\gamma}^2 / kT_{\gamma})^{-1/2}$ , где суммирование производится по всем сортам частиц  $\gamma$ , у которых  $\bar{u}^2 < v_{T\gamma}^2 = kT_{\gamma} / m_{\gamma}$ . Если это неравенство не выполнено, или если  $\bar{u} \omega_{c\alpha}^{-1} < r_{\max}$  или  $\bar{u} \omega_{c\beta}^{-1} < r_{\max}$ , то кинетическая теория неприменима. Обычно  $\lambda \approx 10 - 20$ . Поправки к кинетическим коэффициентам имеют порядок  $O(\lambda^{-1})$ , поэтому теория верна лишь с точностью  $\sim 10\%$  и не работает, когда  $\lambda \sim 1$ .

Следующие случаи представляют особый интерес:

(а) Тепловые электрон-электронные столкновения:

$$\lambda_{ee} = 23.5 - \ln(n_e^{1/2} T_e^{-5/4}) - [10^{-5} + (\ln T_e - 2)^2 / 16]^{1/2}$$

(б) Электрон–ионные столкновения:

$$\begin{aligned}\lambda_{ei} = \lambda_{ie} &= 23 - \ln \left( n_e^{1/2} Z T_e^{-3/2} \right), & T_i m_e / m_i < T_e < 10 Z^2 \text{ eV}; \\ &= 24 - \ln \left( n_e^{1/2} T_e^{-1} \right), & T_i m_e / m_i < 10 Z^2 \text{ eV} < T_e \\ &= 30 - \ln \left( n_i^{1/2} T_i^{-3/2} Z^2 \mu^{-1} \right), & T_e < T_i Z m_e / m_i.\end{aligned}$$

(в) Смешанные ион–ионные столкновения:

$$\lambda_{ii'} = \lambda_{i'i} = 23 - \ln \left[ \frac{Z Z' (\mu + \mu')}{\mu T_{i'} + \mu' T_i} \left( \frac{n_i Z^2}{T_i} + \frac{n_{i'} Z'^2}{T_{i'}} \right)^{1/2} \right].$$

(г) Встречные пучки ионов (относительная скорость  $v_D = \beta_D c$ ) в присутствии горячих электронов,  $\frac{k T_i}{m_i}, \frac{k T_{i'}}{m_{i'}} < v_D^2 < \frac{k T_e}{m_e}$ :

$$\lambda_{ii'} = \lambda_{i'i} = 35 - \ln \left[ \frac{Z Z' (\mu + \mu')}{\mu \mu' \beta_D^2} \left( \frac{n_e}{T_e} \right)^{1/2} \right].$$

### Уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{D f^\alpha}{Dt} \equiv \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f^\alpha + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f^\alpha = \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}},$$

где  $\mathbf{F}$  — поле внешних сил. Общий вид интеграла столкновений:

$$\left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = - \sum_{\beta} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{J}^{\alpha \setminus \beta},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^{\alpha \setminus \beta} &= 2\pi \lambda_{\alpha\beta} \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\alpha} \int d^3 v' (u^2 l - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) u^{-3} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{m_\beta} f^\alpha(\mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{v}'} f^\beta(\mathbf{v}') - \frac{1}{m_\alpha} f^\beta(\mathbf{v}') \nabla_{\mathbf{v}} f^\alpha(\mathbf{v}) \right\}\end{aligned} \quad (\text{форма Ландау}),$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$  и  $l = \mathbf{i}_x \otimes \mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y \otimes \mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z \otimes \mathbf{i}_z$  — единичная диада,

или, что то же,

$$\mathbf{J}^{\alpha\backslash\beta} = 4\pi\lambda_{\alpha\beta} \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\alpha^2} \left\{ f^\alpha(\mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{v}} H(\mathbf{v}) - \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot [f^\alpha(\mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{v}} G(\mathbf{v})] \right\},$$

где потенциалы Розенблата

$$G(\mathbf{v}) = \int f^\beta(\mathbf{v}') u d^3 v'$$

$$H(\mathbf{v}) = \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) \int f^\beta(\mathbf{v}') u^{-1} d^3 v'.$$

Если пучок частиц сорта  $\alpha$  распространяется в максвелловской плазме, а концентрация и плотность энергии частиц пучка малы по сравнению с таковыми у плазмы, то

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{\alpha\backslash\beta} = & - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \nu_s^{\alpha\backslash\beta} \mathbf{v} f^\alpha - \frac{1}{2} \nu_{\parallel}^{\alpha\backslash\beta} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f^\alpha \\ & - \frac{1}{4} \nu_{\perp}^{\alpha\backslash\beta} (v^2 I - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f^\alpha. \end{aligned}$$

### Оператор столкновений Бхатнагара–Гросса–Крука

Для функций распределения с небольшими градиентами в пространстве скоростей члены, отвечающие столкновениям в уравнениях Фоккера–Планка, можно записать приближённо:

$$\frac{Df_e}{Dt} = \nu_{ee}(F_e - f_e) + \nu_{ei}(\bar{F}_e - f_e);$$

$$\frac{Df_i}{Dt} = \nu_{ie}(\bar{F}_i - f_i) + \nu_{ii}(F_i - f_i).$$

Времена релаксации  $\nu_s^{\alpha\backslash\beta}$ , приведённые ранее, можно использовать для определения  $\nu_{\alpha\beta}$ , полагая, что ионы медленные, а электроны быстрые, и заменяя  $\epsilon$  на  $T_\alpha$  (вместо  $\nu_{ee}$  и  $\nu_{ii}$  с равным успехом можно использовать  $\nu_{\perp}$ , и результат нечувствителен к тому, используется ли предел быстрых либо медленных пробных частиц). Распределения Максвелла  $F_\alpha$  и  $\bar{F}_\alpha$  таковы:

$$F_\alpha = n_\alpha \left( \frac{m_\alpha}{2\pi k T_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \left[ \frac{m_\alpha (\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)^2}{2k T_\alpha} \right] \right\};$$

$$\bar{F}_\alpha = n_\alpha \left( \frac{m_\alpha}{2\pi k \bar{T}_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \left[ \frac{m_\alpha (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_\alpha)^2}{2k \bar{T}_\alpha} \right] \right\},$$

где  $n_\alpha$ ,  $\mathbf{v}_\alpha$  и  $T_\alpha$  — локальные концентрация, средняя скорость частиц и эффективная температура, определяемые как моменты  $f_\alpha$ . При определении  $\bar{T}_\alpha$  и  $\bar{\mathbf{v}}_\alpha$  возможен некоторый произвол;<sup>20</sup> одна из возможностей —  $\bar{T}_e = T_i$ ,  $\bar{T}_i = T_e$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_e = \mathbf{v}_i$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_e$ .

### Кинетические коэффициенты

Уравнения переноса для многокомпонентной плазмы таковы:

$$\frac{d^\alpha n_\alpha}{dt} + n_\alpha \nabla \cdot \mathbf{v}_\alpha = 0;$$

$$m_\alpha n_\alpha \frac{d^\alpha \mathbf{v}_\alpha}{dt} = -\nabla p_\alpha - \nabla \cdot \mathbf{P}_\alpha + Z_\alpha e n_\alpha \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B} \right] + \mathbf{R}_\alpha;$$

$$\frac{3}{2} n_\alpha \frac{d^\alpha k T_\alpha}{dt} + p_\alpha \nabla \cdot \mathbf{v}_\alpha = -\nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha - \mathbf{P}_\alpha : \nabla \mathbf{v}_\alpha + Q_\alpha.$$

Здесь  $d^\alpha/dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla$ ;  $p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha$ ;  $\mathbf{R}_\alpha = \sum_\beta \mathbf{R}_{\alpha\beta}$  и  $Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta}$ , где  $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$  и  $Q_{\alpha\beta}$  — соответственно импульс и энергия, получаемые частицами  $\alpha$  за счёт столкновений с частицами  $\beta$  в единице объёма за единицу времени;  $\mathbf{P}_\alpha$  — тензор вязких напряжений;  $\mathbf{q}_\alpha$  — плотность потока энергии.

Ниже в табл. приведены кинетические коэффициенты простой двухкомпонентной плазмы (ионы с  $Z = 1$  и электроны). Индексы  $\parallel$  и  $\perp$  обозначают ориентированность по отношению к магнитному полю  $\mathbf{B} = \mathbf{b}B$ ;  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i$ ;  $n_e = n_i \equiv n$ ;  $\mathbf{j} = -ne\mathbf{u}$ ;  $\omega_{ce} = 1.76 \times 10^7 B \text{ сек}^{-1}$  и  $\omega_{ci} = (m_e/m_i)\omega_{ce}$  — циклотронные частоты соответственно электронов и ионов; в качестве характерных времён свободного пробега взяты

$$\tau_e = \frac{3\sqrt{m_e}(kT_e)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi} n \lambda e^4} = 3.44 \times 10^5 \frac{T_e^{3/2}}{n \lambda} \text{ сек},$$

где  $\lambda$  — кулоновский логарифм, и

$$\tau_i = \frac{3\sqrt{m_i}(kT_i)^{3/2}}{4\sqrt{\pi} n \lambda e^4} = 2.09 \times 10^7 \frac{T_i^{3/2}}{n \lambda} \mu^{1/2} \text{ сек}.$$

В пределе больших полей ( $\omega_{c\alpha}\tau_\alpha \gg 1$ ,  $\alpha = i, e$ ) процессы переноса можно охарактеризовать следующим образом:<sup>21</sup>

перенос импульса	$\mathbf{R}_{ei} = -\mathbf{R}_{ie} \equiv \mathbf{R} = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_T;$
трение	$\mathbf{R}_u = ne(\mathbf{j}_{\parallel}/\sigma_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}/\sigma_{\perp});$
удельная проводимость	$\sigma_{\parallel} = 1.96\sigma_{\perp}; \quad \sigma_{\perp} = ne^2\tau_e/m_e;$
термо-э.д.с.	$\mathbf{R}_T = -0.71n\nabla_{\parallel}(kT_e) - \frac{3n}{2\omega_{ce}\tau_e}\mathbf{b} \times \nabla_{\perp}(kT_e);$
нагрев ионов	$Q_i = \frac{3m_e}{m_i} \frac{nk}{\tau_e}(T_e - T_i);$
нагрев $e^{-}$	$Q_e = -Q_i - \mathbf{R} \cdot \mathbf{u};$
плотность потока энергии ионов	$\mathbf{q}_i = -\kappa_{\parallel}^i \nabla_{\parallel}(kT_i) - \kappa_{\perp}^i \nabla_{\perp}(kT_i) + \kappa_{\wedge}^i \mathbf{b} \times \nabla_{\perp}(kT_i);$
ионная тепло- проводность	$\kappa_{\parallel}^i = 3.9 \frac{nkT_i\tau_i}{m_i}; \quad \kappa_{\perp}^i = \frac{2nkT_i}{m_i\omega_{ci}^2\tau_i}; \quad \kappa_{\wedge}^i = \frac{5nkT_i}{2m_i\omega_{ci}};$
плотность потока энергии $e^{-}$	$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_u + \mathbf{q}_T;$
плотность потока теплоты трения	$\mathbf{q}_u^e = 0.71nkT_e\mathbf{u}_{\parallel} + \frac{3nkT_e}{2\omega_{ce}\tau_e}\mathbf{b} \times \mathbf{u}_{\perp};$
плотность температур-го потока тепла	$\mathbf{q}_T^e = -\kappa_{\parallel}^e \nabla_{\parallel}(kT_e) - \kappa_{\perp}^e \nabla_{\perp}(kT_e) - \kappa_{\wedge}^e \mathbf{b} \times \nabla_{\perp}(kT_e);$
электронная теплопроводность	$\kappa_{\parallel}^e = 3.2 \frac{nkT_e\tau_e}{m_e}; \quad \kappa_{\perp}^e = 4.7 \frac{nkT_e}{m_e\omega_{ce}^2\tau_e}; \quad \kappa_{\wedge}^e = \frac{5nkT_e}{2m_e\omega_{ce}};$
тензор вязких напряжений ( $z \parallel \mathbf{B}$ )	$P_{xx} = -\frac{\eta_0}{2}(W_{xx} + W_{yy}) - \frac{\eta_1}{2}(W_{xx} - W_{yy}) - \eta_3 W_{xy};$ $P_{yy} = -\frac{\eta_0}{2}(W_{xx} + W_{yy}) + \frac{\eta_1}{2}(W_{xx} - W_{yy}) + \eta_3 W_{xy};$ $P_{xy} = P_{yx} = -\eta_1 W_{xy} + \frac{\eta_3}{2}(W_{xx} - W_{yy});$ $P_{xz} = P_{zx} = -\eta_2 W_{xz} - \eta_4 W_{yz};$ $P_{yz} = P_{zy} = -\eta_2 W_{yz} + \eta_4 W_{xz}; \quad P_{zz} = -\eta_0 W_{zz};$
ионная вязкость	$\eta_0^i = 0.96nkT_i\tau_i; \quad \eta_1^i = \frac{3nkT_i}{10\omega_{ci}^2\tau_i}; \quad \eta_2^i = \frac{6nkT_i}{5\omega_{ci}^2\tau_i};$ $\eta_3^i = \frac{nkT_i}{2\omega_{ci}}; \quad \eta_4^i = \frac{nkT_i}{\omega_{ci}};$
электронная вязкость	$\eta_0^e = 0.73nkT_e\tau_e; \quad \eta_1^e = 0.51 \frac{nkT_e}{\omega_{ce}^2\tau_e}; \quad \eta_2^e = 2.0 \frac{nkT_e}{\omega_{ce}^2\tau_e};$ $\eta_3^e = -\frac{nkT_e}{2\omega_{ce}}; \quad \eta_4^e = -\frac{nkT_e}{\omega_{ce}}.$

Тензор скоростей напряжений (для обоих сортов частиц):

$$W_{jk} = \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

При  $\mathbf{B} = 0$  выражения упрощаются:

$$\mathbf{R}_u = ne\mathbf{j}/\sigma_{\parallel}; \quad \mathbf{R}_T = -0.71n\nabla(kT_e); \quad \mathbf{q}_i = -\kappa_{\parallel}^i \nabla(kT_i);$$

$$\mathbf{q}_u^e = 0.71nkT_e \mathbf{u}; \quad \mathbf{q}_T^e = -\kappa_{\parallel}^e \nabla(kT_e); \quad P_{jk} = -\eta_0 W_{jk}.$$

При  $\omega_{ce}\tau_e \gg 1 \gg \omega_{ci}\tau_i$  электроны подчиняются выражениям для сильных полей, а ионы — для  $\mathbf{B} = 0$ .

Теория столкновительного переноса применима, когда (1) макроскопические скорости изменения со временем  $d/dt \ll 1/\tau$ , где  $\tau$  — наибольший по времени масштаб столкновений, и (в отсутствие магнитного поля) (2) макроскопические масштабы длины  $L \gg l$ , где  $l = \bar{v}\tau$  — длина свободного пробега. В сильном магнитном поле,  $\omega_{ce}\tau \gg 1$ , условие (2) заменяется на  $L_{\parallel} \gg l$  и  $L_{\perp} \gg \sqrt{lr_e}$  ( $L_{\perp} \gg r_e$  в однородном поле), где  $L_{\parallel}$  — характерный размер системы в направлении  $\mathbf{B}$ , а  $L_{\perp}$  — меньшее из  $B/|\nabla_{\perp} B|$  и характерных поперечных размеров. Кроме того, стандартными кинетическими коэффициентами можно пользоваться, только когда (3) кулоновский логарифм  $\lambda \gg 1$ ; (4) циклотронный радиус электрона  $r_e \gg \lambda_D$ , т.е.  $8\pi n_e m_e c^2 \gg B^2$ ; (5) скорости относительного движения различных сортов частиц  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}$  малы по сравнению с тепловыми скоростями:  $u^2 \ll kT_{\alpha}/m_{\alpha}$ ,  $kT_{\beta}/m_{\beta}$ ; и (6) аномальными процессами переноса, связанными с микронеустойчивостями, можно пренебречь.

### Слабоионизированная плазма

Частота столкновений при рассеянии заряженных частиц  $\alpha$  на нейтральных равна

$$\nu_{\alpha} = n_0 \sigma_s^{\alpha|0} (kT_{\alpha}/m_{\alpha})^{1/2},$$

где  $n_0$  — плотность нейтральных частиц, а  $\sigma_s^{\alpha|0}$  — сечение рассеяния. Обычно оно имеет порядок  $5 \times 10^{-15}$  см<sup>2</sup> и слабо зависит от температуры.

Если размеры системы малы по сравнению с дебаевским радиусом,  $L \ll \lambda_D$ , то коэффициенты диффузии заряженных частиц

$$D_{\alpha} = kT_{\alpha}/m_{\alpha}\nu_{\alpha}.$$

В противоположном пределе ионы и электроны диффундируют с одинаковой скоростью (амбиполярная диффузия):

$$D_A = \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_i - \mu_e} = \frac{(T_i + T_e) D_i D_e}{T_i D_e + T_e D_i},$$

где  $\mu_\alpha = e_\alpha / m_\alpha \nu_\alpha$  — их подвижности. Удельная проводимость равна  $\sigma_\alpha = n_\alpha e_\alpha \mu_\alpha$ .

При  $\mathbf{V} \neq 0$  скаляры  $\mu$  и  $\sigma$  становятся тензорами:

$$\mathbf{J}^\alpha = \boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot \mathbf{E} = \sigma_{\parallel}^\alpha \mathbf{E}_{\parallel} + \sigma_{\perp}^\alpha \mathbf{E}_{\perp} + \sigma_{\wedge}^\alpha \mathbf{E} \times \mathbf{b}, \text{ где } \mathbf{b} = \mathbf{V}/V \text{ и}$$

$$\sigma_{\parallel}^\alpha = n_\alpha e_\alpha^2 / m_\alpha \nu_\alpha;$$

$$\sigma_{\perp}^\alpha = \sigma_{\parallel}^\alpha \nu_\alpha^2 / (\nu_\alpha^2 + \omega_{c\alpha}^2);$$

$$\sigma_{\wedge}^\alpha = \sigma_{\parallel}^\alpha \nu_\alpha \omega_{c\alpha} / (\nu_\alpha^2 + \omega_{c\alpha}^2).$$

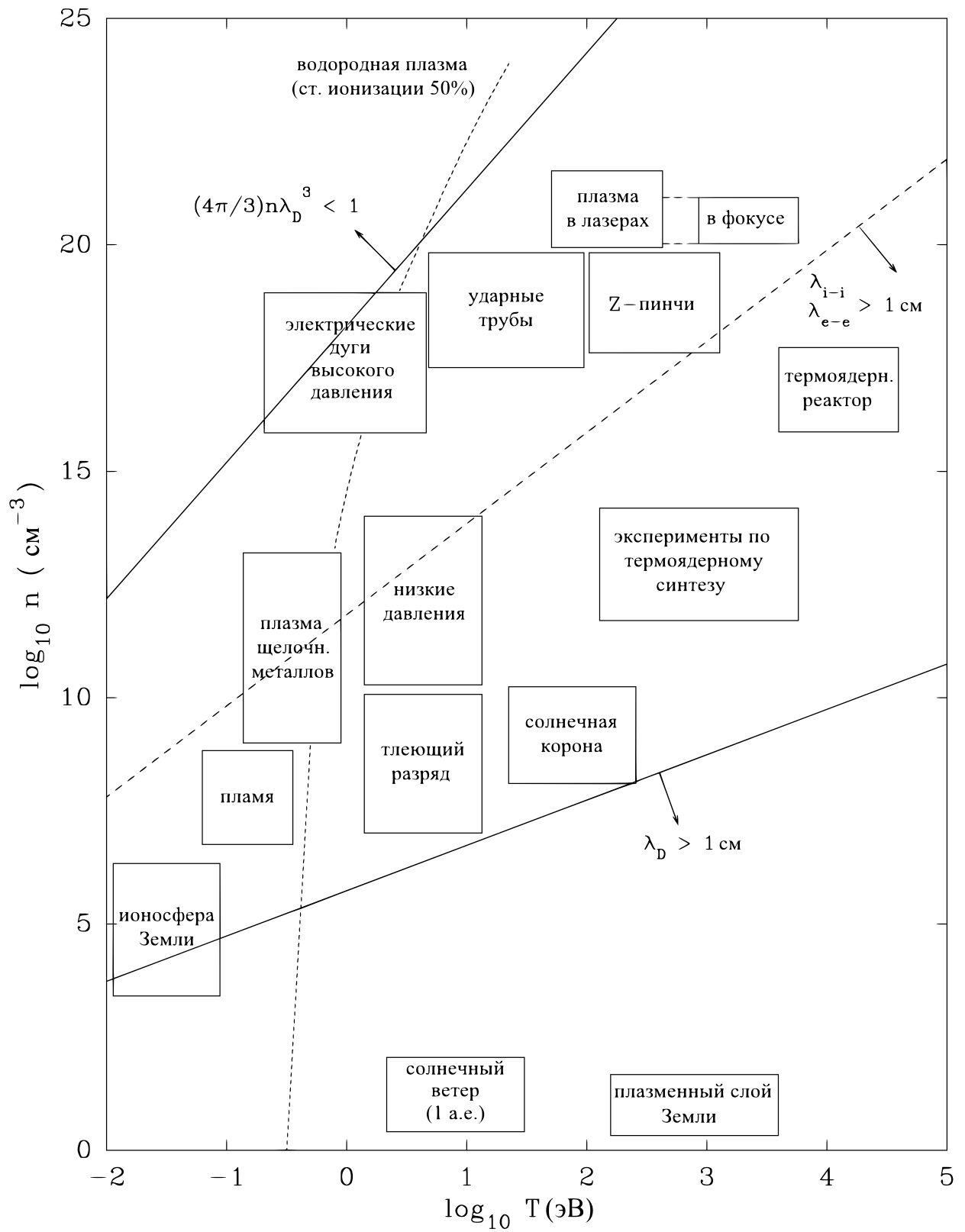
Здесь  $\sigma_{\perp}$  и  $\sigma_{\wedge}$  — проводимости соотв-но Педерсена и Холла.

### ХАРАКТЕРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ В ТИПИЧНЫХ ПРИМЕРАХ ПЛАЗМЫ

Тип плазмы	$n, \text{см}^{-3}$	$T, \text{эВ}$	$\omega_{pe}, \text{сек}^{-1}$	$\lambda_D, \text{см}$	$n\lambda_D^3$	$\nu_{ei}, \text{сек}^{-1}$
Межзвёздный газ	1	1	$6 \times 10^4$	$7 \times 10^2$	$4 \times 10^8$	$7 \times 10^{-5}$
Газовая туманность	$10^3$	1	$2 \times 10^6$	20	$8 \times 10^6$	$6 \times 10^{-2}$
Солнечная корона	$10^9$	$10^2$	$2 \times 10^9$	$2 \times 10^{-1}$	$8 \times 10^6$	60
Горячая диффузная плазма	$10^{12}$	$10^2$	$6 \times 10^{10}$	$7 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^5$	40
Выброс газа в атмосфере Солнца	$10^{14}$	1	$6 \times 10^{11}$	$7 \times 10^{-5}$	40	$2 \times 10^9$
Тёплая плазма	$10^{14}$	10	$6 \times 10^{11}$	$2 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^2$	$10^7$
Горячая плазма	$10^{14}$	$10^2$	$6 \times 10^{11}$	$7 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^4$	$4 \times 10^6$
Термоядерная плазма	$10^{15}$	$10^4$	$2 \times 10^{12}$	$2 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^6$	$5 \times 10^4$
Тета-пинч	$10^{16}$	$10^2$	$6 \times 10^{12}$	$7 \times 10^{-5}$	$4 \times 10^3$	$3 \times 10^8$
Плотная горячая плазма	$10^{18}$	$10^2$	$6 \times 10^{13}$	$7 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^2$	$2 \times 10^{10}$
Плазма в лазерах	$10^{20}$	$10^2$	$6 \times 10^{14}$	$7 \times 10^{-7}$	40	$2 \times 10^{12}$



Сравнительная информация представлена на диаграмме<sup>22</sup>:



## ПАРАМЕТРЫ ИОНОСФЕРЫ<sup>23</sup>

В таблице приведены средние значения, измеренные в ночное время. Там, где указаны два числа, первое относится к нижней части слоя, а второе — к верхней.

Величина	Слой E	Слой F
Высота (км)	90 – 160	160 – 500
Плотность частиц ( $\text{м}^{-3}$ )	$1.5 \times 10^{10}$ – $3.0 \times 10^{10}$	$5 \times 10^{10}$ – $2 \times 10^{11}$
Проинтегр-нная по высоте плотность частиц ( $\text{м}^{-2}$ )	$9 \times 10^{14}$	$4.5 \times 10^{15}$
Частота столкновений $i$ с нейтр. частицами ( $\text{сек}^{-1}$ )	$2 \times 10^3$ – $10^2$	0.5 – 0.05
(Циклотронная частота $i$ / част. их столкновений) = $\kappa_i$	0.09 – 2.0	$4.6 \times 10^2$ – $5.0 \times 10^3$
Фактор Педерсена для $i$ $\kappa_i / (1 + \kappa_i^2)$	0.09 – 0.5	$2.2 \times 10^{-3}$ – $2 \times 10^{-4}$
Фактор Холла для $i$ $\kappa_i^2 / (1 + \kappa_i^2)$	$8 \times 10^{-4}$ – 0.8	1.0
Частота столкновений $e^-$ с нейтр. атомами ( $\text{сек}^{-1}$ )	$1.5 \times 10^4$ – $9.0 \times 10^2$	80 – 10
(Циклотронная част. $e^-$ / част. их столкновений) = $\kappa_e$	$4.1 \times 10^2$ – $6.9 \times 10^3$	$7.8 \times 10^4$ – $6.2 \times 10^5$
Фактор Педерсена для $e^-$ $\kappa_e / (1 + \kappa_e^2)$	$2.7 \times 10^{-3}$ – $1.5 \times 10^{-4}$	$10^{-5}$ – $1.5 \times 10^{-6}$
Фактор Холла для $e^-$ $\kappa_e^2 / (1 + \kappa_e^2)$	1.0	1.0
Средняя молекулярная масса (в а.е.м.)	28 – 26	0.5 – 0.05
Циклотронная частота ионов ( $\text{сек}^{-1}$ )	180 – 190	230 – 300
Коэффициент диффузии нейтр. частиц ( $\text{м}^2/\text{сек}$ )	$30$ – $5 \times 10^3$	$10^5$

Магнитное поле Земли на высоте нижней ионосферы вблизи экватора  $B_0 \approx 0.35 \times 10^{-4}$  Тл. Средний Радиус Земли  $R_E = 6371$  км.

## ПАРАМЕТРЫ СОЛНЦА<sup>24</sup>

Параметр	Обозн.	Величина	Размерность
Полная масса	$M_{\odot}$	$1.99 \times 10^{33}$	г
Радиус	$R_{\odot}$	$6.96 \times 10^{10}$	см
Уск-е своб. падения (на поверхности)	$g_{\odot}$	$2.74 \times 10^4$	см/сек <sup>2</sup>
Вторая космическая скорость	$v_{\infty}$	$6.18 \times 10^7$	см/сек
Вертикальная плотность потока массы в спикулах	—	$1.6 \times 10^{-9}$	г·см <sup>-2</sup> ·сек <sup>-1</sup>
Проинтегрированная по высоте плотность частиц атмосферы	—	4.28	г/см <sup>2</sup>
Магнитное поле в районах пятен	$B_{\max}$	2500–3500	Гс
Эффективная температура на пов-ти	$T_0$	5770	К
Мощность излучения	$\mathcal{L}_{\odot}$	$3.83 \times 10^{33}$	эрг/сек
Плотность потока излучения	$\mathcal{F}$	$6.28 \times 10^{10}$	эрг·см <sup>-2</sup> ·с <sup>-1</sup>
Оптическая толщина на длине волны 500 нм, измеряемая от фотосферы	$\tau_5$	0.99	—
Астрономич. единица (орб. Земли)	a.e.	$1.50 \times 10^{13}$	см
Солн. постоянная (интенс-ть на 1 a.e.)	$f$	$1.36 \times 10^6$	эрг·см <sup>-2</sup> ·с <sup>-1</sup>

## Хромосфера и корона<sup>25</sup>

Параметр (Единицы)	Спокойное Солнце	Корональная дыра	Активная область
Радиационные потери в хромосфере (эрг·см <sup>-2</sup> ·сек <sup>-1</sup> )			
Нижняя хромосфера	$2 \times 10^6$	$2 \times 10^6$	$\gtrsim 10^7$
Средняя хромосфера	$2 \times 10^6$	$2 \times 10^6$	$10^7$
Верхняя хромосфера	$3 \times 10^5$	$3 \times 10^5$	$2 \times 10^6$
Полные	$4 \times 10^6$	$4 \times 10^6$	$\gtrsim 2 \times 10^7$
Давление в переходном слое (дин/см <sup>2</sup> )	0.2	0.07	2
Температура в короне (К) на расстоянии 1.1 $R_{\odot}$	$1.1-1.6 \times 10^6$	$10^6$	$2.5 \times 10^6$
Потери энергии в короне (эрг·см <sup>-2</sup> ·с <sup>-1</sup> )			
Проводимость	$2 \times 10^5$	$6 \times 10^4$	$10^5-10^7$
Излучение	$10^5$	$10^4$	$5 \times 10^6$
Солнечный ветер	$\lesssim 5 \times 10^4$	$7 \times 10^5$	$< 10^5$
Полные	$3 \times 10^5$	$8 \times 10^5$	$10^7$
Вещество, уносимое солнечным ветром (г·см <sup>-2</sup> ·сек <sup>-1</sup> )	$\lesssim 2 \times 10^{-11}$	$2 \times 10^{-10}$	$< 4 \times 10^{-11}$

## ТЕРМОЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ<sup>26</sup>

Распространённость изотопов в природе:

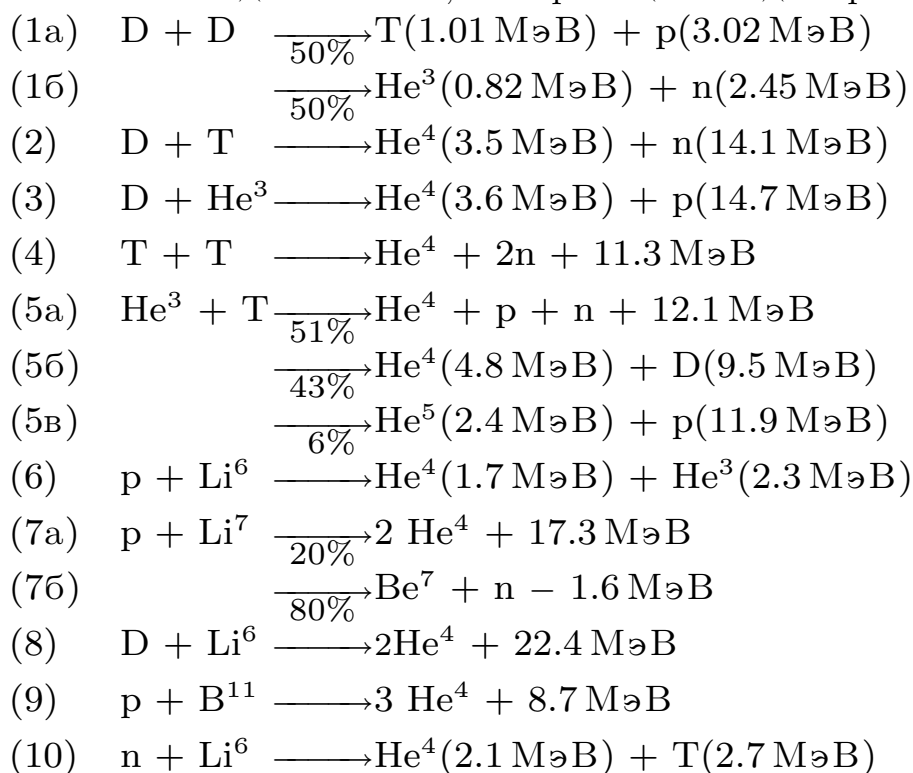
водород	$n_D/n_H = 1.5 \times 10^{-4}$
гелий	$n_{\text{He}^3}/n_{\text{He}^4} = 1.3 \times 10^{-6}$
литий	$n_{\text{Li}^6}/n_{\text{Li}^7} = 0.08$

Отношения масс:

$m_e/m_D$	$= 2.72 \times 10^{-4} = 1/3670$
$(m_e/m_D)^{1/2}$	$= 1.65 \times 10^{-2} = 1/60.6$
$m_e/m_T$	$= 1.82 \times 10^{-4} = 1/5496$
$(m_e/m_T)^{1/2}$	$= 1.35 \times 10^{-2} = 1/74.1$

Внесистемной единицей поглощённой дозы излучения является рад. 1 рад =  $10^2$  эрг/г. Радиоактивность вещества измеряется в кюри (Ки): 1 кюри =  $3.7 \times 10^{10}$  распадов/сек.

Реакции синтеза (доли приведены вблизи пиков сечения; отрицательный выход означает, что реакция эндотермическая):<sup>27</sup>



Полное сечение реакции в барнах ( $1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2$ ) как функцию энергии  $E$  (кэВ) падающей частицы [первого иона в левой части ур. (1) – (5)], полагая, что мишень покоится, можно аппроксимировать так:<sup>28</sup>

$$\sigma_T(E) = \frac{A_5 + [(A_4 - A_3 E)^2 + 1]^{-1} A_2}{E [\exp(A_1 E^{-1/2}) - 1]},$$

где коэффициенты Дуэйна  $A_j$  для основных реакций таковы:

	D–D (1a)	D–D (1б)	D–T (2)	D–He <sup>3</sup> (3)	T–T (4)	T–He <sup>3</sup> (5a – в)
$A_1$	46.097	47.88	45.95	89.27	38.39	123.1
$A_2$	372	482	50200	25900	448	11250
$A_3$	$4.36 \times 10^{-4}$	$3.08 \times 10^{-4}$	$1.368 \times 10^{-2}$	$3.98 \times 10^{-3}$	$1.02 \times 10^{-3}$	0
$A_4$	1.220	1.177	1.076	1.297	2.09	0
$A_5$	0	0	409	647	0	0

Скорости реакций  $\overline{\sigma v}$  (в см<sup>3</sup>/сек), усреднённые по Максвеллу:

Температура (кэВ)	D–D (1a + 1б)	D–T (2)	D–He <sup>3</sup> (3)	T–T (4)	T–He <sup>3</sup> (5a – в)
1.0	$1.5 \times 10^{-22}$	$5.5 \times 10^{-21}$	$10^{-26}$	$3.3 \times 10^{-22}$	$10^{-28}$
2.0	$5.4 \times 10^{-21}$	$2.6 \times 10^{-19}$	$1.4 \times 10^{-23}$	$7.1 \times 10^{-21}$	$10^{-25}$
5.0	$1.8 \times 10^{-19}$	$1.3 \times 10^{-17}$	$6.7 \times 10^{-21}$	$1.4 \times 10^{-19}$	$2.1 \times 10^{-22}$
10.0	$1.2 \times 10^{-18}$	$1.1 \times 10^{-16}$	$2.3 \times 10^{-19}$	$7.2 \times 10^{-19}$	$1.2 \times 10^{-20}$
20.0	$5.2 \times 10^{-18}$	$4.2 \times 10^{-16}$	$3.8 \times 10^{-18}$	$2.5 \times 10^{-18}$	$2.6 \times 10^{-19}$
50.0	$2.1 \times 10^{-17}$	$8.7 \times 10^{-16}$	$5.4 \times 10^{-17}$	$8.7 \times 10^{-18}$	$5.3 \times 10^{-18}$
100.0	$4.5 \times 10^{-17}$	$8.5 \times 10^{-16}$	$1.6 \times 10^{-16}$	$1.9 \times 10^{-17}$	$2.7 \times 10^{-17}$
200.0	$8.8 \times 10^{-17}$	$6.3 \times 10^{-16}$	$2.4 \times 10^{-16}$	$4.2 \times 10^{-17}$	$9.2 \times 10^{-17}$
500.0	$1.8 \times 10^{-16}$	$3.7 \times 10^{-16}$	$2.3 \times 10^{-16}$	$8.4 \times 10^{-17}$	$2.9 \times 10^{-16}$
1000.0	$2.2 \times 10^{-16}$	$2.7 \times 10^{-16}$	$1.8 \times 10^{-16}$	$8.0 \times 10^{-17}$	$5.2 \times 10^{-16}$

При малых энергиях ( $T \lesssim 25$ кэВ) справедливы формулы:

$$(\overline{\sigma v})_{DD} = 2.33 \times 10^{-14} T^{-2/3} \exp(-18.76 T^{-1/3}) \text{ см}^3/\text{сек};$$

$$(\overline{\sigma v})_{DT} = 3.68 \times 10^{-12} T^{-2/3} \exp(-19.94 T^{-1/3}) \text{ см}^3/\text{сек},$$

где  $T$  измеряется в кэВ.

Мощность, выделяемая через заряженные частицы:

$$P_{DD} = 3.3 \times 10^{-13} n_D^2 (\overline{\sigma v})_{DD} \text{ Вт}/\text{см}^3 \text{ (включая последующую реакцию D–T);}$$

$$P_{DT} = 5.6 \times 10^{-13} n_D n_T (\overline{\sigma v})_{DT} \text{ Вт}/\text{см}^3;$$

$$P_{DHe^3} = 2.9 \times 10^{-12} n_D n_{He^3} (\overline{\sigma v})_{DHe^3} \text{ Вт}/\text{см}^3.$$

## РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПУЧКИ ЭЛЕКТРОНОВ

В численных выражениях  $[I] = \text{А}$ ,  $[B] = \text{Гс}$ , линейная плотность электронов  $[N] = \text{см}^{-1}$ , а температура, напряжение и энергия приведены в МэВ;  $\beta_z = v_z/c$ ;  $k$  — постоянная Больцмана.

Релятивистское выражение для циклотронного радиуса:

$$r_e = \frac{mc^2}{eB}(\gamma^2 - 1)^{1/2} \text{ (СГС)} = 1.70 \times 10^3(\gamma^2 - 1)^{1/2} B^{-1} \text{ см.}$$

Энергия релятивистского электрона:

$$W = mc^2\gamma = 0.511\gamma \text{ МэВ.}$$

Условие Беннета для пинчей:

$$I^2 = 2Nk(T_e + T_i)c^2 \text{ (СГС)} = 3.20 \times 10^{-4}N(T_e + T_i) \text{ А}^2.$$

Критерий Альфвена–Лоусона:

$$I_A = (mc^3/e)\beta_z\gamma \text{ (СГС)} = (4\pi mc/\mu_0 e)\beta_z\gamma \text{ (СИ)} = 1.70 \times 10^4\beta_z\gamma \text{ А.}$$

Отношение полного тока к  $I_A$  равно

$$\frac{I}{I_A} = \frac{\nu}{\gamma}.$$

Здесь  $\nu = Nr_e$  — число Будкера ( $r_e = e^2/mc^2 = 2.82 \times 10^{-13}$  см — классический радиус электрона). Объёмная плотность электронов в пучке

$$n_b = 2.08 \times 10^8 J\beta^{-1} \text{ см}^{-3},$$

где  $J$  — плотность тока ( $\text{А/см}^2$ ). Для однородного пучка радиуса  $a$  (см)

$$n_b = 6.63 \times 10^7 I a^{-2} \beta^{-1} \text{ см}^{-3},$$

и

$$\frac{2r_e}{a} = \frac{\nu}{\gamma}.$$

Закон Чайлда–Лэнгмюра–Богуславского: (нерелятивистская) плотность тока, ограниченного пространственным зарядом между параллельными пластинами с разностью потенциалов  $V$  (в МВ), разнесёнными на расстояние  $d$  (в см), равна:

$$J = 2.34 \times 10^3 V^{3/2} d^{-2} \text{ А/см}^2.$$

Парапотенциальный ток насыщения (ограниченный собственным магнитным полем ток вдоль эквипотенциалей в диодах и линиях передачи на пинчах) равен<sup>29</sup>

$$I_p = 8.5 \times 10^3 G \gamma \ln [\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2}] \text{ А},$$

где  $G$  — множитель, зависящий от геометрии диода:

$$G = \frac{w}{2\pi d} \quad \text{для плоских катода и анода шириной } w, \text{ расположенных параллельно на расстоянии } d;$$

$$G = \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^{-1} \quad \text{для цилиндров с радиусами } R_2 > R_1;$$

$$G = \frac{R_c}{d_0} \quad \text{для конического катода с основанием радиуса } R_c, \text{ расположенным на расстоянии } d_0 \text{ от плоского анода.}$$

При  $\beta \rightarrow 0$  ( $\gamma \rightarrow 1$ )  $I_A, I_p \rightarrow 0$ .

Для того, чтобы продольное магнитное поле  $B_z$  препятствовало расщеплению пучка с плотностью тока  $J$  ( $\text{А}/\text{см}^2$ ) на нити, должно выполняться условие:

$$B_z > 47\beta_z(\gamma J)^{1/2} \text{ Г.}$$

Напряжение, измеряемое с помощью пояса Роговского с внутренним радиусом  $A$ ,  $n$  витками обмотки, внешним радиусом  $a$ , индуктивностью  $L$ , внешним сопротивлением  $R$  и ёмкостью  $C$ , равно (все величины в СИ):

$$\text{в схеме с интегрирующей цепочкой} \quad V = (1/RC)(nA\mu_0 I/2\pi a);$$

$$\text{с интегрированием сигнала на собств. индуктивности} \quad V = (R/L)(nA\mu_0 I/2\pi a) = RI/n.$$

Выход при рентгеновском излучении, если средний заряд ядер мишени  $Z$  ( $V \lesssim 5 \text{ МэВ}$ ):

$$\eta \equiv \text{мощность рентг. излучения/мощность пучка} = 7 \times 10^{-4} ZV.$$

Доза рентгеновского излучения на расстоянии 1 м от пучка электронов, нанесшего полный заряд  $Q$  (Кл) на мишень с зарядом ядер  $Z$  при условии  $V \geq 0.84V_{\text{max}}$ :

$$D = 150V_{\text{max}}^{2.8} QZ^{1/2} \text{ рад.}$$

## ПУЧКОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ<sup>30</sup>

(условные обозначения см. на стр. 50)

Название	Условия	Механизм насыщения
Электрон– электронная	$V_d > \bar{V}_{ej}, j = 1, 2$	Захват электронов, пока не станет $\bar{V}_{ej} \sim V_d$
Неустойчивость Бьюнмана	$V_d > (M/m)^{1/3} \bar{V}_i,$ $V_d > \bar{V}_e$	Захват электронов, пока не станет $\bar{V}_e \sim V_d$
Плазменно– пучковая	$V_b > (n_p/n_b)^{1/3} \bar{V}_b$	Захват электронов пучка
Слабая плазмен– но–пучковая	$V_b < (n_p/n_b)^{1/3} \bar{V}_b$	Квазилинейный или нелиней– ный (взаимодействие мод)
Плазменно–пучко– вая (горяч. $e^-$ )	$\bar{V}_e > V_b > \bar{V}_b$	Квазилинейный или нелинейный
Ионно–звуковая	$T_e \gg T_i, V_d \gg C_s$	Квазилинейные процессы, образование ионного хвоста, нелинейное рассеяние или уширение резонанса
Анизотропия температуры	$T_{e\perp} > 2T_{e\parallel}$	Изотропизация
Ионно– циклотронная	$V_d > 20\bar{V}_i$ (при $T_e \approx T_i$ )	Ионный нагрев
Циклотронно– пучковая	$V_d > C_s$	Уширение резонанса
Видоизменённая двухпоточковая	$V_d < (1 + \beta)^{1/2} V_A,$ $V_d > C_s$	Захват
Ион–ионная (одинак. пучки)	$U < 2(1 + \beta)^{1/2} V_A$	Захват ионов
Ион–ионная (одинак. пучки)	$U < 2C_s$	Захват ионов



Название	Параметры наиболее неустойчивой моды			
	Скорость роста	Частота	Волновое число	Групповая скорость
Электрон–электронная	$\frac{1}{2}\omega_e$	0	$0.9\frac{\omega_e}{V_d}$	0
Неустойчивость Бьюнмана	$0.7\left(\frac{m}{M}\right)^{1/3}\omega_e$	$0.4\left(\frac{m}{M}\right)^{1/3}\omega_e$	$\frac{\omega_e}{V_d}$	$\frac{2}{3}V_d$
Плазменно–пучковая	$0.7\left(\frac{n_b}{n_p}\right)^{1/3}\omega_e$	$\omega_e - 0.4\left(\frac{n_b}{n_p}\right)^{1/3}\omega_e$	$\frac{\omega_e}{V_b}$	$\frac{2}{3}V_b$
Слабая плазменно–пучковая	$\frac{n_b}{2n_p}\left(\frac{V_b}{\bar{V}_b}\right)^2\omega_e$	$\omega_e$	$\frac{\omega_e}{V_b}$	$\frac{3\bar{V}_e^2}{V_b}$
Плазменно–пучковая (горяч. $e^-$ )	$\left(\frac{n_b}{n_p}\right)^{1/2}\frac{\bar{V}_e}{V_b}\omega_e$	$\frac{V_b}{\bar{V}_e}\omega_e$	$\lambda_D^{-1}$	$V_b$
Ионно–звуковая	$\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}\omega_i$	$\omega_i$	$\lambda_D^{-1}$	$C_s$
Анизотропия температуры	$\Omega_e$	$\omega_e \cos \theta \sim \Omega_e$	$r_e^{-1}$	$\bar{V}_{e\perp}$
Ионно–циклотронная	$0.1\Omega_i$	$1.2\Omega_i$	$r_i^{-1}$	$\frac{1}{3}\bar{V}_i$
Циклотронно–пучковая	$0.7\Omega_e$	$n\Omega_e$	$0.7\lambda_D^{-1}$	$\gtrsim V_d;$ $\gtrsim C_s$
Видоизменённая двухпоточковая	$\frac{1}{2}\Omega_H$	$0.9\Omega_H$	$1.7\frac{\Omega_H}{V_d}$	$\frac{1}{2}V_d$
Ион–ионная (одинак. пучки)	$0.4\Omega_H$	0	$1.2\frac{\Omega_H}{U}$	0
Ион–ионная (одинак. пучки)	$0.4\omega_i$	0	$1.2\frac{\omega_i}{U}$	0

### Условные обозначения:

В вышеприведённых таблицах нижние индексы  $e$ ,  $i$ ,  $d$ ,  $b$ ,  $p$  соответствуют “электронам”, “ионам”, “дрейфу”, “пучку” и “плазме”. Верхней чертой обозначены тепловые скорости.

$m$	масса электрона
$r_e, r_i$	циклотронный радиус
$M$	масса иона
$\beta$	отношение плотностей энергии плазмы/магнитной энергии
$V$	скорость
$T$	температура
$V_A$	скорость Альфвена
$n_e, n_i$	плотность частиц
$\Omega_e, \Omega_i$	циклотронная частота
$n$	номер гармоники
$\Omega_H$	$\Omega_H^2 = \Omega_e \Omega_i$
$C_s = (T_e/M)^{1/2}$	скорость ионного звука
$\omega_e, \omega_i$	плазменная частота
$U$	относительная скорость двух сортов ионов
$\lambda_D$	радиус Дебая

## ЛАЗЕРЫ

### Параметры систем

КПД и доступные мощности — приближённые.<sup>31</sup>

Тип лазера	Длина волны (мкм)	КПД	Дост. мощность (Вт)	
			Импульсн.	Непрер.
СО <sub>2</sub>	10.6	0.01 – 0.02 (имп.)	$> 2 \times 10^{13}$	$> 10^5$
СО	5	0.4	$> 10^9$	$> 100$
Гольмиевый	2.06	0.03†–0.1‡	$> 10^7$	80
Йодный	1.315	0.003	$3 \times 10^{12}$	–
Nd-стекло	1.06	–	$1.25 \times 10^{15}$	–
Nd:YAG	1.064	–	$10^9$	$> 10^4$
Nd:YLF	1.045, 1.54, 1.313	–	$4 \times 10^8$	80
Nd:YVO <sub>4</sub>	1.064	–	–	$> 20$
Er:YAG	2.94	–	$1.5 \times 10^5$	–
*на центрах окраски	1 – 4	$10^{-3}$	$5 \times 10^8$	1
*Ti:Сапфир	0.7 – 1.5	$0.4 \times \eta_p$	$10^{14}$	150
Рубиновый	0.6943	$< 10^{-3}$	$10^{10}$	1
He–Ne	0.6328	$10^{-4}$	–	$1 – 50 \times 10^{-3}$
*на ионах аргона	0.45 – 0.60	$10^{-3}$	$5 \times 10^4$	150
*ОПГ	0.3 – 10	$> 0.1 \times \eta_p$	$10^{10}$	5
N <sub>2</sub>	0.3371	0.001 – 0.05	$10^6$	–
*органический	0.3 – 1.1	$10^{-3}$	$5 \times 10^7$	$> 100$
Kr-F	0.26	0.08	$10^{12}$	500
Ксеноновый	0.175	0.02	$> 10^8$	–
Yb–нить	1.05 – 1.1	0.55	$5 \times 10^7$	$10^4$
Er–нить	1.534	–	$7 \times 10^6$	100
Полупровод- никовый	0.375 – 1.9	$> 0.5$	$3 \times 10^9$	$> 10^3$

\*Подстраиваемые источники †с ламповой накачкой  
‡с диодной накачкой

Nd —неодим; Er —эрбий; Ti —титан; Yb —иттербий;  
YAG —алюмо-иттриевый гранат; YLF —фторид иттрия-лития;  
YVO<sub>4</sub> —ванадат иттрия; ОПГ — Оптический Параметрический  
Генератор;  $\eta_p$  — КПД лазера с накачкой.

## Формулы

У электромагнитной волны с  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$  коэффициент преломления равен

$$n_{\pm} = [1 - \omega_{pe}^2 / \omega(\omega \mp \omega_{ce})]^{1/2},$$

где  $\pm$  относится к направлению круговой поляризации.

В эффекте Фарадея скорость вращения угла поляризации  $\theta$  как функции расстояния  $s$  определяется выражением:

$$d\theta/ds = (k/2)(n_- - n_+) = 2.36 \times 10^4 N B f^{-2} \text{ см}^{-1},$$

где  $N$  — плотность электронов,  $B$  — напряжённость магнитного поля, а  $f$  — частота волны, всё в СГС.

Скорость, соответствующая колебаниям электрона в электромагнитном поле с круговой поляризацией и угловой частотой  $\omega$ , равна

$$v_0 = eE_{\max}/m\omega = 25.6 I^{1/2} \lambda_0 \text{ см/сек},$$

где  $I = cE_{\max}^2/8\pi$  (Вт/см<sup>2</sup>) — интенсивность лазерного излучения, а  $\lambda_0$  — длина волны в мкм. Отношение колебательной к тепловой энергии равно

$$W_{\text{кол}}/W_{\text{T}} = m_e v_0^2 / 2kT = 1.81 \times 10^{-13} \lambda_0^2 I/T,$$

где  $[T] = \text{эВ}$ . Например, если  $I = 10^{15}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\lambda_0 = 1$  мкм,  $T = 2$  кэВ, то  $W_{\text{кол}}/W_{\text{T}} \approx 0.1$ .

Пондеромоторная сила:

$$\mathcal{F} = N \nabla \langle E^2 \rangle / 8\pi N_c,$$

где

$$N_c = 1.1 \times 10^{21} \lambda_0^{-2} \text{ см}^{-3}.$$

При освещении линзы с индексом диафрагмы  $F = \frac{f}{D}$  ( $D$  — диаметр диафрагмы,  $f$  — фокусное расстояние) параллельным пучком света диаметр  $d$  пятна Эйри в фокусе (85% энергии) и глубина фокусировки  $l$  (расстояние вдоль оптической оси между ближайшими минимумами в интенсивности около фокуса) равны

$$d \approx 2.44 F \lambda \quad \text{и} \quad l \approx \pm 2 F^2 \lambda.$$

Эти формулы изменяются при неоднородной освещённости линзы (например, по Гауссу) и для лазерных пучков с профилем неправильной формы.

## ИЗЛУЧЕНИЕ В АТОМНОЙ ФИЗИКЕ

Энергии и температуры даны в эВ; все остальные величины приведены в СГС, если не оговорено противное.  $Z$  — заряд атома;  $N$  — плотность числа частиц,  $n$  — главное квантовое число. Звёздочкой обозначены локально равновесные величины. Так,  $N_n^*$  — локально равновесная плотность атомов (или ионов) на уровне  $n$ .

Характерное сечение столкновения атомов:

$$(1) \quad \pi a_0^2 = 8.80 \times 10^{-17} \text{ см}^2.$$

Энергия связи внешнего электрона на уровне с квантовыми числами  $n, l$ :

$$(2) \quad E_\infty^Z(n, l) = -\frac{Z^2 E_\infty^H}{(n - \Delta_l)^2},$$

где  $E_\infty^H = 13.6 \text{ эВ} = Ry$ , а  $\Delta_l = 0.75l^{-5}$ ,  $l \gtrsim 5$ , — квантовый дефект.

### Возбуждения и переходы

В приближении Бете сечение возбуждения электрона при разрешённом дипольном переходе  $m \rightarrow n$ <sup>32,33</sup>:

$$(3) \quad \sigma_{mn} = 2.36 \times 10^{-13} \frac{f_{mn} g(n, m)}{\epsilon \Delta E_{nm}} \text{ см}^2,$$

где  $f_{mn}$  — “сила осциллятора”,  $g(n, m)$  — множитель Гаунта,  $\epsilon$  — энергия налетающего электрона и  $\Delta E_{nm} = E_n - E_m$ .

Вероятность возбуждения электрона  $X_{mn} = N_e \langle \sigma_{mn} v \rangle$ , усреднённая по максвелловскому распределению скоростей:<sup>34,35</sup>

$$(4) \quad X_{mn} = 1.6 \times 10^{-5} \frac{f_{mn} \langle g(n, m) \rangle N_e}{\Delta E_{nm} T_e^{1/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{nm}}{T_e}\right) \text{ сек}^{-1},$$

где  $\langle g(n, m) \rangle$  — термодинамически усреднённый множитель Гаунта (обычно  $\sim 1$  для атомов,  $\sim 0.2$  для ионов).

Вероятность снятия возбуждения электрона при столкновении:

$$(5) \quad Y_{nm} = (N_m^*/N_n^*) X_{mn}.$$

Здесь  $N_m^*/N_n^* = (g_m/g_n) \exp(\Delta E_{nm}/T_e)$  — соотношение Больцмана для заселённостей уровней,  $g_n$  — статвес уровня  $n$ .

Вероятность спонтанного распада  $n \rightarrow m$  (коэффициент Эйнштейна  $A$ )<sup>34</sup>

$$(6) \quad A_{nm} = 4.3 \times 10^7 (g_m/g_n) f_{mn} (\Delta E_{nm})^2 \text{ сек}^{-1}.$$

Мощность, излучаемая единицей объёма при переходе  $n \rightarrow m$  в оптически тонкой плазме:

$$(7) \quad I_{nm} = 1.6 \times 10^{-19} A_{nm} N_n \Delta E_{nm} \text{ Вт/см}^3.$$

Условие стационарности состояния в модели короны:

$$(8) \quad N_0 N_e \langle \sigma_{0n} v \rangle = N_n A_{n0},$$

где основное состояние обозначено индексом “0”.

Таким образом, при переходе  $n \rightarrow m$  в ионах, где  $\langle g(n, 0) \rangle \approx 0.2$ ,

$$(9) \quad I_{nm} = 5.1 \times 10^{-25} \frac{f_{nm} g_m N_e N_0}{g_0 T_e^{1/2}} \left( \frac{\Delta E_{nm}}{\Delta E_{n0}} \right)^3 \exp \left( -\frac{\Delta E_{n0}}{T_e} \right) \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}.$$

## Ионизация и рекомбинация

В общем нестационарном случае плотность числа ионов с зарядом  $Z$  подчиняется уравнению:

$$(10) \quad \frac{dN(Z)}{dt} = N_e \left[ -S(Z)N(Z) - \alpha(Z)N(Z) + S(Z-1)N(Z-1) + \alpha(Z+1)N(Z+1) \right].$$

Здесь  $S(Z)$  и  $\alpha(Z)$  — объёмные коэффициенты ионизации и рекомбинации соответственно;  $\alpha(Z) = \alpha_r(Z) + N_e \alpha_3(Z)$ , где  $\alpha_r$  и  $\alpha_3$  — скорости соотв. излучательной и трёхчастичной рекомбинации.

Классическое сечение ионизации<sup>36</sup> для атомной оболочки  $j$

$$(11) \quad \sigma_i = 6 \times 10^{-14} b_j g_j(x) / U_j^2 \text{ см}^2.$$

Здесь  $b_j$  — число электронов на оболочке;  $U_j$  — энергия связи электрона на ней;  $x = \epsilon / U_j$ , где  $\epsilon$  — энергия налетающего электрона;  $g$  — универсальная функция с минимальным значением  $g_{\min} \approx 0.2$  при  $x \approx 4$ .

Коэффициент ионизации иона из основного состояния при  $0.02 \lesssim T_e / E_\infty^Z \lesssim 100$ , усреднённый по максвелловскому распределению для электронов<sup>35</sup>:

$$(12) \quad S(Z) = 10^{-5} \frac{(T_e / E_\infty^Z)^{1/2}}{(E_\infty^Z)^{3/2} (6.0 + T_e / E_\infty^Z)} \exp\left(-\frac{E_\infty^Z}{T_e}\right) \text{ см}^3 / \text{сек},$$

где  $E_\infty^Z$  — энергия ионизации.

Скорость излучательной рекомбинации ( $e + N(Z) \rightarrow N(Z-1) + h\nu$ ) при  $T_e / Z^2 \lesssim 400 \text{ эВ}$ <sup>37</sup>:

$$(13) \quad \alpha_r(Z) = 5.2 \times 10^{-14} Z \left(\frac{E_\infty^Z}{T_e}\right)^{1/2} \left[ 0.43 + \frac{1}{2} \ln(E_\infty^Z / T_e) + 0.469 (E_\infty^Z / T_e)^{-1/3} \right] \text{ см}^3 / \text{сек}.$$

При  $1 \text{ эВ} < T_e / Z^2 < 15 \text{ эВ}$  это выражение принимает приближённый вид<sup>35</sup>:

$$(14) \quad \alpha_r(Z) = 2.7 \times 10^{-13} Z^2 T_e^{-1/2} \text{ см}^3 / \text{сек}.$$

Коэффициент трёхчастичной рекомбинации для однократно ионизированной плазмы<sup>38</sup>:

$$(15) \quad \alpha_3 = 8.75 \times 10^{-27} T_e^{-4.5} \text{ см}^6 / \text{сек}.$$

Сечение фотоионизации для ионов на уровне  $n, l$  (в коротковолновом пределе):

$$(16) \quad \sigma_{\text{ph}}(n, l) = 1.64 \times 10^{-16} Z^5 / n^3 K^{7+2l} \text{ см}^2, \text{ где}$$

$K$  — волновое число в ридбергах (1 ридберг =  $1.0974 \times 10^5 \text{ см}^{-1}$ ).

## Модели ионизационного равновесия

Формула Саха<sup>39</sup>:

$$(17) \quad \frac{N_e N_1^*(Z)}{N_n^*(Z-1)} = 6.0 \times 10^{21} \frac{g_1^Z T_e^{3/2}}{g_n^{Z-1}} \exp\left(-\frac{E_\infty^Z(n,l)}{T_e}\right) \text{ см}^{-3},$$

где  $g_n^Z$  — статвес уровня  $n$  в атоме с зарядом  $Z$ , а  $E_\infty^Z(n,l)$  — энергия ионизации нейтрального атома с уровня  $(n,l)$  (Ур. (2)).

В равновесном состоянии с высокой плотностью электронов отношение

$$(18) \quad \frac{N_e N^*(Z)}{N^*(Z-1)} = \frac{S(Z-1)}{\alpha_3}$$

является функцией только от  $T$ .

Условия для локального термодинамического равновесия<sup>39</sup>:

(а) Скорости возбуждения столкновениями и излучением на уровне  $n$  должны удовлетворять условию:

$$(19) \quad Y_{nm} \gtrsim 10A_{nm}.$$

(б) Плотность электронов должна подчиняться неравенству:

$$(20) \quad N_e \gtrsim 7 \times 10^{18} Z^7 n^{-17/2} (T/E_\infty^Z)^{1/2} \text{ см}^{-3}.$$

Условие равновесия в модели короны:

$$(21) \quad \frac{N(Z-1)}{N(Z)} = \frac{\alpha_r}{S(Z-1)}.$$

Она применима, если<sup>40</sup>

$$(22) \quad 10^{12} t_I^{-1} < N_e < 10^{16} T_e^{7/2} \text{ см}^{-3},$$

где  $t_I$  — время ионизации.



## Излучение

Средняя скорость радиационного распада состояния с главным квантовым числом  $n$  равна

$$(23) \quad A_n = \sum_{m < n} A_{nm} = 1.6 \times 10^{10} Z^4 n^{-9/2} \text{ сек.}$$

Естественная ширина линии ( $\Delta E$  в эВ):

$$(24) \quad \Delta E \Delta t = h = 4.14 \times 10^{-15} \text{ эВ сек,}$$

где  $\Delta t$  — время жизни состояния.

Допплеровское уширение:

$$(25) \quad \Delta\lambda/\lambda = 7.7 \times 10^{-5} (T/\mu)^{1/2},$$

где  $\mu$  — масса излучающего атома или иона в единицах массы протона.

Оптическая толщина для доплеровски уширенной линии:<sup>39</sup>

$$(26) \quad \tau = 3.52 \times 10^{-13} f_{nm} \lambda (Mc^2/kT)^{1/2} NL = 5.4 \times 10^{-9} f_{mn} \lambda (\mu/T)^{1/2} NL,$$

где  $f_{nm}$  — “сила осциллятора” при поглощении,  $\lambda$  — длина волны,  $L$  — физическая толщина плазмы;  $M$ ,  $N$ , и  $T$  — масса, плотность числа частиц и температура поглощающего атома или иона;  $\mu = \frac{M}{m_p}$ . Оптически тонкой плазме соответствует  $\tau < 1$ .

Резонансное сечение поглощения в центре линии:

$$(27) \quad \sigma_{\lambda=\lambda_c} = 5.6 \times 10^{-13} \lambda^2 / \Delta\lambda \text{ см}^2.$$

Закон смещения Вина (длина волны, на которую приходится максимум излучения абсолютно чёрного тела):

$$(28) \quad \lambda_{\max} = 2.50 \times 10^{-5} T^{-1} \text{ см.}$$

Интенсивность излучения с поверхности абс. чёрного тела при температуре  $T$ :

$$(29) \quad W = 1.03 \times 10^5 T^4 \text{ Вт/см}^2.$$

Тормозное излучение в водородоподобной плазме<sup>26</sup>:

$$(30) \quad P_{\text{Br}} = 1.69 \times 10^{-32} N_e T_e^{1/2} \sum [Z^2 N(Z)] \text{ Вт/см}^3,$$

где суммирование производится по всем  $Z$ .

Оптическая толщина для тормозного излучения<sup>41</sup>:

$$(31) \quad \tau = 5.0 \times 10^{-38} N_e N_i Z^2 \bar{g} L T^{-7/2},$$

где  $\bar{g} \approx 1.2$  — среднее значение множителя Гаунта и  $L$  — физическая длина пути.

Обратная величина коэффициента поглощения тормозного излучения<sup>42</sup> с угловой частотой  $\omega$ :

$$(32) \quad \kappa = 3.1 \times 10^{-7} Z n_e^2 \ln \Lambda T^{-3/2} \omega^{-2} (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{-1/2} \text{ см}^{-1};$$

здесь  $\Lambda$  — тепловая скорость электрона, делённая на

$$V = \max \{ \omega, \omega_p \} / \max \left\{ Z e^2 / kT, \hbar / (mkT)^{1/2} \right\}.$$

Рекомбинационное (свободно-связанное) излучение:

$$(33) \quad P_r = 1.69 \times 10^{-32} N_e T_e^{1/2} \sum \left[ Z^2 N(Z) \left( \frac{E_\infty^{Z-1}}{T_e} \right) \right] \text{ Вт/см}^3.$$

Циклотронное излучение<sup>26</sup> в магнитном поле  $\mathbf{B}$ :

$$(34) \quad P_c = 6.21 \times 10^{-28} B^2 N_e T_e \text{ Вт/см}^3.$$

При  $N_e kT_e = N_i kT_i = B^2 / 16\pi$  ( $\beta = 1$ , изотермич. плазма)<sup>26</sup>

$$(35) \quad P_c = 5.00 \times 10^{-38} N_e^2 T_e^2 \text{ Вт/см}^3.$$

Время, за которое энергия электрона уменьшается в  $e$  раз за счёт циклотронного излучения<sup>41</sup>:

$$(36) \quad t_c \approx \frac{9.0 \times 10^8 B^{-2}}{2.5 + \gamma} \text{ сек, где } \gamma = \frac{E}{mc^2}.$$

Число циклотронных гармоник<sup>41</sup>, заключённых в среде с конечной толщиной  $L$ :

$$(37) \quad m_{\text{tr}} = (57\beta BL)^{1/6},$$

где  $\beta = 8\pi NkT/B^2$ .

## АТОМНАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ

Спектроскопические обозначения содержат как экспериментальную, так и теоретическую информацию. При наблюдении спектральных линий их можно разделить на группы, в пределах которых расстояния между линиями убывают. Каждую линию можно трактовать теоретически как переход между двумя состояниями, каждое из которых характеризуется своими квантовыми числами.

Степени ионизации обозначаются римскими цифрами. Так, CI — нейтральный атом углерода, CII — однократно ионизованный и т. д. Состояние одноэлектронного атома (H) или иона (HeII, LiIII и т. п.) обозначается с помощью главного квантового числа  $n = 1, 2, \dots$ , орбитального момента  $l = 0, 1, \dots, n - 1$  и проекции спина  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ . Полный момент  $j$  — модуль векторной суммы  $l$  и  $s$ ,  $j = l \pm \frac{1}{2}$  ( $j \geq \frac{1}{2}$ ). Буквам s, p, d, f, g, h, i, k, l, ... сопоставляются орбитальные моменты  $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$  соответственно. Состояния водорода и водородоподобных атомов вырождены: если пренебречь тонкой структурой, их энергии зависят лишь от  $n$  по формуле

$$E_n = -\frac{R_\infty hcZ^2 n^{-2}}{1 + m/M} = -\frac{RyZ^2}{n^2},$$

где  $m$  и  $M$  — массы электрона и ядра, а  $R_\infty = 109,737 \text{ см}^{-1}$  — постоянная Ридберга. Разделив  $E_n$  на  $hc$ , получим результат в волновых числах. Энергия перехода  $m \rightarrow n$  даётся выражением

$$\Delta E_{mn} = Ry(1/m^2 - 1/n^2),$$

где  $m < n$  ( $m > n$ ) для линий поглощения (испускания).

Для водорода и водородоподобных атомов и ионов соответствующие серии линий имеют общепринятые названия:

$1 \rightarrow n$	$2 \rightarrow n$	$3 \rightarrow n$	$4 \rightarrow n$	$5 \rightarrow n$	$6 \rightarrow n$
Лаймана	Бальмера	Пашена	Брэкета	Пфунда	Хэмпфри

Последовательные линии в каждой серии обозначаются буквами  $\alpha, \beta, \gamma$  и т. д. Например, переходу  $1 \rightarrow 3$  соответствует  $\beta$ -линия Лаймана. Эффекты релятивизма и квантовой электродинамики (в частности, лэмбовский сдвиг) и взаимодействие магнитного момента ядра с магнитным полем электронов приводят

к малым сдвигам и расщеплениям уровней,  $\lesssim 10^{-2} \text{ см}^{-1}$ , т. е. к т. н. “сверхтонкой структуре”.

В многоэлектронных атомах электроны образуют оболочки (заполненные полностью или частично), причём, спектроскопические свойства определяются в основном внешними электронами. Энергии на оболочках зависят главным образом от  $n$ ; оболочки, соответствующие  $n = 1, 2, 3, \dots$ , обозначают буквами  $K, L, M, \dots$ . Подоболочки соответствуют различным угловым моментам и определяются значениями  $n, l$  и числом электронов, максимальное значение которого равно  $2(2l + 1)$ . Например, на подоболочке  $2p^5$  находятся 5 электронов с моментом  $l = 1$  (обозначаемым  $p$ ) и  $n = 2$ .

У лёгких элементов электроны в каждой оболочке последовательно заполняют подоболочки  $s, p$  и  $d$ , причём, каждая оболочка начинает заполняться только после полного заполнения предыдущих. Для тяжёлых атомов это правило может нарушаться. Однако, если определённая подоболочка заполнена у инертного газа, то она заполнена и у всех последующих элементов. Ниже приведены основные состояния инертных газов:

He	$1s^2$
Ne	$1s^2 2s^2 2p^6$
Ar	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$
Kr	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6$
Xe	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6$
Rn	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^6$

Щелочные атомы (Li, Na, K и т. д.) напоминают водород: переходы в них описываются числами  $n$  и  $l$  исходного и конечного состояния единственного электрона внешней оболочки (валентного электрона).

В общем случае состояния большинства многоэлектронных атомов описываются чётностью  $(-1)^{\sum l_i}$ , орбитальным моментом  $\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i$ , спином  $\mathbf{S} = \sum \mathbf{s}_i$  и полным угловым моментом  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ , где суммирование производится по всем незаполненным оболочкам (заполненные дают нулевой вклад). В магнитном поле нужно знать ещё и проекции  $M_L, M_S$  и  $M$  векторов  $\mathbf{L}, \mathbf{S}$  и  $\mathbf{J}$  на направление поля. Эти квантовые числа удовлетворяют условиям:  $|M_L| \leq L \leq \nu l, |M_S| \leq S \leq \nu/2$  и  $|M| \leq J \leq L + S$ , где  $\nu$  — число электронов на незаполненной подоболочке. Заглавные буквы  $S, P, D, \dots$  обозначают  $L = 0, 1, 2, \dots$ , по аналогии со случаем одного электрона. Например, основное состояние атома Cl есть  $3p^5 \ ^2P_{3/2}^o$ . Первая часть означает, что имеются 5 электронов на подоболочке с

$n = 3$  и  $l = 1$  (заполненные внутренние подоболочки  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$ , отвечающие конфигурации Mg, обычно опускают). Символ ‘P’ означает, что их суммарный орбитальный момент  $L = 1$ . Префикс ‘2’ соответствует мультиплетности  $2S+1$  (числу состояний с почти одинаковой энергией), что эквивалентно указанию  $S = \frac{1}{2}$ . Нижний индекс  $3/2$  — это значение  $J$ . Верхний индекс ‘o’ означает, что состояние нечётно.

Для возбуждённых состояний обозначения сходны. Например, у He есть состояние  $1s2s\ ^3S_1$ , которое лежит на  $19.72$  эВ ( $159,856\text{ см}^{-1}$ ) выше основного  $1s^2\ ^1S_0$ . Однако, эти “термы” не “взаимодействуют” (переходы между ними не происходят), т.к. это противоречило бы квантовомеханическому правилу отбора по чётности (согласно которому она *должна* изменяться). Для дипольных переходов (единственно возможных в длинноволновом пределе) существуют также следующие правила: может измениться орбитальный момент  $l$  только одного электрона и только на  $\Delta l = \pm 1$ ;  $\Delta S = 0$ ;  $\Delta L = 0, \pm 1$ ;  $\Delta J = 0, \pm 1$  (но не может быть одновременно  $\Delta L = 0$  и  $\Delta J = 0$ ). В частности, в атоме He переход возможен между основным состоянием (с  $S = 0$ ,  $L = 0$ ,  $J = 0$  и нулевой чётностью) и состоянием  $1s2p\ ^1P_1^o$  (с  $S = 0$ ,  $L = 1$ ,  $J = 1$ , чётностью 1 и энергией возбуждения  $21.22$  эВ). Эти правила соблюдаются строго только в лёгких атомах в отсутствие сильного электрического или магнитного поля. Переходы, подчиняющиеся правилам отбора, называют “разрешёнными”; остальные называют “запрещёнными”.

Количество информации, необходимое для полного описания состояния, увеличивается с ростом числа электронов; это отражено в обозначениях. Так<sup>43</sup>, у O II есть разрешённый переход между состояниями  $^2F_{7/2}^o$  и  $2p^2(^1D)3d'\ ^2F_{7/2}$  (а также состояниями, получаемыми при замене  $J$  на  $5/2$  в обоих или одном из этих термов). Здесь в обоих состояниях есть 2 электрона с  $n = 2$  и  $l = 1$ ; заполненные подоболочки  $1s^2 2s^2$  не показаны. Орбитальный момент внешнего ( $n = 3$ ) электрона равен  $l = 1$  в первом состоянии и  $l = 2$  во втором. Штрих указывает, что если бы этот электрон был удалён, получившийся ион находился бы не в основном состоянии. Выражение ( $^1D$ ) даёт мультиплетность и полный орбитальный момент “родительского” терма, т.е. подоболочки, находящейся непосредственно ниже валентной; она одинакова в обоих состояниях. (В более тяжёлых атомах и ионах иногда нужно указывать “прародительские” и т.д. термы.) Другой пример<sup>43</sup> — разрешённый переход из  $2p^2(^3P)3p\ ^2P_{1/2}^o$  (или  $^2P_{3/2}^o$ ) в  $2p^2(^1D)3d'\ ^2S_{1/2}$ , где происходит “переворот спина” (из антипараллельного состояния в параллельное) на подоболочке с  $n = 2, l = 1$ , равно как и изменение  $l$  валентного электрона и

изменение  $L$ .

Сложнее описывается тонкая структура, эффекты Штарка и Зеемана, спектры сильноионизованных и тяжёлых атомов и т.п. Наиболее важное отличие между оптическими и рентгеновскими спектрами состоит в том, что в последних происходят переходы между *внутренними* подболочками, зачастую с участием нескольких электронов.

## ПЫЛЕВАЯ ПЛАЗМА

Пылевую (комплексную) плазму (ПП) можно рассматривать как новое и необычное состояние вещества. Наряду с электронами, ионами и нейтральным газом ПП содержит заряженные микрочастицы. Электростатическое взаимодействие между последними может меняться в широких пределах, так что ПП может находиться в различных фазах — от разреженной (газообразной) до кристаллической. Кинетику ПП можно исследовать напрямую (легко наблюдать отдельные частицы на доступных масштабах времени). ПП интересна как негамильтонова система взаимодействующих частиц и как средство изучения и проверки теории фазовых переходов (в т.ч., скейлинга, самоорганизации и т.п.) в многочастичных системах.

### Типичные параметры пылевых частиц

Размер частиц (радиус)  $a \simeq 0.3 - 30$  мкм, масса  $m_d \sim 3 \times 10^{-7} - 3 \times 10^{-13}$  г, плотность  $n_d \sim \Delta^{-3} \sim 10^3 - 10^7$  см<sup>-3</sup>, температура  $T_d \sim 3 \times 10^{-2} - 10^2$  эВ.

### Типичная газоразрядная плазма

давление газа  $p \sim 10^{-2} - 1$  Торр,  $T_i \simeq T_n \simeq 3 \times 10^{-2}$  эВ,  $v_{T_i} \simeq 7 \times 10^4$  см/сек (Ar),  $T_e \sim 0.3 - 3$  эВ,  $n_i \simeq n_e \sim 10^8 - 10^{10}$  см<sup>-3</sup>, дебаевский радиус  $\lambda_D \simeq \lambda_{Di} \sim 20 - 200$  мкм,  $\omega_{pi} \simeq 2 \times 10^6 - 2 \times 10^7$  сек<sup>-1</sup> (Ar). Магнитные поля до  $B \sim 3$  Т.

### Безразмерные параметры

Хавнеса	$P =  Z n_d/n_e$
зарядовый	$z =  Z e^2/kT_e a$
взаимодействия	$\Gamma = (Z^2 e^2/kT_d \Delta) \exp(-\Delta/\lambda_D)$
решёточный	$\kappa = \Delta/\lambda_D$
размера частиц	$\alpha = a/\Delta$
намагниченности решётки	$\mu = \Delta/r_d$
рассеяния пыль-пыль	$\beta_d = Z^2 e^2/kT_d \lambda_D$

рассеяния пыль–плазма

$$\beta_{e,i} = |Z|e^2/kT_{e,i}\lambda_D$$

Типичные экспериментальные значения:  $P \sim 10^{-4} - 10^2$ ,  $z \simeq 2 - 4$   
 $(Z/e \sim 10^3 - 10^5)$ ,  $\Gamma < 10^3$ ,  $\kappa \sim 0.3 - 10$ ,  $\alpha \sim 10^{-4} - 3 \times 10^{-2}$ ,  $\mu < 1$

### Частоты в пылевой компоненте

плазменная

$$\begin{aligned}\omega_{pd} &= (4\pi Z^2 e^2 n_d / m_d)^{1/2} \\ &\simeq (|Z| \frac{P}{1+P} m_i / m_d)^{1/2} \omega_{pi}\end{aligned}$$

флуктуаций заряда

$$\omega_{ch} \simeq \frac{1+z}{\sqrt{2\pi}} (a/\lambda_D) \omega_{pi}$$

столкновений с газом

$$\nu_{nd} \sim 10a^2 p / m_d v_{Tn}$$

циклотронная

$$\omega_{cd} = ZeB/m_d c$$

### Скорости в пылевой компоненте

тепловая

$$v_{T_d} = (kT_d/m_d)^{1/2} \equiv \left[ \frac{T_d}{T_i} \frac{m_i}{m_d} \right]^{1/2} v_{T_i}$$

звука

$$\begin{aligned}C_{DA} &= \omega_{pd} \lambda_D \\ &\simeq (|Z| \frac{P}{1+P} m_i / m_d)^{1/2} v_{T_i}\end{aligned}$$

Альфвена

$$v_{Ad} = B / (4\pi n_d m_d)^{1/2}$$

звуковое число Маха

$$V/C_{DA}$$

магнитное число Маха

$$V/v_{Ad}$$

звука в твёрдой фазе

$$C_{DL}^{l,t} = \omega_{pd} \lambda_D F_{l,t}(\kappa)$$

Диапазон волновых чисел фононов  $K\Delta < \pi$ . Функции  $F_{l,t}(\kappa)$  для продольных и поперечных волн с точностью  $< 1\%$  при  $\kappa \leq 5$  описываются формулами<sup>44,45</sup>:

$$F_l \simeq 2.70\kappa^{1/2}(1 - 0.096\kappa - 0.004\kappa^2), \quad F_t \simeq 0.51\kappa(1 - 0.039\kappa^2).$$

### Длины

длина свободного пробега

$$L_\nu = v_{T_d} / \nu_{nd}$$

Кулоновский радиус пылинок

$$R_{Ce,i} = |Z|e^2/kT_{e,i}$$

ларморовский радиус пылинок

$$r_d = v_{T_d} / \omega_{cd}$$

### Зарядка пылевых частиц

Процесс зарядки описывается уравнением:  $d|Z|/dt = I_i - I_e$ . Для модели ограниченного орбитального движения (OML)<sup>46</sup> в бес-

столкновительном пределе  $l_{en(in)} \gg \lambda_D \gg a$ :

$$I_e = \sqrt{8\pi} a^2 n_e v_{T_e} \exp(-z), \quad I_i = \sqrt{8\pi} a^2 n_i v_{T_i} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} z\right).$$

Пылевые частицы заряжены отрицательно. В ответ на пространственные и временные колебания в плазме их заряд флуктуирует с частотой  $\omega_{ch}$ . Другими механизмами его изменения являются фотоэффект, вторичная электронная эмиссия, термо- и автоэлектронная эмиссия и т.п. Заряженные пылевые частицы изменяют состав плазмы, сохраняя её квазиэлектронейтральность. Мерой этого является параметр Хавнеса  $P$ . В равновесии, когда  $I_e = I_i$ ,

$$\exp(-z) = \left(\frac{m_e}{m_i} \frac{T_i}{T_e}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} z\right) [1 + P(z)].$$

При большой относительной зарядовой плотности пылевых частиц  $P \gg 1$  их заряд  $Z$  монотонно уменьшается с увеличением  $P$ .

### Силы и перенос импульса

Кроме электромагнитных сил, на пылевые частицы действуют также: сила тяжести  $\mathbf{F}_g = m_d \mathbf{g}$ ; термосила

$$\mathbf{F}_{th} = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{15} (a^2/v_{T_n}) \kappa_n \nabla T_n$$

(где  $\kappa_n$  — газокINETический коэффициент температуропроводности); силы, связанные с передачей импульса от других частиц,  $\mathbf{F}_\alpha = -m_d \nu_{\alpha d} \mathbf{V}_{\alpha d}$ , т.е. трением с ионами, электронами и нейтральными частицами. При столкновениях заряженных частиц различают два предельных случая в зависимости от величины параметра рассеяния  $\beta_\alpha$ . Когда  $\beta_\alpha \ll 1$ , результат не зависит от знака потенциала. При  $\beta_\alpha \gg 1$  есть разница между случаями отталкивания и притяжения. Для типичной пылевой плазмы параметры рассеяния соотносятся так:  $\beta_e (\sim 0.01 - 0.3) \ll \beta_i (\sim 1 - 30) \ll \beta_d (\sim 10^3 - 3 \times 10^4)$ . Характерные выражения для различных типов столкновений имеют вид<sup>47</sup>:

$$\nu_{\alpha d} = (4\sqrt{2\pi}/3) (m_\alpha/m_d) a^2 n_\alpha v_{T_\alpha} \Phi_{\alpha d}$$



Электрон–пылевые столкновения:

$$\Phi_{ed} \simeq \frac{1}{2} z^2 \Lambda_{ed} \quad \beta_e \ll 1$$

Ион–пылевые столкновения:

$$\Phi_{id} = \begin{cases} \frac{1}{2} z^2 (T_e/T_i)^2 \Lambda_{id} & \beta_i < 5 \\ 2(\lambda_D/a)^2 (\ln^2 \beta_i + 2 \ln \beta_i + 2), & \beta_i > 13 \end{cases}$$

Рассеяние пыль–пыль:

$$\Phi_{dd} = \begin{cases} z_d^2 \Lambda_{dd} & \beta_d \ll 1 \\ (\lambda_D/a)^2 [\ln 4\beta_d - \ln \ln 4\beta_d], & \beta_d \gg 1 \end{cases}$$

где  $z_d \equiv Z^2 e^2 / akT_d$ .

При  $\nu_{dd} \sim \nu_{nd}$  пылевая плазма находится в двухвалном состоянии, а при  $\nu_{nd} \gg \nu_{dd}$  мы фактически имеем дело с пробными пылевыми частицами (их взаимодействие с частицами газа преобладает). Сечение переноса импульса пропорционально кулоновскому логарифму  $\Lambda_{\alpha d}$  (когда применима теория кулоновского рассеяния). Он задаётся пределами интегрирования по прицельному расстоянию  $\rho_{\min}$  и  $\rho_{\max}$ .  $\rho_{\min}$  обусловлено конечным размером пылевых частиц и определяется приближением ОМЛ.  $\rho_{\max} = \lambda_D$  для отталкивания (применимо при  $\beta_\alpha \ll 1$ ) и  $\rho_{\max} = \lambda_D(1 + 2\beta_\alpha)^{1/2}$  для притяжения (применимо для  $\beta_\alpha < 5$ ).

Для отталкивания (электрон– и пыль–пылевое взаимодействие)

$$\Lambda_{\alpha d} = z_\alpha \int_0^\infty e^{-z_\alpha x} \ln[1 + 4(\lambda_D/a_\alpha)^2 x^2] dx - 2z_\alpha \int_1^\infty e^{-z_\alpha x} \ln(2x - 1) dx,$$

где  $z_e = z$ ,  $a_e = a$  и  $a_d = 2a$ .

Для притяжения (ион–пылевое взаимодействие)

$$\Lambda_{id} \simeq z \int_0^\infty e^{-zx} \ln \left[ \frac{1 + 2(T_i/T_e)(\lambda_D/a)x}{1 + 2(T_i/T_e)x} \right] dx.$$

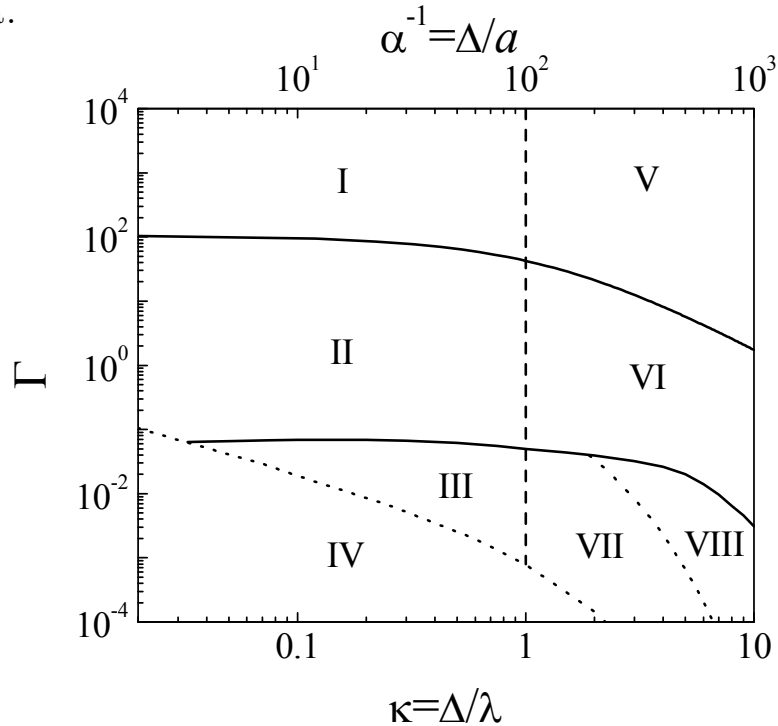
При  $\nu_{dd} \gg \nu_{nd}$  пылевая плазма ведёт себя как однофазная система (пыль–пылевое взаимодействие преобладает).

### Фазовая диаграмма для комплексной плазмы

На рисунке представлены различные фазы ПП как функции параметра электростатического взаимодействия  $\Gamma$  и  $\kappa$  или  $\alpha$ , соответственно. Вертикальная черта при  $\kappa = 1$  условно разделяет систему на кулоновскую и юкавскую части. По сравнению с “обычной” плазмой, пылевая “расположена” главным образом в области с сильной связью (в верхнем левом углу).

Области I и V соответствуют кристаллу, причём, условие кристаллизации<sup>48</sup>  $\Gamma > 106(1 + \kappa + \kappa^2/2)^{-1}$ . Области II и VI — неидеальной плазме, для которой характерный радиус пыль–пылевого взаимодействия (в столкновительном смысле) больше расстояния между пылевыми частицами:  $(\sigma/\pi)^{1/2} > (4\pi/3)^{-1/3}\Delta$ ; этим подразумевается, что взаимодействие существенно многочастичное.

Области III, VII и VIII отвечают идеальному газу — радиус пыль–пылевого взаимодействия меньше межчастичного расстояния, и важны только парные столкновения. Кроме того, в области VIII парное юкавское взаимодействие асимптотически переходит к пределу твёрдых сфер, приводя к “юкавской сыпучей среде”. В области IV электростатическое взаимодействие становится несущественным, и система ведёт себя как обычная сыпучая среда.



## ЛИТЕРАТУРА

Очень полезные сборники, содержащие данные по физике плазмы:

C. W. Allen, *Astrophysical Quantities*, 3rd edition (Athlone Press, London, 1976).

A. Anders, *A Formulary for Plasma Physics* (Akademie-Verlag, Berlin, 1990).

H. L. Anderson (Ed.), *A Physicist's Desk Reference*, 2nd edition (American Institute of Physics, New York, 1989).

K. R. Lang, *Astrophysical Formulae*, 2nd edition (Springer, New York, 1980).

В данном формуляре приведены ссылки на следующие статьи и книги:

1. M. Abramowitz and I. A. Stegun, Eds., *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1968), pp. 1–3, for a tabulation of some mathematical constants not available on pocket calculators.
2. H. W. Gould, "Note on Some Binomial Coefficient Identities of Rosenbaum," *J. Math. Phys.* **10**, 49 (1969); H. W. Gould and J. Kaucky, "Evaluation of a Class of Binomial Coefficient Summations," *J. Comb. Theory* **1**, 233 (1966).
3. B. S. Newberger, "New Sum Rule for Products of Bessel Functions with Application to Plasma Physics," *J. Math. Phys.* **23**, 1278 (1982); **24**, 2250 (1983).
4. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill Book Co., New York, 1953), Vol. I, pp. 47–52 and pp. 656–666.
5. W. D. Hayes, "A Collection of Vector Formulas," Princeton University, Princeton, NJ, 1956 (unpublished), and personal communication (1977).
6. *Quantities, Units and Symbols*, report of the Symbols Committee of the Royal Society, 2nd edition (Royal Society, London, 1975) for a discussion of nomenclature in SI units.

7. E. R. Cohen and B. N. Taylor, "The 1986 Adjustment of the Fundamental Physical Constants," CODATA Bulletin No. 63 (Pergamon Press, New York, 1986); J. Res. Natl. Bur. Stand. **92**, 85 (1987); J. Phys. Chem. Ref. Data **17**, 1795 (1988).
8. E. S. Weibel, "Dimensionally Correct Transformations between Different Systems of Units," Amer. J. Phys. **36**, 1130 (1968).
9. J. Stratton, *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill Book Co., New York, 1941), p. 508.
10. *Reference Data for Engineers: Radio, Electronics, Computer, and Communication*, 7th edition, E. C. Jordan, Ed. (Sams and Co., Indianapolis, IN, 1985), Chapt. 1. These definitions are International Telecommunications Union (ITU) Standards.
11. H. E. Thomas, *Handbook of Microwave Techniques and Equipment* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972), p. 9. Further subdivisions are defined in Ref. 10, p. I-3.
12. J. P. Catchpole and G. Fulford, Ind. and Eng. Chem. **58**, 47 (1966); reprinted in recent editions of the *Handbook of Chemistry and Physics* (Chemical Rubber Co., Cleveland, OH) on pp. F306-323.
13. W. D. Hayes, "The Basic Theory of Gasdynamic Discontinuities," in *Fundamentals of Gas Dynamics*, Vol. III, *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, H. W. Emmons, Ed. (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1958).
14. W. B. Thompson, *An Introduction to Plasma Physics* (Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1962), pp. 86-95.
15. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition (Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1987), pp. 320-336.
16. The  $Z$  function is tabulated in B. D. Fried and S. D. Conte, *The Plasma Dispersion Function* (Academic Press, New York, 1961).
17. R. W. Landau and S. Cuperman, "Stability of Anisotropic Plasmas to Almost-Perpendicular Magnetosonic Waves," J. Plasma Phys. **6**, 495 (1971).
18. B. D. Fried, C. L. Hedrick, J. McCune, "Two-Pole Approximation for the Plasma Dispersion Function," Phys. Fluids **11**, 249 (1968).
19. B. A. Trubnikov, "Particle Interactions in a Fully Ionized Plasma," *Reviews of Plasma Physics*, Vol. 1 (Consultants Bureau, New York, 1965), p. 105.

20. J. M. Greene, “Improved Bhatnagar–Gross–Krook Model of Electron–Ion Collisions,” *Phys. Fluids* **16**, 2022 (1973).
21. S. I. Braginskii, “Transport Processes in a Plasma,” *Reviews of Plasma Physics*, Vol. 1 (Consultants Bureau, New York, 1965), p. 205.
22. J. Sheffield, *Plasma Scattering of Electromagnetic Radiation* (Academic Press, New York, 1975), p. 6 (after J. W. Paul).
23. K. H. Lloyd and G. Harendel, “Numerical Modeling of the Drift and Deformation of Ionospheric Plasma Clouds and of their Interaction with Other Layers of the Ionosphere,” *J. Geophys. Res.* **78**, 7389 (1973).
24. C. W. Allen, *Astrophysical Quantities*, 3rd edition (Athlone Press, London, 1976), Chapt. 9.
25. G. L. Withbroe and R. W. Noyes, “Mass and Energy Flow in the Solar Chromosphere and Corona,” *Ann. Rev. Astrophys.* **15**, 363 (1977).
26. S. Glasstone and R. H. Lovberg, *Controlled Thermonuclear Reactions* (Van Nostrand, New York, 1960), Chapt. 2.
27. References to experimental measurements of branching ratios and cross sections are listed in F. K. McGowan, et al., *Nucl. Data Tables* **A6**, 353 (1969); **A8**, 199 (1970). The yields listed in the table are calculated directly from the mass defect.
28. G. H. Miley, H. Towner and N. Ivich, *Fusion Cross Section and Reactivities*, Rept. COO-2218-17 (University of Illinois, Urbana, IL, 1974); B. H. Duane, *Fusion Cross Section Theory*, Rept. BNWL-1685 (Brookhaven National Laboratory, 1972).
29. J. M. Creedon, “Relativistic Brillouin Flow in the High  $\nu/\gamma$  Limit,” *J. Appl. Phys.* **46**, 2946 (1975).
30. A. B. Mikhailovskii, *Theory of Plasma Instabilities* Vol. I (Consultants Bureau, New York, 1974). The table on pp. 48–49 was compiled by K. Papadopoulos.
31. Table prepared from data compiled by J. M. McMahon (personal communication, D. Book, 1990) and A. Ting (personal communication, J.D. Huba, 2004).
32. M. J. Seaton, “The Theory of Excitation and Ionization by Electron Impact,” in *Atomic and Molecular Processes*, D. R. Bates, Ed. (New York, Academic Press, 1962), Chapt. 11.

33. H. Van Regemorter, "Rate of Collisional Excitation in Stellar Atmospheres," *Astrophys. J.* **136**, 906 (1962).
34. A. C. Kolb and R. W. P. McWhirter, "Ionization Rates and Power Loss from  $\theta$ -Pinches by Impurity Radiation," *Phys. Fluids* **7**, 519 (1964).
35. R. W. P. McWhirter, "Spectral Intensities," in *Plasma Diagnostic Techniques*, R. H. Huddlestone and S. L. Leonard, Eds. (Academic Press, New York, 1965).
36. M. Gryzinski, "Classical Theory of Atomic Collisions I. Theory of Inelastic Collision," *Phys. Rev.* **138A**, 336 (1965).
37. M. J. Seaton, "Radiative Recombination of Hydrogen Ions," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **119**, 81 (1959).
38. Ya. B. Zel'dovich and Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Academic Press, New York, 1966), Vol. I, p. 407.
39. H. R. Griem, *Plasma Spectroscopy* (Academic Press, New York, 1966).
40. T. F. Stratton, "X-Ray Spectroscopy," in *Plasma Diagnostic Techniques*, R. H. Huddlestone and S. L. Leonard, Eds. (Academic Press, New York, 1965).
41. G. Bekefi, *Radiation Processes in Plasmas* (Wiley, New York, 1966).
42. T. W. Johnston and J. M. Dawson, "Correct Values for High-Frequency Power Absorption by Inverse Bremsstrahlung in Plasmas," *Phys. Fluids* **16**, 722 (1973).
43. W. L. Wiese, M. W. Smith, and B. M. Glennon, *Atomic Transition Probabilities*, NSRDS-NBS 4, Vol. 1 (U.S. Govt. Printing Office, Washington, 1966).
44. F. M. Peeters and X. Wu, "Wigner crystal of a screened-Coulomb-interaction colloidal system in two dimensions", *Phys. Rev. A* **35**, 3109 (1987)
45. S. Zhdanov, R. A. Quinn, D. Samsonov, and G. E. Morfill, "Large-scale steady-state structure of a 2D plasma crystal", *New J. Phys.* **5**, 74 (2003).
46. J. E. Allen, "Probe theory – the orbital motion approach", *Phys. Scripta* **45**, 497 (1992).

47. S. A. Khrapak, A. V. Ivlev, and G. E. Morfill, “Momentum transfer in complex plasmas”, Phys. Rev. E (2004).
48. V. E. Fortov *et al.*, “Dusty plasmas”, Phys. Usp. **47**, 447 (2004).