

И. А. АРИМОВИЧ, Р. З. САГДЕЕВ

# ФЛУКУМ ПЛАЗМЫ ФЛУКУМ

АТОМНАЯ

Л. А. АРЦИМОВИЧ, Р. З. САГДЕЕВ

ФИЗИКА  
ПЛАЗМЫ  
ДЛЯ  
ФИЗИКОВ



МОСКВА · АТОМИЗДАТ · 1979

# ПЛАЗМА БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

## § 1.1. Общие сведения о плазме

Плазмой называется ионизованный газ, в котором атомы (все или значительная их часть) потеряли по одному или по несколько принадлежавших им электронов и превратились в положительные ионы. Это только предварительное определение плазмы как особого состояния вещества. В дальнейшем будет дано более точное определение. В общем случае плазма представляет собой смесь трех компонент. Она содержит свободные электроны, положительные ионы и нейтральные атомы (или молекулы). Плазма — это наиболее распространенное состояние вещества в природе.

Солнце и звезды можно рассматривать как гигантские сгустки горячей плазмы. Внешняя часть земной атмосферы представляет собой плазменную оболочку — ионосферу. За пределами ионосфера, в магнитосфере Земли, протягиваются плазмосфера и так называемые радиационные пояса, которые представляют собой своеобразные плазменные образования. В земных условиях в лаборатории и в технике мы встречаемся с плазмой при различных газовых разрядах, так как любой разряд (молния, искра, дуга и т. д.) всегда связан с возникновением плазмы.

В развитии исследований по физике плазмы важными стимулами всегда были перспективы практического применения. Сначала плазма интересовала физиков как своеобразный проводник электрического тока и как источник света. В настоящее время надо рассматривать физические свойства плазмы под другими углами зрения, и тогда плазма представит перед нами в новом облике. Во-первых, плазма — это естественное состояние вещества, нагрев того до очень высокой температуры, и, во-вторых, это динамическая система — объект приложения электромагнитных сил. Новые методы подхода к изучению поведения плазмы органически связаны с большими техническими проблемами, для которых физика плазмы служит научным фундаментом. Важнейшими из них являются управляемый термоядерный синтез и магнитогидродинамическое преобразование тепловой энергии в электрическую. Возможно, что в недалеком будущем физика плазмы глубоко проникнет также в ускорительную технику.

Однако исследование явлений, происходящих в плазме, представляет интерес не только в связи с различными практическими применениями. Плазма — это материальная среда, образованная коллективом частиц, которые взаимодействуют друг с другом по наименее простым законам — с помощью электростатических кулоновских сил. Физик обязан, исходя из известной микроструктуры плазмы, объяснить механизмы различных процессов, которые происходят в этой среде. Исходные теоретические положения в данном случае обладают исключительной прозрачностью. Как правило, мы находимся здесь в рамках классической физики, так как квантовые эффекты для обычной плазмы не играют сколько-нибудь заметной роли.

Главные усилия экспериментальных исследований в настоящее время направлены на разработку методов получения плазмы со все более высокими параметрами: высокой температурой и большой плотностью. Мы сами создаем объект исследований — в высокотемпературную плазму, стараясь обеспечить для нее оптимальные условия существования, при которых плазма находится в квазистационарном, устойчивом состоянии.

Прежде чем изучать этот вопрос дальше, уточним определение понятия плазмы. Электрические силы, связывая разноименные заряды в плазме, обеспечивают ее квазинейтральность, т. е. приблизительное равенство концентрации электронов и ионов. Всякое разделение зарядов, обусловленное смещением группы электронов относительно ионов, должно приводить к возникновению электрических полей, которые стремятся скомпенсировать созданное возмущение; эти поля растут с увеличением концентраций частиц и в случае плотной плазмы могут достигать очень больших значений.

Для оценки напряженности поля, возникающего при нарушении нейтральности плазмы, предположим, что в некотором объеме произошло полное разделение зарядов и внутри этого объема остались только заряды одного знака. Электрическое поле в рассматриваемой области удовлетворяет уравнению Пуассона  $\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi\rho$ , где  $\rho$  — плотность электрического заряда. Если линейные размеры области масштаба  $x$ , а концентрация заряженных частиц в плазме равна  $n$ , то  $\operatorname{div} \mathbf{E} \sim E/x \sim 4\pi n e$ , следовательно,  $E \sim 4\pi ne$ . Потенциал плазмы в области разделения зарядов измеряется на  $\Phi \sim E \sim 4\pi ne^2$ .

Рассмотрим пример. Пусть полностью ионизованная плазма получена из водорода, находящегося первоначально при нормальной температуре и давлении 1 мм рт. ст. В каждом кубическом сантиметре такой плазмы будет  $7 \cdot 10^{16}$  ионов и электронов. Поэтому если резкое нарушение квазинейтральности произойдет в объеме с характерным размером порядка 1 мм, то электрическое поле превзойдет  $10^6$  В/см, и в пределах этого объема возникнет разность потенциалов порядка  $10^9$  В. Ясно, что подобное разделение зарядов совершенно нереально. Даже в гораздо более разрежен-

ной плазме резкое нарушение квазинейтральности в указанных объемах будет немедленно ликвидироваться возникающими электрическими полями. Поле будет выталкивать из объема, где произошла декомпенсация зарядов, частицы одного знака и втягивать в эту область частицы противоположного знака. Однако если выделить в плазме достаточно малый объем, то в нем квазинейтральность может и не сохраниться, так как поле, созданное избыtkom частиц одного знака, окажется слишком слабым для того, чтобы существенно повлиять на движение частиц. При заданных концентрации и температуре плазмы имеется характерный линейный масштаб  $r_D$ , удовлетворяющий следующему условию: если  $x \ll r_D$ , то в пределах объема с линейным размером  $x$  разделение зарядов происходит без существенного влияния на движение частиц, если же  $x \gg r_D$ , то концентрации частиц противоположных знаков в указанном объеме почти одинаковы.

Характерную длину  $r_D$  можно оценить следующим образом. В области с линейным размером  $r_D$  потенциальная энергия заряженной частицы при полном разделении зарядов по порядку величины равна энергии теплового движения частиц  $T^*$ . Итак, можно привести оценку потенциальной энергии:

$$U = e\Phi - 4\pi n e^2 r^2 D - T.$$

Следовательно,

$$r_D \sim (T/4\pi n e^2)^{1/2}.$$

Ту же величину  $r_D$  получаем рассматривая экранирование электрического поля в плазме. Допустим, что в плазму введен «пробный» точечный заряд  $q$ . На достаточно малом расстоянии  $r$  от этого заряда потенциал будет равен  $q/r$ . Однако на больших расстояниях ход потенциальной функции изменится вследствие поляризации плазмы, вызываемой полем заряда  $q$ .

При установившемся статистическом равновесии пространственное распределение электронов и ионов в окрестности пробного заряда определяется законом Больцмана  $n \sim \exp(-U/T)$ . Здесь  $U$  имеет противоположный знак для электронов и ионов. Как нетрудно видеть, возникающая поляризация должна привести к экранировке электрического поля в рассматриваемой области. Вблизи пробного заряда, т. е. при относительно большом абсолютном значении отношения  $U/T$ , концентрация частиц с противоположным знаком заряда более высокая. Это должно привести к резкому ослаблению электрического поля. Расчет, основанный на совместном использовании уравнения Пуассона и закона Больцмана, показывает, что на больших расстояниях от заряда  $q$  потенциал

убывает экспоненциально, а область существования сильного электрического поля вокруг  $q$  ограничена сферой с радиусом порядка  $r_D$ . Характерная длина экранирования впервые введена Дебаэм при рассмотрении сильных электролитов. В дальнейшем это понятие было перенесено в физику плазмы. Величину

$$r_D = (T/4\pi n e^2)^{1/2}$$

принято называть дебаевским радиусом или дебаевской длиной. Если дебаевский радиус характеризует пространственный масштаб областей декомпенсации заряда, то время, в течение которого эти области существуют, можно найти, разделив  $r_D$  на скорость более быстрых частиц (электронов):

$$t \sim r_D/v_e \approx (T/4\pi n e^2)^{1/2} (m_e/T)^{1/2} = (m_i/4\pi n e^2)^{1/2}.$$

Чем выше плотность плазмы, тем меньше масштабы декомпенсации зарядов в пространстве и во времени. Внутри области, занятой плотной и холодной плазмой, нарушения квазинейтральности могут происходить только в пределах достаточно малых объемов.

В редкой и горячей плазме дебаевская длина может оказаться значительно больше размеров области, занятой плазмой. В этом случае реализуется независимое движение электронов и ионов и отсутствует механизм для автоматического выравнивания концентраций зарядов противоположных знаков.

Используя логарифмическую линию о дебаевской длине, уточним определение плазмы как особого состояния вещества. Собрание свободно движущихся разноименно заряженных частиц, т. е. ионов и атомов газа, называется плазмой, если дебаевская длина мала по сравнению с объемом, занимаемым газом. Это определение принадлежит Ленимору, основоположнику учения о плазме.

Следует сделать два замечания о введенных здесь параметрах плазмы — концентрации и температуре.

1. Электронная и ионная концентрации в общем случае не должны быть равны друг другу, так как в плазме могут присутствовать не только однозарядные, но также и многозарядные ионы. Пусть  $n_1$  — концентрация однозарядных ионов,  $n_2$  — концентрация ионов с двойным зарядом и т. д., тогда электронная концентрация  $n_e$  равна  $n_1 + 2n_2 + \dots$  Однако в дальнейшем мы будем интересоваться главным образом случаем, когда концентрации электронов и ионов равны. (Это, в частности, справедливо для чистой водородной плазмы.) Учет влияния многозарядных ионов на основные процессы в плазме обычно не представляет большой трудности.

2. Введение величины  $T$  как температуры плазмы оправдано только тогда, когда средняя кинетическая энергия электронов и ионов одинакова. В общем случае в плазме следует различать по меньшей мере две температуры — электронную  $T_e$  и ионную  $T_i$ . В плазме, которая создается в лабораторных условиях или в приборах,  $T$  обычно значительно превосходит  $T_i$ . Различие между  $T_e$

\* Термовую энергию частиц плазмы естественно измерять в электровольтах. В таком случае и температуру плазмы удобно выражать в электровольтах:  $T(\text{эВ}) = T(\text{град})/11600$ . При таком обозначении температура совпадает с величией, характеризующей тепловую энергию частиц. В дальнейшем под  $T$  будем понимать температуру плазмы, выраженную в электровольтах, а под  $T^*$  — температуру плазмы в кельвинах.

и  $T_i$  обусловлено громадной разницей в массах электрона и иона. Внешние источники электрического питания, с помощью которых создается плазма (при различных формах разряда в газах), передают энергию электронной компоненте плазмы, так как именно электроны являются носителями тока. Ионы приобретают тепловую энергию в результате столкновений с быстро движущимися электронами. При таких столкновениях относительная доля кинетической энергии электрона, которая может быть передана иону, не должна превышать  $4m_e/m_i$ . Средняя доля энергии, передаваемой при столкновении, еще меньше. Поскольку  $m_e \ll m_i$ , то электрон должен испытать большое количество (тысячи) столкновений для того, чтобы полностью отдать имеющейся у него излишок энергии. Поскольку параллельно процессам обмена тепловой энергией между электронами и ионами идет процесс приобретения энергии электронами от источников электрического питания, и одновременно с этим энергия уходит из плазмы вследствие различных механизмов теплопередачи, то при электрическом разряде обычно поддерживается большая разность температур электронов и ионов. Этот перепад, как правило, снижается при увеличении концентрации плазмы, потому что число столкновений между электронами и ионами в заданном объеме плазмы растет пропорционально квадрату концентрации.

При некоторых специальных условиях в сильноионизованной плазме  $T_i$  может значительно превзойти  $T_e$ . Такие условия имеют место, в частности, при кратковременных импульсных разрядах большой мощности, которые приводят к возникновению и последующей кумуляции ударных волн в плазме.

## § 12. Плазменные колебания

Плазма представляет собой среду, в которой легко возбуждаются различные виды колебаний и волн. Рассмотрим наиболее простой вид колебаний, возникающих при микроскопических отклонениях от квазинейтральности. Пусть в некотором месте в плазме или иным способом создается избыток зарядов. Рассмотрим, что при этом произойдет. Прежде всего это сделать на примере плоского слоя плазмы. Под действием «возвращающей» силы движение электронов подчиняется уравнению  $m_e \Delta \ddot{x} = -eE_x = -4m_e \omega^2 \Delta x$ , где  $\Delta x$  — смещение электронов. Отсюда следует, что рассасывание избыточного заряда сопровождается колебаниями с частотой

$$\omega_p = (4\pi n e^2 / m_e)^{1/2}. \quad (1.2)$$

Это так называемые ленгмюровские колебания. В этих колебаниях ионы плазмы практически не участвуют из-за большой массы. В отличие от звуковых колебаний незаряженного газа, где упругая сила — градиент давления, здесь главную роль играют электрические поля, обусловленные декомпенсацией зарядов. Ленгмюровские колебания могут распространяться в плазме в ви-

де волн с частотой  $\omega = \omega_p$ , которая при использованном нами упрощенном подходе оказалась не зависящей от длины волн. Фазовая скорость таких продольных волн равна  $\omega_p/k$ , где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волн. При малых длинах волн (больших значениях  $k$ ) нужно учесть также влияние обычного звукового эффекта, связанного с перепадом давлений в плазме. Для этого обе упругие силы нужно сложить. Нетрудно установить, что квадрат скорости в этом более общем случае равен

$$\omega^2/k^2 = 4\pi n e^2 / m_e k^2 + \partial p_e / \partial r. \quad (1.3)$$

и соответственно

$$\omega^2 = 4\pi n e^2 / m_e + k^2 \partial p_e / \partial r. \quad (1.3a)$$

Здесь  $\rho_e$  — плотность электронного газа ( $\rho_e = n m_e$ ),  $p_e$  — его давление. В такой форме свойства электронных колебаний плазмы были получены еще Ленгмюром. Он исходил из аналогии электронных колебаний плазмы со звуковыми волнами и пользовался уравнениями газодинамики. При вычислении  $\partial p / \partial r$  для адиабатического сжатия Ленгмюр положил в уравнении состояния  $\gamma = c_p / c_v = 5/3$ , считая электронный газ одноатомным. Однако это справедливо лишь при условии, что в процессе колебаний все время успевает устанавливаться равнораспределение тепловой энергии между тремя степенями свободы поступательного движения электронов. Практически в любой плазме за один период колебаний  $2\pi/\omega_p$  электроны не испытывают столкновений, и поэтому равнораспределение не устанавливается. А. А. Власов, пользуясь методом кинетического уравнения, установил, что в действительности  $\gamma = 3$ .

Этот результат можно получить на основании очень простых рассуждений, даже не обращаясь к кинетическому уравнению. Пусть слой газа ограничен двумя параллельными плоскими стенками, расстояние между которыми медленно изменяется. Если столкновения между частицами происходят очень редко, то для компоненты скорости частицы, которая направлена перпендикулярно к стенкам, должно иметь место сохранение адиабатического инварианта  $v_{\perp} l = \text{const}$ , где  $l$  — расстояние между стенками. Это нетрудно доказать, рассматривая отражение частицы от подвижной стенки. Поэтому давление на стенку  $n m v_{\perp}^2$  будет изменяться пропорционально  $l^{-2}$ , а поскольку  $n \sim 1/l$ , то  $p \sim l^{-3}$ , т. е.  $\gamma = 3$ . Фактически это уравнение состояния для адиабатического сжатия одномерного газа. Его можно получить также термодинамическим путем. При указанном значении  $\gamma$  соотношение (1.3) перепишем в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 T_e / m_e. \quad (1.3b)$$

Второе слагаемое в уравнении (1.3b) меньше первого во всех случаях, когда речь идет о длинах волн, достаточно больших по сравнению с дебаевской длиной.

Зависимость частоты колебаний от волнового числа  $k$  (так называемая дисперсионная кривая) изображена на рис. 1.1. При больших  $k$  (коротких  $\lambda$ ) частота асимптотически приближается к линейному закону дисперсии типа звуковой волны в газе электронов.

Существенное влияние на распространение волн в плазме с низкой электронной температурой оказывают столкновения электронов с ионами. При таких столкновениях энергия упорядоченного движения электронов, т. е. энергия волны, уменьшается (происходит затухание волны). Этот обычный механизм затухания проявляется как при распространении через плазму поперечных электромагнитных волн, связанных с электронными колебаниями ленгмюровского типа, так и при прохождении через плазму продольных волн, неожиданный и важный эффект, относящийся к физике ленгмюровских колебаний, был предсказан Л. Д. Ландау. Он обнаружил, что даже в отсутствии столкновений (т. е. сил трения) электронные колебания затухают. Особенно велико затухание для волн с большими  $k$ . Так, волны с  $k > 1/r_D$  затухают столь быстро, что становится вообще бессмыслицей продолжать дисперсионную кривую (см. рис. 1.1) в области таких значений  $k$ . Причина «затухания по Ландау» заключается в обращенном эффекте Бавилова — Черенкова, в результате которого электроны, движущиеся со скоростями, близкими к фазовой скорости волны, поглощают энергию колебаний. Ниже (см. § 1.12) это интересное явление подробно рассмотрено с помощью кинетического уравнения. Здесь же мы разъясним лишь качественную сторону его физического механизма.

На рис. 1.2 изображен потенциальный рельеф ленгмюровской плазменной волны, распространяющейся вдоль оси  $x$  с фазовой скоростью  $v_\Phi$ . Пусть система координат перемещается вместе с волной. В этом случае электрический потенциал можно представить в виде периодической функции  $\Phi(x)$ , не зависящей от времени. Для упрощения анализа мы составили  $\Phi(x)$  из прямоугольных кусков. Электрон, скорость которого в лабораторной системе координат (л. с. к.) равна  $v$ , изображен на рис. 1.2, точкой, двигающейся со скоростью  $v = v_\Phi$ . Рис. 1.2. Схема обмена энергии между

Если  $m_e v^2 / 2 < \epsilon_{\text{фо}}$ , где  $\epsilon_{\text{фо}} — «резонансные» электронами и волной$

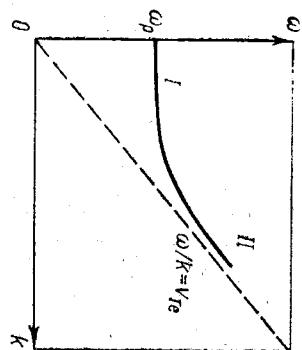


Рис. 1.1. Диисперсионная кривая ленгмюровских колебаний:

I — асимптотическая область,  $k r_D \ll 1$ ; II — область коротких волн

амплитуда электрического потенциала волны, то электрон будет затерп в потенциальной яме между двумя потенциальными горбами. Отражаясь от этих горбов, электрон будет обмениваться энергией с волной. Такие «резонансные» электроны принадлежат к узкому участку спектра скоростей, так как обычно амплитуда потенциала волны, умноженная на заряд электрона, мала по сравнению со средней кинетической энергией теплового движения электрона. Электроны, не принадлежащие к этому участку спектра, испытывают только относительно слабое воздействие поля волны. Резонансные частицы можно разделить на две группы: 1) догоноющие волну ( $v > v_\Phi$ ) и 2) отстающие от волны ( $v < v_\Phi$ ). На рис. 1.2 точка  $M_1$  изображает электрон, принадлежащий к первой группе, а точка  $M_2$  — электрон второй группы. В этой системе координат, движущейся вместе с волной, обе частицы после столкновения с потенциальными горбами изменяют направление скорости (без изменения ее значения). Поэтому в лабораторной системе координат догоняющий электрон после столкновения будет иметь скорость  $v = v_\Phi - v + v_\Phi < v$ , т. е. часть кинетической энергии от электронов будет передана волне. В противоположном случае отстающий электрон после столкновения с горбом волны приобретает дополнительную энергию. При максвелловском распределении электронов в плазме по скоростям догоняющих частиц меньше, чем отстающих, и поэтому суммарный эффект взаимодействия резонансных частиц с волной должен заключаться в перекачке энергии волны в энергию теплового движения, что должно привести к затуханию колебаний. Очевидно, что чем больше концентрация резонансных частиц, тем более сильным должно быть затухание. При максвелловском распределении по скоростям оно должно быстро возрастать с уменьшением  $v_\Phi$ . Фазовая скорость волны падает с уменьшением длины волны, и для длин волн, меньших лебавского радиуса  $r_D$ , она оказывается порядка тепловой скорости электронов  $v_{te}$ . В этом случае (область  $II$  на рис. 1.1) затухание становится настолько сильным, что волны не могут распространяться в плазме. В противоположном случае, при  $v_\Phi \gg v_{te}$ , число резонансных частиц экспоненциально уменьшается, и затухание должно быть очень слабым.

Приведем грубую оценку скорости изменения амплитуды волны. Эта величина характеризуется так называемым декрементом затухания — логарифмической производной по времени от энергии волны  $\gamma = (1/2W)dW/dt$ , где  $W$  — энергия волны в единице объема.

При одном столкновении электрон первой группы (опережающей волну) теряет энергию:

$$\Delta \omega_e = m_e v^2 / 2 - m_e (2\omega/k - v)^2 / 2 = 2m(v - \omega/k)_0 / k$$

Число столкновений с потенциальными горбами волны, которое один электрон испытывает за 1 с, равно скорости движения элек-

трана относительно волны, деленной на расстояние между горбами  $\lambda$ .

Электрон, опережающий волну, передает ей в единицу времени энергию  $2m_e(v - \omega/k)^2 f_0(k)/k$ . Энергия, которую получает электрон, отстающий от волны, определяется таким же выражением.

Суммируя по всем электронам, захваченным волной  $E_0 \sin kx$ , находим, что изменение энергии волны определяется выражением

$$dW/dt = (2m_e\omega/k) \int_{\omega/k}^{\omega/k} (v - \omega/k)^2 f_0(v) dv -$$

$$- (2m_e\omega/k) \int_{\omega/k}^{\omega/k} (v - \omega/k)^2 f_0(v) dv. \quad (1.4)$$

Здесь  $f_0(v)$  — равновесная функция распределения электронов по компоненте скорости в направлении распространения волны, так что  $f_0(v)dv$  — число электронов со скоростями в интервале  $v, v + dv$ . Считая, что  $E_0$  мала и, следовательно,  $\omega$  незначительно отличается от  $\omega/k$ , можно представить  $f_0(v)$  в виде

$$f_0(v) = f^*(\omega/k) + df^*/dv|_{v=\omega/k} (v - \omega/k).$$

Подставляя это выражение в (1.4) и интегрируя, получаем

$$dW/dt = (2e^2/m_e)(\omega/k^2) E_0^2 df^*/dv|_{v=\omega/k}. \quad (1.5)$$

Для определения инкремента надо вычислить энергию, запасенную в волне. Энергия волны, приходящаяся на единицу объема,

$$W = \bar{E}^2/8\pi + nm_e \overline{v_e^2}/2,$$

где  $\bar{E}^2$  — среднее значение квадрата напряженности электрического поля;  $\overline{v_e^2}$  — средний квадрат скорости электронов в волне. Средние значения потенциальной и кинетической энергии при продольных колебаниях электронов приближительно равны. Следовательно,  $W = \bar{E}^2/4\pi$ . Из (1.5) получим выражение для инкремента

$$\gamma \sim (4e^2\omega/m_e k^2) df^*/dv|_{v=\omega/k}.$$

Для продольных плазменных волн  $\omega \approx \omega_p$ , и окончательно имеем

$$\gamma \sim (\omega_p^2/k^2) \frac{1}{n} df^*/dv|_{v=\omega/k}.$$

Продольные ленгмюровские колебания следует учитывать при рассмотрении спектра теплового (черного) излучения плазмы. Вклад этих колебаний в равновесную энергию плазменного состояния можно учесть по порядку величины, если положить на каждую степень свободы  $T/2$  и принять (как это делается в теории излучения) число степеней свободы равным объему в физическом пространстве волновых чисел. Поскольку из-за затухания

Ландау существует граница значений волновых чисел  $k_m \sim 1/\lambda$ , такая, что колебания с волновыми числами выше нее не могут раскачиваться, то фазовый объем  $V_{\text{фаз}} \approx 1/r^3$ . Поэтому энергия колебаний на единицу объема  $W_{\text{фаз}} \approx (1/r^3)T/2$ . Такая оценка справедлива, так как  $\lambda \ll \lambda_D$ , и поэтому для электронных колебаний соблюдается статистика Рэлея — Джинса.

Все сказанное выше относится к случаю, когда распределение электронов термодинамически равновесно, т. е. спектр скоростей подчиняется закону Максвелла. Если же распределение электронов по скоростям хотя бы на небольшом участке спектра сильно отклоняется от равновесного, то становится возможной раскачка колебаний до очень большой амплитуды, т. е. в этом случае может иметь место один из видов неустойчивости плазмы.

Из элементарного анализа механизма затухания волн, который был сделан выше, следует, в частности, что раскачка колебаний может возникнуть, если функция распределения электронов по скоростям имеет в некоторой области значений максимум. В этом случае для волн с фазовыми скоростями, несколько меньшими скорости, соответствующей максимуму функции распределения, среди резонансных частиц будет преобладать группа «догоняющих» волн:  $df^*/dv|_{v=v_p} > 0$ .

При сильной раскачке колебания могут играть большую роль в динамике плазменных процессов. Иногда такую плазму полезно рассматривать даже как смесь двух газов: собственных частиц плазмы (электронов и ионов) и квазичастиц — колебаний. Такой подходложен в основу современной трактовки многих турбулентных явлений (см. § 1.15—1.18). В газе «квазичастиц» кроме ленгмюровских колебаний иногда нужно учитывать также и другие виды колебаний, в частности низкочастотные. В плазме без магнитного поля — это продольные колебания ионов. По существу, колебания, в которых принимает участие вся масса вещества в плазме, представляют собой не что иное, как распространение звука со скоростью  $c_s = (\partial p / \partial \rho)^{1/2}$ . Как известно, в обычном газе звуковые колебания имеют смысл лишь в том случае, если длина звуковой волны значительно больше средней длины свободного пробега атомов или молекул. Оказывается, что в плазме из-за наличия дальнодействующих кулоновских сил (которые образуют так называемое самосогласованное поле) могут существовать звуковые колебания также и в противоположном предельном случае, т. е. тогда, когда длина звуковой волны значительно меньше длины свободного пробега. Звуковые колебания в плазме без магнитного поля рассмотрены в § 1.11.

### § 1.3. Классификация видов плазмы

С помощью введенных понятий о дебаевской длине и плазменной частоте можно классифицировать встречающиеся в природе плазмы на разреженные и плотные, классические и квантовые.

Внутренняя энергия плазмы складывается из кинетических энергий ионов и электронов и из энергии их электростатического кулоновского взаимодействия (в плазме, нагретой до релятивистских температур, нужно учитывать и магнитное взаимодействие). Сравним среднюю кинетическую энергию  $(3/2)T$ , приходящую на одну частицу, со средней энергией взаимодействия. Из-за лебавского экранирования взаимодействие заряженной частицы с далекими частицами несущественно, и надо учитывать в основном лишь ближайших соседей. Среднее расстояние до соседней частицы  $r \sim (1/n)^{1/3}$ , следовательно, энергия взаимодействия приблизительно равна  $e^2 n^{1/3}$ . Поэтому, как правило, плазму можно считать идеальным газом, если  $e^2 n^{1/3} \ll T$ . Если обе части неравенства违背и в степень  $3/2$ , то, как легко заметить, неравенство примет следующий вид:  $n r^3 \gg 1$ . Таким образом, условие идеальности плазмы можно записать через число частиц в объеме с размерами порядка лебавской длины. Это число должно быть много больше единицы\*. При  $n r^3 \gg 1$  тепловая энергия частиц превышает как энергию электростатического взаимодействия, так и равновесную энергию электронных колебаний плазмы. Если указанное условие не выполнено, плазма уже не является газом, а скорее напоминает жидкость с, вообще говоря, очень сложным и до сих пор неизвестным уравнением состояния. При дальнейшем повышении плотности плазмы можно ожидать ее металлизации. При больших плотностях в плазме должны проявляться также и квантовые эффекты. Сначала их следует учитывать в лентмюровских колебаниях. Очевидно, это должно произойти тогда, когда квант энергии плазменных колебаний станет сравнимым со средней тепловой энергией, приходящейся на один электрон. При этом условии длина волны де-Броиля для электронов со скоростями порядка средней теттевой оказывается сравнимой с лебавским радиусом. Еще раньше, когда будет выполнено условие  $\hbar/m_{\text{эл}} \sim 1/n^{1/3}$ , т. е. длина волны де-Броиля будет сравнима со средним расстоянием между электронами, квантовой становится статистика электронов (распределение Ферми — Дирака вместо болцмановского). Это так называемая квантовая вироденная плазма.

В квантовой плазме начинают играть роль обменные взаимодействия, и вид дисперсионного уравнения для плазменных волн (135) несколько меняется:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + (3/5)(1 - \alpha r_s) k^2 v_F^2.$$

Здесь  $v_F$  — скорость Ферми;  $\alpha$  — численный коэффициент ( $\sim 0,06$ );  $r_s$  — безразмерный параметр, характеризующий отношение энергии взаимодействия к энергии Ферми.

\* При более строгом анализе следовало бы учесть, что входят в энергию кулоновского взаимодействия порядка  $e^2 n^{1/3}$  за счет притяжения и отталкивания взаимно погашаются. Однако окончательный критерий идеальности  $n r^3 \gg 1$  остается справедливым.

Согласно принципу Паули два электрона с одинаковыми спинами не могут находиться в одной и той же точке пространства, поэтому потенциальная энергия взаимного электростатического отталкивания электронов, а значит, и возвращающая сила в плазменных колебаниях несколько уменьшается. Однако, поскольку обменные силы короткодействующие, они не могут изменить частоту лентмюровских волн с бесконечной длиной волнового вектора. Подавляющее большинство плазм в природе можно считать идеальным газом (космическая, газоразрядная и т. п.). Примером неидеальной плазмы могут служить сильные электролиты. Наиболее интересными из них являются растворы щелочных металлов в аммиаке, где хорошо прослеживается переход к жидкому плазменному состоянию и металлизации. Представителем квантовой плазмы можно считать электронный газ в металлах: при плотности конденсированного вещества ( $n_e \sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$ ) квант энергии плазменных колебаний по порядку величины оказывается равным единицам электронвольт. Квантовыми свойствами может обладать и плазма, состоящая из электронов и положительно заряженных квазичастич — дырок в полупроводниках. Виды плазмы такого рода принято обединять под названием плазма твердого тела. Явление квантового вырождения должно иметь место и для электронного газа в очень плотном веществе звезд — белых карликов.

Свойства плазмы усложняются, если одновременно с заряженными частицами (ионами и электронами) в ней существуют также нейтральные атомы и молекулы, т. е. плазма не является полностью ионизованной.

Степень ионизации плазмы — отношение числа заряженных частиц к первоначальному числу атомов — определяется конкуренцией между процессами ионизации (разрыва атомов) и обратным процессом рекомбинации, т. е. воссоединения электронов и ионов в нейтральные частицы. В термодинамической равновесной плазме степень ионизации не зависит от деталей этих процессов, и, в принципе, ее можно установить чисто термодинамическим путем. Наиболее просто законы термодинамики выглядят для идеальной плазмы, т. е. такой, в которой кинетическая энергия заряженных частиц значительно превышает энергию их взаимодействия. Допустим, что мы имеем дело лишь с однократной ионизацией. Согласно общим принципам статистической физики отношение вероятностей нахождения электрона в состояниях с энергией  $w_1$  и  $w_2$  при заданной температуре  $T$  равно

$$(g_1/g_2) \exp [(-w_1 + w_2)/T]. \quad (1.6)$$

Здесь  $g_1$  и  $g_2$  — квантовые веса состояний с энергиями  $w_1$  и  $w_2$  соответственно. Степень ионизации газа, т. е. отношение числа свободных электронов к числу нейтральных атомов, определяется вы-

ражением (1.6), в котором следует положить  $w_1 = w_2 = I$ , где  $I$  — энергия ионизации.

В этом случае  $g_1$  — число квантовых ячеек в фазовом пространстве для свободного электрона;  $g_2$  — квантовый вес стационарного энергетического уровня в атоме. Если для простоты не учитывать возможность перехода электрона на возбужденные уровни атома и предположить, что основное состояние является невырожденным, то  $I$  — энергия ионизации для основного состояния и  $g_2 = 1$ . Свободные электроны имеют сплошной спектр по энергиям. Квантовый вес свободных состояний приблизительно равен объему фазового пространства для электрона со средним тепловым импульсом  $(2m_e T)^{1/2}$ , деленному на элементарный фазовый объем:

$$g_1 \approx (2m_e T)^{3/2} V_0 / (2\pi\hbar)^3.$$

В этом выражении  $V_0$  — геометрический объем, приходящийся на один электрон, т. е.  $V_0 = 1/n_e$ . Следовательно,

$$g_1 \approx [1/n_e (2\pi\hbar)^3] (2m_e T)^{3/2}.$$

Используя этот результат, мы получаем так называемую формулу Саха, которая определяет зависимость степени ионизации газа от температуры:

$$n_e/n_a = (g_1/g_2) \exp(-I/T) \approx [(2m_e T)^{3/2} / n_e (2\pi\hbar)^3] \exp(-I/T). \quad (1.7)$$

В другой записи (более удобной для вычисления отношения  $n_e/n_a$  при слабой степени ионизации) формула (1.7) приобретает вид

$$n_e/n_a \approx [(2m_e T)^{3/4} / n_a^{1/2} (2\pi\hbar)^{3/2}] \exp(-I/2T). \quad (1.7a)$$

Из формулы Саха следует, что чем меньше плотность (т. е. концентрация атомов) газа, тем легче его ионизовать. При плотностях, значительно меньших плотности конденсированного вещества, высокая степень ионизации достигается еще при температурах  $T \ll I$ . Но при слишком малых плотностях труднее достичнуть термодинамического равновесия, потому что реже происходят столкновения между частицами, устанавливающие равнораспределение по степеням свободы. В термодинамически неравновесных плазмах для определения степени ионизации приходится рассматривать специфику процессов столкновений, приводящих к ионизации и рекомбинации. Рассмотрение подобных вопросов в настоящей книге уело бы нас слишком далеко от поставленной цели.

Общепринято также делить плазму на высоко- и низкотемпературную. Это разделение в значительной степени связано с видами конкретных исследований и их приложений. Так, с высокотемпературной плазмой связаны исследования по проблеме управляемого термоядерного синтеза. Именно эти исследования стимулировали бурный расцвет физики высокотемпературной плаз-

мы в 50—60-х годах, позволивший объяснить многие явления в физике радиационных поясов, и в некоторых новых областях астрофизики. Низкотемпературная плазма является рабочим телом — газообразным проводником для магнитогидродинамических генераторов.

Холодную плазму в ионосфере можно рассматривать как одну из природных форм реализации низкотемпературной плазмы. Изложенную классификацию плазм удобно проиллюстрировать диаграммой (рис. 1.3). Поскольку интересы авторов относятся, главным образом, к большим  $T$ , книга практически посвящена физике горячей, полностью ионизованной плазмы.

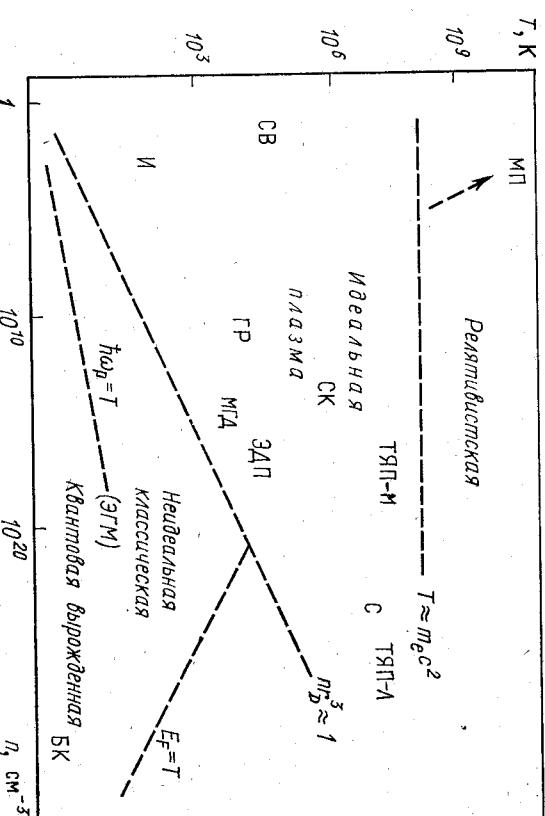


Рис. 1.3. Классификация видов плазм:

$T$  — плазма газового разряда;  $MГД$  — плазма в магнитогидродинамических генераторах;  $ГР$  — плазма в термоядерных магнитных ловушках;  $ЭГМ$  — плазма в условиях лазерного термоядерного синтеза;  $ЭДП$  — электронно-диодная плазма;  $И$  — плазма полупроводников;  $БК$  — электронный газ в белых кариках;  $И$  — плазма ионосферы;  $СВ$  — плазма солнечного ветра;  $СК$  — плазма солнечной короны;  $С$  — плазма в центре Солнца;  $МП$  — плазма в магнитарах

Широкое использование численных методов в физике плазмы, первоначально служившее подспорьем при анализе экспериментов и их сопоставлении с теорией, сейчас привело к самостоятельному направлению, имеющему дело с так называемой численной плазмой. Прямые решения на быстродействующих вычислительных машинах уравнений движения  $N$  взаимодействующих заряженных частиц часто называют численными экспериментами. В некоторых случаях  $N$  удается довести до  $10^6$ .

## § 1.4. Столкновения частиц в плазме

Проанализируем общую картину движения электронов и ионов в плазме при отсутствии внешних полей. Характер этого движения определяется законами взаимодействия частиц. В плазме с высокой степенью ионизации основная форма взаимодействия частиц — рассеяние в кулоновском поле. Нужно различать три основных типа элементарных актов рассеяния: рассеяние электронов на ионах, электронов на ионах и ионов на ионах. Другие элементарные процессы происходят либо с излучением фотонов (они будут рассмотрены в § 1.8), либо в них участвуют также и нейтральные частицы (и тогда они отступают на задний план по мере повышения степени ионизации). Примером процессов первого рода может служить испусжение тормозного излучения при электрон-ионных столкновениях, примером второго — процессы ионизации и возбуждения атомов электронным ударом и явления перезарядки ионов на атомах. Если рассматривается неводородная плазма, то в общем случае следует учитывать взаимодействие электронов с ионами, находящимися в различных энергетических состояниях. В этом случае интенсивность излучения возбужденных ионов может оказаться очень большой, она будет играть заметную роль в энергетическом балансе плазменных процессов.

Мы ограничимся, в основном, анализом взаимодействия частиц в полностью ионизованной плазме.

Пусть через плазму проходит некоторая «пробная» частица (в качестве таковой мы можем выбрать любой электрон или ион плазмы, зафиксировав внимание на его траектории). Эта заряженная частица испытывает акты рассеяния на своем пути. Если речь идет о движении легкой частицы среди совокупности тяжелых частиц (электрона среди ионов), то центры рассеяния можно считать неподвижными. В указанном случае вероятность рассеяния на тот или иной угол определяется классической формулой Резерфорда.

Каждый акт рассеяния, обусловленный пролетом пробной частицы мимо рассеивающего центра, приводит к повороту траектории частицы на некоторый угол  $\theta$ , т. е. к уменьшению скорости по первоначальному направлению движения от  $v$  до  $v \cos \theta$ . В поглощающем большинстве случаев акты рассеяния происходят на дальних дистанциях, т. е. при больших расстояниях, и, следовательно, как правило, сопровождаются очень малым изменением направления траектории (характерная особенность резерфордовского рассеяния в электрическом поле точечных зарядов!). Поэтому привычная для кинетической теории газов изломанная траектория частицы, состоящая из отдельных прямолинейных участков — пробегов, которые соединяют места «столкновений», в данном случае не имеет смысла. Вместо этого появляется картина плавно извивающейся линии, направление ее изменяется под действием многочисленных, но вместе с тем очень слабых импуль-

сов, обусловленных «столкновениями» с другими частицами. Фактически эти импульсы сливаются в непрерывный ряд воздействий, оказываемых на движущуюся частицу «микрополем» плазмы, об разуемым суперпозицией электрических полей отдельных частиц.

В рассматриваемом случае естественно ввести понятие о длине свободного пробега  $l$  как о расстоянии, на протяжении которого частица сохраняет первоначальное направление своей скорости. Это определение соответствует следующему равенству:

$$dv = -v dx / l. \quad (1.8)$$

Здесь  $dv$  — среднее изменение компоненты скорости по первоначальному направлению движения при прохождении отрезка пути  $dx$ . С учетом  $dx = v dt$  (1.8) можно переписать в виде уравнения движения с некоторой эффективной силой трения:

$$mdv/dt = -mv(v/l) = -mv\theta, \quad (1.8a)$$

где введенную таким образом величину  $\theta = v/l$  называют частотой столкновений.

Пользуясь определением (1.8а), можно представить  $l$  с помощью интеграла по угловому распределению рассеянных частиц. Если вектор скорости поворачивается при столкновении на угол  $\theta$ , то проекции скорости по первоначальному направлению движения уменьшается на величину  $\Delta v = v(1 - \cos \theta)$ . Поскольку основную роль играют акты рассеяния на малые углы ( $\theta \ll 1$ ), то изменение скорости при элементарном столкновении можно представить как  $\Delta v \approx \theta b^2/2$ . Суммарное изменение скорости из-за рассеяния на нескольких центрах  $\Delta v_{\text{ср}} = (v/2) \sum \theta^2$ , где суммирование проводится по всем  $N$  рассеивающим центрам. При прохождении элементарного отрезка пути  $dx$  заряженная частица встречается с  $ndx$  рассеивающими центрами, находящимися на всех возможных прицельных расстояниях. Поэтому элемент площади  $ds = 2\pi b db$ , тем более что элементарный угол рассеяния  $\theta$  можно выразить с помощью прицельного расстояния  $b$  как  $ds = 2\pi b db$ , тем более что элементарный угол рассеяния  $\theta$  зависит именно от  $b$ . Для малых углов рассеяния  $\theta$  справедливо соотношение  $\theta \approx v_{\perp}/v$ , где  $v_{\perp}$  можно найти с помощью компоненты уравнения движения, перпендикулярной к направлению начальной скорости:

$$mv_{\perp} \approx Ze^4/(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}.$$

Здесь мы предположили, что траектория пробной частицы представляет собой почти прямую линию, а расстояние наибольшего сближения практически совпадает с прицельным параметром. Отсюда

$$v_{\perp} \approx (2Ze^4/m) \int_0^\infty [b/(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}] dt = 2Ze^4/m v.$$

т. е.  $\theta \approx 2Ze^2/mv^2$ . Следовательно, средняя величина

$$\bar{dv} = -dxnv2\pi \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \theta^2 db = -dxnv(4\pi Z^2 e^4/m^2 v^4) \ln(b_{\max}/b_{\min}). \quad (1.9)$$

Сравнивая (1.9) с формулой (1.8), получаем

$$l = (1/4\pi n)(mv^2/Ze^2)^2 [1/\ln(b_{\max}/b_{\min})]. \quad (1.10)$$

Величины  $b_{\max}$ ,  $b_{\min}$  оценим исходя из следующих соображений. Электрическое поле рассеивающего центра можно считать кулоновским только на расстояниях, меньших лебаевского радиуса  $r_D$ . На больших расстояниях оно убывает экспоненциально, и, следовательно, столкновения, при которых частица проходит мимо рассеивающего центра на расстояниях, превышающих  $r_D$ , нужно изображать вокруг движущегося заряда лишь в грубом приближении можно считать сферическим. В действительности, конечно, лебаевское такого облака — имеет тот же порядок величины, что и время пролета зарядом со средней тепловой скоростью расстояния, сравнимого с радиусом облака. Но строгая теория приводит к небольшому количественному уточнению окончательного выражения для длины свободного пробега. Поэтому при вычислении  $l$  используем указанный метод обрезания предельного параметра  $b_{\max}$  на величину  $r_D$ .

В качестве  $b_{\min}$  можно взять прицельное расстояние, отвечающее рассеянию на углы  $\theta \sim 1$ , при которых нарушилось бы приближение малых углов. Полагая  $\theta \sim 1$ , находим

$$b_{\min} \sim Ze^2/mv^2. \quad (1.11)$$

Поскольку стоящая под знаком логарифма в (1.10) величина, которая получена таким образом для актов взаимодействия,ящих интерес случаях от  $10^4$  до  $10^8$ , то приближительность оценки  $b_{\max}$  и  $b_{\min}$  практически не отражается на точности вычисления  $l$ \*. Предположения, при которых найдено выражение для длины свободного пробега  $l$ , выполняются в случае, когда пробной частицей является электрон и рассматривается его взаимодействие с ионами плазмы. Среднюю длину свободного пробега, соответствующую электрон-ионным столкновениям в плазме, обозначим  $l_{ei}$ . Ее получают при усреднении выражения (1.10) по энергетическому спектру электронов. Если все ионы в плазме имеют единичный заряд, то, предполагая максвелловское распределение электронов по энергиям, получаем следующее выражение для средней длины свободного пробега:

\* Более строгое рассмотрение, учитывающее квантовые эффекты в кулоновском рассеянии, при условии  $Ze^2/hv < 1$  (квазиклассическое приближение, нарушено) приводит к видоизмененному выражению под знаком логарифма. Вместо  $b_{\min}$  появляется длина волны де-Броиля  $\hbar/mv$ . Однако численно изменение значения логарифма незначительно.

$l_{ei} = 4,5 \cdot 10^5 (T_e)^2 / n L_K, \quad (1.12)$

где  $T_e$  — температура электронов,  $K$ ;  $L_K$  — так называемый кулоновский логарифм. Он получается при установке в выражение  $\ln(b_{\max}/b_{\min})$  значений  $b_{\max} = r_D$ ,  $b_{\min} = q_e q_i / m_e v^2$  и  $m_e v^2 = 3T_e$ ,  $q_e = -q_i = -e$ . В очень широких пределах изменения  $n$  и  $T_e$  логарифм  $L_K$  изменяется от 10 до 20. Поскольку в физике плазмы часто достаточно даже довольно грубой оценки величин, характеризующих процессы столкновений между частицами, то в дальнейшем будем считать  $L_K = 15$ .

Кроме  $l_{ei}$  можно ввести также некоторые другие усредненные характеристики процессов столкновения между электронами и ионами. Эффективное сечение для таких столкновений определяется соотношением  $l_{ei} = 1/n \tau_{ei}$ , среднее время между двумя соударениями  $\tau_{ei} = l_{ei} / v_{te}$ , где  $v_{te}$  — средняя тепловая скорость электронов. Частота столкновений  $v_{te} = 1/\tau_{ei}$ . Указанные величины можно вычислить по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ei} &\approx 3 \cdot 10^{-6} (1/(T_e^2)); \quad \tau_{ei} \approx 5 \cdot 10^{-2} (T_e^{3/2}) / n; \\ v_{te} &\approx 20 (n/(T_e^2))^{3/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Выражения для всех указанных параметров нетрудно обобщить на случай, когда столкновения происходят с многозарядными ионами. Эффективное сечение  $\sigma_{ei}$  возрастает в этом случае пропорционально квадрату заряда иона, соответственно изменяется и остальные величины.

Среди различных видов взаимодействия частиц в плазме столкновения между электронами и ионами играют наиболее важную роль, определяя, в частности, механизм таких процессов, как протекание электрического тока и дифузию.

Для полной характеристики кулоновского взаимодействия частиц в плазме нужно ввести такие же параметры, характеризующие статистический эффект столкновений между идентичными частицами (электрон-электронные и ион-ионные столкновения). В этом случае расчет усложняется тем, что при анализе элементарных актов столкновения нужно учитывать движение рассеивавших центров. Однако очевидно, что учет эффекта может отразиться только на значении численного коэффициента в формулах для средней длины свободного пробега, а температурная зависимость должна иметь одинаковый характер. В частности, выражение для  $l_{ee}$  (средняя длина свободного пробега при электронных столкновениях) должно совпадать с выражением для  $l_{ei}$  с точностью до численного коэффициента, не очень сильно отличающегося от единицы. Формула для  $l_{ii}$  (средняя длина свободного пробега при ион-ионных столкновениях) получается из формулы для  $l_{ei}$  при замене  $T_e$  на  $T_i$ . Значения  $\tau_{ee}$  и  $\tau_{ei}$  близки друг к другу.

Отношение  $\tau_{ii}/\tau_{ee}$  равно  $(m_i T^3_i / m_e T^3_e)^{1/2}$ . При равных электронной и ионной температурах ион-ионные соударения происходят гораздо реже, чем электрон-электронные или электрон-ионные.

Рассеивающими свойствами обладают не только хаотические микрополя отдельных заряженных частиц, но и электрическое поле свободного пробега электрона из-за взаимодействия с равновесными (Рэлея-Джинса) колебаниями плазмы. Воспользуемся для баевских длин, т. е. порядка нескольких десятков ампер, чтобы оценить длину свободного пробега электрона на этом расстоянии  $\Delta r = -v(1 - \cos \theta) \approx v(\theta^2/2)$ , где  $\theta$  — угол отклонения электронов под действием поперечной скорости на этом расстоянии  $\theta \sim (eE_\perp / 2m_e \omega_p)(1/v)$ . Отсюда

$$\Delta r \sim (1/8v) (eE_\perp / m_e \omega_p)^2; l \sim 8r_D v^2 (m_e \omega_p / eE_\perp)^2.$$

Принимая во внимание, что  $E_\perp^2 = (2/3) E^2 \approx 8\pi 1,38 \cdot 10^{-10} T^2 / r_D^3$ , получаем  $\Delta r \approx 10^4 (T^2 / n)$ . Таким образом, при грубой оценке вклад поля колебаний с  $\lambda > r_D$  в процессы рассеяния электронов оказывается примерно на порядок (в кулоновский логарифм раз) меньше вклада, который дают элементарные акты кулоновского столкновения частиц. Строгий расчет показывает, что и элементарные акты кулоновского рассеяния и рассеяние на колебаниях плазмы могут быть выведены как частные случаи взаимодействия частиц с флукутациями микрополя. При этом «парные» столкновения — это результат рассеяния на флукутациях микрополя, пространственные размеры которого меньше  $r_D$ . Флуктуации же с  $\lambda > r_D$  надо рассматривать как суперпозицию плазменных колебаний.

Таким образом, длина пробега электрона из-за рассеяния на термодинамически равновесном фоне плазменных колебаний на порядок величины больше длины свободного пробега определяется отношением  $\Delta r / r_D$ . Амплитуды плазменных колебаний самопроизвольно нарастают до значений, которые во много раз превышают равновесные. В таких случаях длина свободного пробега определяется рассеянием на колебаниях. Такие плазмы обладают аномальными свойствами.

С введением понятия «длина свободного пробега» удобно еще раз вернуться к разделению плазм на идеальные и неидеальные. Условия идеальности  $n r_D^3 \gg 1$  можно переписать так:  $\omega_p / \nu_{te} \gg 10$ . Это условие означает, что за время одного периода колебания  $Q_{ei}$ , которую электрон плазмы передает ионам за 1 с, получается из (1.14) интегрированием по Максвелловскому распределению по скоростям:

$$Q_{ei} = (1,2 \cdot 10^{-17} / A) (n / (T^{\circ}_e)^{1/2}). \quad (1.16)$$

Подведем некоторые итоги.

С помощью проведенного выше анализа мы попытались включить взаимодействие заряженных частиц в плазме в рамки элементарной кинетической теории газов, заменяя

многих слабых столкновений к одному условному сильному удару. Польза от применения таких не очень корректных методов заключается в том, что имея формулы для средней длины свободного пробега, срочного времени между ударами и т. д., можно опираться наглядными картинами при анализе основных физических процессов в плазме. Существует, однако, вполне корректный метод анализа кулоновского взаимодействия частиц в плазме, основанный на использовании математического аппарата теории кинетических уравнений.

Остановимся теперь на вопросе об обмене тепловой энергии между электронами и ионами в плазме. Рассмотрим сначала самый простой случай. Пусть быстрый электрон с импульсом  $m_e v_e$  пролегает мимо неподвижного иона и испытывает рассеяние на угле  $\theta$ , при этом иону передается импульс  $2m_e v_e \sin(\theta/2)$  (рис. 1.4). Под действием этого импульса ион приходит в движение, приобретая кинетическую энергию

$$\Delta w_i = (1/2m_i) (2m_e v_e \sin(\theta/2))^2.$$

Чтобы найти энергию, которую быстрый электрон передает неподвижным ионам за единицу времени, нужно умножить  $\Delta w$  на  $v_{if}(\theta) d\Omega$  и проинтегрировать по углам:

$$-dw_e/dt = (4\pi n e^4 / m_i v_e) L_K \quad (1.14)$$

(предполагается, что ионы имеют единичный заряд). Выражение для передаваемой энергии преобразуем следующим образом:

$$(4\pi n e^4 / m_i v_e) L_K = 2(m_e / m_i) \nu_{ei} w_e. \quad (1.15)$$

Здесь  $\nu_{ei}$  — число столкновений между электроном с кинетической энергией  $w_e$  и неподвижными ионами в единицу времени. Относительная доля энергии, теряемая в среднем при одном столкновении, составляет  $2m_e / m_i$  (как и следовало ожидать для наглядной модели упругого удара двух шаров). Среднее значение энергии  $Q_{ei}$ , которую электрон плазмы передает ионам за 1 с, получается из (1.14) интегрированием по Максвелловскому распределению по скоростям:

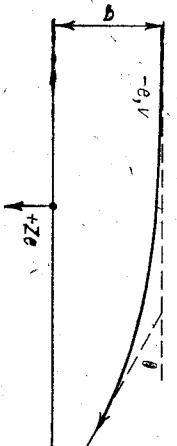


Рис. 1.4. Траектория электрона при кулоновском рассеянии на ионе

Здесь  $A$  — атомная масса ионизованного газа. Указанная формула справедлива только при  $T_e \gg T_i$ ; если  $T_e$  и  $T_i$  одного порядка, то выражение (1.16) должно быть заменено на следующее:

$$Q_{ei} \approx (1,2 \cdot 10^{-17}/A)n(T_e^{\circ} - T_i^{\circ}) / (T_e^{\circ})^{3/2}. \quad (1.17)$$

Для того чтобы получить представление о степени эффективности теплобмена между электронами и ионами плазмы, обратимся к конкретному примеру. Пусть температура электронов в водородной плазме поддерживается на уровне  $10^6$  К при концентрации  $n = 10^{13}$  см $^{-3}$ . Чтобы нагреть ионы от нулевой температуры до  $T_i = T_e/2$ , при этих условиях потребуется 1,2 мс. Заметим, что результат такого вычисления имеет смысл только в том случае, если в течение рассматриваемого промежутка времени ионы сохраняют всю приобретаемую ими энергию. Ион с энергией, соответствующей температуре в несколько сот тысяч градусов, за 1 мс проходит примерно 100 м. Для того чтобы в этих условиях ионная компонента могла нагреваться, необходима эффективная термопроводность плазмы.

Если тепловая скорость электронов значительно превышает тепловую скорость ионов, то формула (1.17) остается справедливой и при  $T_i > T_e$ , т. е. в том случае, когда происходит нагрев электронов более горячей ионной компонентой. Перепишем для этого случая указанную формулу в виде

$$Q_{ie} = (1,2 \cdot 10^{-17}/A)n(T_i^{\circ} - T_e^{\circ}) / (T_e^{\circ})^{3/2}, \quad (1.17a)$$

где  $Q_{ie} = -Q_{ei}$  — энергия, передаваемая от ионов к электронам в единице объема за 1 с. Однако если в плазме с холодными электронами присутствуют настолько горячие ионы, что  $v_i \gg v_e$ , то скорость теплообмена может значительно возрасти. Рассуждая так же, как и при выводе формулы (1.14), при указанном условии приходим к следующей формуле для теплопередачи:

$$Q_{ie} = (4\pi n e^4 / m_e v_i) L_K, \quad (1.18)$$

или после интегрирования по максвелловскому распределению ионов

$$Q_{ie} = 2,2 \cdot 10^{-14} n / (T_i^{\circ})^{1/2}. \quad (1.18a)$$

Одной из основных характеристик вещества служит уравнение состояния, т. е. соотношение между давлением, плотностью и температурой. Для классической плазмы с изотропным распределением по скоростям заряженных частиц уравнение состояния имеет тот же вид, что и для идеального газа с двумя компонентами:  $p = n(T_e + T_i)$ . Здесь  $p$  — давление плазмы, равное сумме электронного и ионного давлений. Как уже указывалось выше, эта формула справедлива для случаев, когда  $n^3 v \gg 1$ .

Обычно предполагается, что распределение частиц газа по энергиям подчиняется закону Максвелла. По отношению к плазме это предположение нельзя считать бесспорным. Максвелловский

энергетический спектр устанавливается в результате столкновений между частицами газа. Для того чтобы в данном коллективе частиц при произвольном начальном энергетическом распределении установилось распределение по Максвеллу для широкой области энергий, т. е., чтобы успел «огрести» максвелловский «хвост», содержащий частицы с энергией  $w > T$ , должно пройти время, за которое частицы должны испытать в среднем по несколько столкновений друг с другом. Причем речь идет о столкновениях идентичных частиц. В частности, максвелловское распределение по энергиям у электронов практически устанавливается за промежуток времени, примерно в десять раз превышающий среднее время  $\tau_{ee}$  между двумя электрон-электронными столкновениями. В ионной компоненте максвелловское распределение устанавливается после десятка ион-ионных соударений. Следовательно, при  $T_i \sim T_e$  «максвеллизация» у ионов происходит гораздо медленнее, чем у электронов (в отношении  $(m_e/m_i)^{1/2}$ ). Необходимо отметить, что в каждой из компонент плазмы процесс максвеллизации, который идет из-за столкновений между идентичными частицами, протекает быстрее, чем установление теплового равновесия между обеими компонентами. Поэтому в плазме электроны и ионы могут быть распределены по Максвеллу, но при двух различных значениях температуры. Кроме того, если время жизни заряженных частиц плазмы мало, то у ионной компоненты в области энергий, во много раз превышающих температуру ионов, энергетическое распределение может резко отличаться от максвелловского (число таких быстрых ионов во много раз меньше, чем это следует по закону Максвелла, если нет каких-либо механизмов ускорения).

### § 1.5. Явления переноса в плазме

С помощью понятий длины свободного пробега, времени проплата или частоты столкновений можно уже сейчас построить качественную теорию процессов переноса в плазме, таких как диффузия, теплопроводность, электропроводность и т. п.

Движение каждой заряженной частицы в плазме носит случайный диффузионный характер, которому можно сопоставить коэффициент диффузии:  $D \sim v^2 \tau_T$ . Макроскопический смысл могла бы иметь диффузия электронов слабоионизованной плазмы, в которой роль рассеивающих центров играютнейтральные частицы.

Если температура плазмы неоднородна, то в процессе такого диффузионного движения происходит перенос тепла, описываемый обычным уравнением теплопроводности с коэффициентом температуропроводности  $\kappa$ , который по физическому смыслу получается умножением коэффициента диффузии на теплоемкость:  $\kappa \approx Dc$ .

Отсюда видно, что коэффициент теплопроводности для полноты ионизованной плазмы прямо пропорционален  $T^{5/2}$ . Правильное значение численного коэффициента определяется строгой кинетической теорией. В связи с тем, что в плазме существуют раз-

смотрим поведение электрона, принадлежащего к далекому хвосту максвелловского распределения  $w_e \gg T_e$ . Приращение скорости, приобретаемое электроном в промежутке между двумя «столкновениями» с ионами, пропорционально  $v_e$  и, следовательно,растет как  $v_e^2$ . Поэтому если скорость теплового движения  $v_T$  выбранного нами электрона достаточно велика, то приращение скорости  $v_e$  может оказаться того же порядка, что и  $v_e$ , или даже превысить ее. При такой ситуации неприменима упрощенная модель процесса, в которой считается, что электрон набирает на длине пробега относительно небольшую упорядоченную скорость и полностью теряет ее при мгновенном сильном ударе. В действительности ускорение и торможение электрона происходят одновременно. В то время как электрон приобретает упорядоченную скорость, разбросанное рассеяние на ионах постепенно изменяет направление его движения. Электрическое поле стремится распрямить траекторию, в то время как взаимодействие с ионами изгибае ее. Если рассеянием, то равновесие сил не может установиться и электрон должен перейти в состояние непрерывного ускорения, при котором его энергия будет все время возрастиать. С увеличением энергии сила торможения падает, и поэтому электрон, вовлеченный в процесс непрерывного разгона поля, будет продолжать ускоряться, пока он находится в области действия поля. В состояние разгона полем переходят те электроны плазмы, которые успевают набрать на длине свободного пробега дополнительную скорость  $v_e$ , превышающую их начальную скорость. Указанное условие разгона можно записать в виде

$$eE_{te}/m_e > v.$$

Поскольку  $v_{te}$  пропорционально  $v_e^3/n$ , то из (1.25) следует, что непрерывное ускорение происходит в том случае, когда  $Ew_e/n$  превышает некоторое граничное условие. Как нетрудно убедиться, для водородной плазмы это граничное значение порядка  $3 \cdot 10^{-12}$ , если  $E$  измеряется в вольтах на сантиметр, а  $w_e$  — в электронвольтах. В экспериментах с плазмой условие (1.25) обычно удовлетворяется только для электронов с энергией, во много раз превышающей  $T_e$ . Эти электроны составляют очень небольшую долю всей электронной компоненты. Поскольку в указанном случае основной вклад в электрический ток дают составляющие большинство тепловые электроны плаэмы, закон Ома верен с высокой точностью. Однако наряду с обычным током проводимости в плаэме будет существовать дополнительный ток ускоренных электронов, для которого закон Ома не применим. При большом значении отношения  $E/n$  условие (1.25) будет выполняться также и для электронов со средней тепловой скоростью. В этом случае в процесс непрерывного ускорения может перейти основная часть электронной компоненты плаэмы, и тогда закон Ома должен резко нарушиться, так как, вообще говоря, мы имеем дело с нестационарным процессом ускорения электронов. Расчет показывает, что процесс элек-

тронного разгона заметно развивается тогда, когда отношение среднего значения  $v_e$  для плаэмы в целом к средней тепловой скорости электронов становится больше одной десятой. Отношение  $v_e/v_T$  растет пропорционально  $v_e^2$ , и поэтому если для электронов со средней тепловой энергией  $w_e = T_e$   $v_e/v_T = 0.1$ , то для электронов с энергией  $10T_e$   $v_e/v_T$  сравнивается по значению с  $v_e$ , и такие электроны оказываются близкими к порогу непрерывного ускорения. Переход электронов в состояние непрерывного ускорения можно наблюдать в колцевых электрических разрядах, когда плаэма обраузуется внутри торoidalной камеры и ускоряется вихревым электрическим полем. В экспериментах такого рода при некоторых условиях действительно наблюдается разгон определенной (относительно небольшой) группы электронов плаэмы до очень высокой энергии при сравнимо небольших напряжениях на плазменном витке.

Более глубокий анализ поведения потоков разогнанных электронов показывает, что такие потоки способны возбуждать и раскачивать в плаэме различные колебания и волны, передавая им всю энергию или заметную часть ее. В результате этого появляется новый механизм торможения ускоренных частиц, прекращающий разгон после того, как электроны плаэмы наберут определенную порцию избыточной энергии направленного движения. Этот автоматический механизм не позволяет всем электронам плаэмы перейти в состояние непрерывного ускорения. Ясно, что электропроводность плаэмы в указанном случае нельзя вычислять по формуле (1.22) и что торможение электронов при взаимодействии с волнами должно приводить к увеличению сопротивления. К настоящему времени накоплен большой экспериментальный материал по аномалии электропроводности плаэмы в сильном электрическом поле. Однако для его анализа требуется привлечь более глубокие и детальные представления нелинейной теории плаэменных неустойчивостей (см. § 2.19). При высокой плотности плаэмы и относительно небольшой напряженности электрического поля найденные экспериментально значения в пределах погрешностей измерений совпадают со значениями, определенными по формуле (1.23).

### § 1.6. Плаэма в высокочастотном поле

Свойственные свойства плаэмы выступают очень отчетливо в том случае, когда рассматривается ее поведение под действием электрического поля высокой частоты. В этих условиях существенную роль начинает играть механическая инерция электронов. Рассмотрим простейший случай. Пусть в плаэме действует электрическое поле  $E$ , напряженность которого равна  $E_0 \exp(-i\omega t)$ . Если частота настолько велика, что за время одного периода изменения поля  $U$  отдельного электрона вероятность столкновения с ионами достаточно мала, то, рассматривая движение электронов, можно в первом приближении пренебречь силой торможения.

Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m_e \ddot{x} = -e E_0 \exp(-i\omega t), \quad (1.26)$$

где  $x$  — координата в направлении электрического поля. Интегрируя (1.26), получаем

$$u_e = \dot{x} = (e E_0 / m_e \omega) \exp(-i\omega t). \quad (1.27)$$

Следовательно,

$$j = -e u_e = -ne^2 E / im_e \omega. \quad (1.28)$$

Полученное соотношение можно записать в следующей форме:

$$E = (-im_e \omega / ne^2) j. \quad (1.29)$$

Таким образом, высокочастотное напряжение сдвигнуто по фазе на  $90^\circ$  назад по сравнению с током. Это означает, что в высокочастотном поле плазма обладает собственной «немагнитной» индуктивностью, которая обусловлена инерцией электронов. При низких концентрациях немагнитная индуктивность плазменного проводника может превосходить его обычную («магнитную») индуктивность. Выясним условия, при которых это может иметь место. Для однородного цилиндрического плазменного проводника с радиусом  $a$  магнитная индуктивность на единицу длины в единицах СГСЭ равна

$$(1/\omega) |E/J| = (1/ne^2 \omega) |E/J|. \quad (1.30)$$

Обычная индуктивность (коэффициент самоиндукции) в единицах СГСЭ для проводника длиной 1 см порядка единицы; в СГСЭ она составляет величину порядка  $1/c^2$ . Следовательно, для плазмы отношение обычной индуктивности к немагнитной индуктивности будет порядка  $Pe/m_e c^2 \approx 3 \cdot 10^{-19}$ , где  $\Pi$  — число электронов на 1 см плазменного проводника. Эта величина имеет очень простой смысл. Она равна полному числу электронов, которые находятся внутри отрезка плазменного проводника длиной, равной классическому радиусу  $r_0 = e^2 / m_e c^2$ . Формулу (1.29), связывающую плотность тока с напряженностью высокочастотного поля, можно обобщить, если учесть торможение электронов, вызванное столкновениями. В этом случае получаем

$$E = j((1/\sigma) - i\omega L_e). \quad (1.31)$$

Здесь  $L_e = m_e / ne^2$  — немагнитная индуктивность. Такой характер движения электронов и переносимого ими тока под действием высокочастотного электрического поля играет решающую роль в формировании диэлектрических свойств плазмы. В рассмотренном выше простейшем случае, когда в плазме существует электрическое поле  $E_0 \exp(-i\omega t)$ , ускорение электрона  $\dot{x}$  и его скорость определяются выражениями (1.26) и (1.27). Интегрируя по времени еще раз, находим смещение

$$x = (e/m_e \omega^2) E_0 \exp(-i\omega t). \quad (1.32)$$

Из (1.32) следует, что смещение электрона сдвинуто по фазе относительно действующей силы ( $F = -eE$ ) на  $180^\circ$ . Это случай, противоположный тому, с которым мы встречаемся, изучая торможение обычных твердых диэлектриков. При сдвиге по фазе на  $180^\circ$  между силой, действующей на заряд, и его смещением поляризация вещества направлена против поля и, следовательно, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon < 1$ . Диэлектрическую проницаемость можно выразить через величину электрического момента единицы объема  $P$  с помощью известной формулы

$$\epsilon = 1 + 4\pi P/E, \quad (1.33)$$

$$P = -ne_x, \quad (1.34)$$

где  $x$  — смещение электронов (смещением ионов можно пренебречь, так как оно очень мало). Из (1.32) и (1.34) находим известное выражение

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2 / \omega^2, \quad (1.35)$$

из которого следует, что в плазме не могут распространяться электромагнитные волны с частотой, меньшей  $\omega_p$ . Следовательно, показатель преломления  $N = \sqrt{\epsilon - (1 - \omega_p^2 / \omega^2)^{1/2}}$ , а волновое число  $k = 2\pi/\lambda$  равно  $k = N_0/c = (\omega/c)(1 - \omega_p^2 / \omega^2)^{1/2}$ .

Дисперсионная кривая для электромагнитных волн приведена на рис. 1.5. Для электромагнитных волн, распространяющихся в пространственно-однородной плазме без магнитного поля, отсутствует явление «затухания Ландау». Это связано с тем, что фазовая скорость волн  $\omega/k = c/(1 - \omega_p^2 / \omega^2)^{1/2}$  превышает скорость света в вакууме и, следовательно, нет частиц, которые могли бы находиться врезонансе с такими волнами. Поэтому единственный очевидный механизм затухания электромагнитных волн в такой плазме — это торможение электронов, вызванное столкновениями. В формуле для диэлектрической проницаемости учтет этого эффекта дает минимум волны в части. Действительно, если в уравнении движений для электронов в поле волны учесть силу трения электронов и ионов

$$m_e \ddot{x} = -e E_0 \exp(-i\omega t) - m_e \dot{x} / \tau_{ei},$$

то для смещения  $x$  получаем

$$x = (e/m_e \omega(\omega + iv_{ei})) E_0 \exp(-i\omega t). \quad (1.36)$$

Используя (1.33) и (1.34), находим

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2 / \omega(\omega + iv_{ei}). \quad (1.36)$$

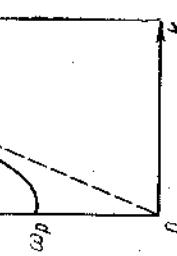


Рис. 1.5. Дисперсионная кривая электромагнитных волн в плазме

то для смещения  $x$  получаем

$$x = (e/m_e \omega(\omega + iv_{ei})) E_0 \exp(-i\omega t).$$

Для электромагнитных волн в плазме, как правило, выполняется неравенство  $\omega \gg v_{ei}$ . Действительно, для нижней границы частот

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2 / \omega(\omega + iv_{ei}).$$

3—74

$\omega \approx \omega_p$ , оно эквивалентно условию  $\omega_r \tau_{ei} \gg 1$  (условию идеальности плазмы  $n r^3 D \gg 1$ , см. § 1.3). По этой причине формулу (1.36) с достаточною степенью точности можно представить двумя первыми членами разложения в ряд по величине  $v_{ei}/\omega$ .

$$e = 1 - \omega_r^2 v/\omega^2 + i\omega^2 \rho v \omega / \omega^3. \quad (1.36a)$$

До сих пор мы рассматривали движение электронов в электрическом поле волны в линейном по амплитуде приближении. В этом приближении электроны совершают быстрые колебания в направлении электрического поля со скоростью  $u$ , определяемой соотношением (1.27). В следующем порядке по амплитуде усредненный эффект квадрата быстрых осцилляций приводит для электромагнитной волны с пространственно неоднородной амплитудой к вытеснению электронов из областей, занятых электромагнитным полем. Физику такого вытеснения можно объяснить следующим образом. Электромагнитное поле, вызванная высокочастотные колебания электронов со скоростью  $u(t)$ , создает как бы дополнительное высокочастотное давление  $\rho_{v,z} = n m_e u^2$ , в результате чего электроны плазмы стремятся перемещаться к минимуму поля.

Рассмотрим для определенности стоячую электромагнитную волну. В такой волне электрическое и магнитное поля лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению неоднородности (ось  $z$ ):

$$E_x = (1/2) E_x(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}$$

$$H_y = (1/2) H_y(z) \exp(-i\omega t) \pm \text{к. с.}$$

Здесь к. с. означает слагающееся, комплексно сопряженное первому. Амплитуды полей связаны соотношением

$$dE_x/dz = i(\omega/c) H_y,$$

вытекающим из уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} E = -(1/c) \partial \mathbf{H} / \partial t.$$

В соответствии со сделанными выше замечаниями электроны плазмы в волне конечной амплитуды участвуют в двух движениях — быстрых колебаниях в направлении электрического поля и медленном смещении вдоль неоднородности:

$$\mathbf{r} = (1/2) \mathbf{x} \exp(-i\omega t) + \mathbf{z}(t) + \text{к. с.}$$

Уравнение движения электронов вдоль оси  $z$  имеет вид

$$m_e \ddot{z} = -(e/c) u H_y = -(1/4) (e/c) (u \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}) \times (H_y \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}). \quad (1.37)$$

В последней формуле мы учли, что скорость электронов — вещественная величина, и представили ее в виде

$$u = (1/2) u(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.,}$$

где величина  $u(z)$  определяется формулой (1.27). Проведя в правой части (1.37) усреднение по быстрым колебаниям, получим сле-

дующее уравнение для медленного движения электронов по оси  $z$ :

$$\begin{aligned} m_e \ddot{z} &= -(e^2 / 4m_e \omega^2) (E \partial E^* / \partial z + \text{к. с.}) = \\ &= -(e^2 / 4m_e \omega^2) \partial |E|^2 / \partial z. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Это уравнение означает, что в поле электромагнитной волны с пространственно неоднородной амплитудой на электроны плазмы действует сила высокочастотного давления, направленная против градиента электрического поля:

$$F_z = -\partial p_{v,z} / \partial z. \quad (1.39)$$

Высокочастотное давление, создаваемое электромагнитной волной, равно

$$p_{v,z} = (e^2 n / 4m_e \omega^2) E^2(z). \quad (1.40)$$

Эта формула получена для стоячей монохроматической электромагнитной волны, однако в действительности она имеет достаточно универсальный характер. В частности, такая же формула для высокочастотного давления получается при рассмотрении движения электронов в неоднородном продольном поле конечной амплитуды:  $E_z = (1/2) E_z(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}$  Пусть частицы колеблются около точки  $z_0$  в поле с амплитудой, возрастающей в сторону увеличения  $z$ . При колебательном движении сила направлена против смещения. Поэтому когда электрон смещается направо, на него действует возвращающая сила большей величины, чем при смещении налево. В итоге возникает результирующая сила, действующая в сторону уменьшения  $z$ , т. е. в направлении, обратном градиенту электрического поля.

Ограничивающаяся членами, квадратичными по амплитуде поля, действующую на электрон силу можно представить в виде

$$\begin{aligned} F &= -(e/2) [E \exp(-i\omega t) + \\ &+ \delta z (\partial E / \partial z) \exp(-i\omega t)] + \text{к. с.} \end{aligned}$$

Соответственно этому движение электронов по  $z$  представляется в виде суммы быстрых колебаний

$$\delta z = -(eE / 2m_e \omega^2) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.} \quad (1.41)$$

и медленного смещения под действием силы, усредненной по быстрым осцилляциям:

$$\langle F_z \rangle = -(e/2) \langle \delta z \rangle [\partial E_z / \partial z] \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}$$

Представляя в правую часть этого соотношения  $\delta z$  и проводя усреднение по быстрым колебаниям, вновь приходим к формуле (1.40) для силы высокочастотного давления. Эта сила обращается в нуль для бегущей плоской волны, во всех других случаях она отлична от нуля и приводит к вытеснению плазмы из областей, занятых высокочастотным полем. По этой причине для удержания плотной з\*

плазмы могут быть использо-  
ваны мощные пучки электро-  
магнитных волн, получаемые  
в современной когерентной  
электродинамике.

Механизм удержания разъ-  
ясняется следующим образом.

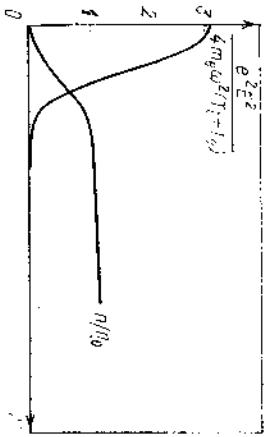


Рис. 1.6. Действие давления электромаг-  
нитной волны на плазму

В достаточно плотную плазму  
электромагнитная волна не  
проникает, и вблизи границы  
плазмы возникает градиент  
электрического поля. Тогда  
под действием силы высокоча-  
стотного давления профиль  
плотности плазмы искажается —  
электроны плазмы смещаются в область, свободную от электро-  
магнитного поля (рис. 1.6). При этом возникает поляризацион-  
ное электрическое поле, в результате чего ионы смещаются вслед  
за электронами. Уравнения, описывающие равновесие плазмы  
с электромагнитным полем, можно записать в виде

$$-eE_0 - (e^2/4m_e\omega^2)\partial E^2/\partial z - (1/n)\partial nT_i/\partial z = 0; \quad (1.42)$$

$$eE_0 - (1/n)\partial nT_i/\partial z = 0. \quad (1.43)$$

(Здесь мы пользовались условием квазинейтральности  $n_e = n_i$ .) Из  
этих уравнений имеем

$$n = n_0 \exp\{-e^2 |E|^2 / 4m_e\omega^2 (T_e + T_i)\}.$$

$$eE_0 = -e^2 |E| / T_i / 4m_e\omega^2 (T_e + T_i),$$

где  $n_0$  — невозмущенная плотность при  $E \rightarrow 0$ . Таким образом, до-  
статочно мощную электромагнитную волну

$$e^2 |E|^2 / m_e\omega^2 \gg T_e + T_i;$$

действительно можно использовать для удержания плазмы.

### § 1.7. Проникновение электромагнитной волны в плазму. Трансформация в плазменные колебания

Поскольку при  $\omega < \omega_p$  диэлектрическая проницаемость плазмы  
отрицательна, электромагнитные волны в такую плазму не могут  
проникать дальше, чем на глубину скин-слоя. Оказывается, в ис-  
которых случаях внутри этого тонкого слоя толщины порядка  
 $c/\omega_p$  с электромагнитной волной могут происходить поистине дра-  
матические события. Их вполне всего понять, если рассматривать  
распространение электромагнитной волны в неоднородной плазме,  
плотность и диэлектрическая проницаемость которой зависят от  
пространственной координаты. Будем считать, что плотность мо-  
гутно нарастает в глубь плазмы (вдоль  $z$ ). Пусть в такой пла-  
зе под углом  $\theta$  к оси  $z$  распространяется электромагнитная волна.

Если плотность плазмы меня-  
ется достаточно медленно в  
масштабах длины волны, т. е.  
выполнено условие  $\omega L/c \gg 1$ ,  
где  $L$  — характерный прост-  
ранственный масштаб измене-  
ния плотности, то задачу о рас-  
пространении электромагнит-  
ной волны всюду, за исключе-  
нием особых точек, можно ре-  
шать в приближении геометри-  
ческой оптики. В этом прибли-  
жении волновое поле, как и  
в однородной среде, можно искать в виде плоской волны, учиты-  
вая, однако, что  $z$ -составляющая волнового вектора и амплитуда  
волны медленно меняются с расстоянием:

$$E, H = (\text{const} / k_z^{1/2}) \exp \left\{ i \int k_z dz + ik_y y - i\omega t \right\}. \quad (1.44)$$

Для простоты предположим, что волновой вектор лежит в плоско-  
сти  $yz$  (плоскость падения). Диисперсионное уравнение этой волны  
имеет такой же вид, как и в однородном случае:

$$k_z^2 + k_y^2 = (\omega^2/c^2) \epsilon. \quad (1.45)$$

Слева от области, занятой плазмой, т. е. в вакууме, это уравнение,  
очевидно, переходит в следующее:  $k_z^2 = \omega^2/c^2$ . Поскольку  $k_y^2 =$   
 $= k^2 \sin^2 \theta$ , то дисперсионное уравнение в общем случае можно за-  
писать так:

$$k_z^2 = (\omega^2/c^2) (\epsilon - \sin^2 \theta).$$

Точка  $\epsilon = \sin^2 \theta$  называется точкой поворота волны. Структура поля  
вблизи точки поворота показана на рис. 1.7. Слева от точки пово-  
рота осцилляторная структура стоячей электромагнитной волны —  
результат наложения падающей и отраженной электромагнитных  
волн. Справа от точки отражения поле экспоненциально затухает  
в глубь плазмы. Более детально структуру поля можно найти, ре-  
шив уравнения Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= i(\omega/c) \mathbf{H}; \\ \text{rot } \mathbf{H} &= -i(\omega/c) \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

Здесь  $\epsilon$  — функция координат. Подставляя  $\mathbf{H}$  из первого уравне-  
ния во второе, получаем следующее уравнение для  $\mathbf{E}$ :

$$\Delta \mathbf{E} + \epsilon(\omega^2/c^2) \mathbf{E} - \text{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (1.47)$$

Аналогичным образом исключая  $\mathbf{E}$ , находим уравнение для  $\mathbf{H}$ :

$$\Delta \mathbf{H} + \epsilon(\omega^2/c^2) \mathbf{H} + (1/\epsilon) [\nabla \epsilon, \text{rot } \mathbf{H}] = 0. \quad (1.48)$$

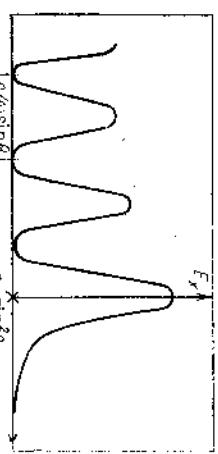


Рис. 1.7. Пространственное распределение электрического поля электромагнитной волны в неоднородной плазме волнистости «точки отражения»

При исследовании структуры поля будем различать два независимых случаев поляризации волн: *S*-поляризацию, когда электрический вектор перендикулярен к плоскости падения, т. е. в рассматриваемом случае направлен вдоль оси *x*, и *P*-поляризацию, когда электрический вектор лежит в плоскости падения *yz*, а по оси *x* направлено магнитное поле волны.

Наиболее просто рассматривается случай *S*-поляризации, когда уравнение (1.47) для электрического поля можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + (\omega^2/c^2)(\epsilon - \sin^2\theta)E = 0. \quad (1.49)$$

Достаточно далеко от точки поворота  $\epsilon = \sin^2\theta$  решение этого уравнения можно получить в приближении геометрической оптики; оно совпадает с формулой (1.44), структура поля в этом случае соответствует структуре, изображенной на рис. 1.7.

Для того чтобы получить решение вблизи точки поворота, надо задаться конкретной зависимостью  $\epsilon$  от координаты. Будем считать, что в этой области плотность плазмы меняется по линейному закону  $n = n_0(1+z/L)$  (здесь  $n_0$  — плотность электронов в точке, где плазменная частота совпадает с частотой волны). В этом случае уравнение (1.49) приводится к знаменитому уравнению Эйри:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - (\omega^2/c^2)(z/L)E = 0, \quad (1.50)$$

где  $z' = z - L \sin^2\theta$ . Решение этого уравнения, не имеющее особенности в точке  $z' = 0$ , выражается через хорошо известную функцию Эйри. Достаточно далеко от точки  $z' = 0$  асимптотика этой функции совпадает с решением, полученным в приближении геометрической оптики [см. формулу (1.44) с  $k_z^2 = -(\omega^2/c^2)(z'/L)$ ], амплитуды имеют место слева от точки  $z' = 0$ , экспоненциальное спадение — справа от точки  $z' = 0$ .

Рассмотрим теперь волну *P*-поляризации, у которой есть составляющая электрического поля в направлении неоднородности и с которой связаны обещанные в начале § 1.7 драматические события. Дело в том, что в окрестности точки  $z = 0$ , где осуществляется резонанс  $\omega = \omega_r$ , упомянутая выше компонента  $E_z$  электрического поля падающей электромагнитной волны, казалось бы, могла раскачивать продольные (лэнгмюровские) плазменные колебания. Для того чтобы убедиться, что эта «степень свободы» действительно реализуется, обратим внимание на неизбежность разделения зарядов, так как под действием нормальной компоненты электрического поля  $E_z$  возникает движение электронов в направлении неоднородности плотности. Рассмотрим детально понеделье амплитуд поля в окрестности точки  $z = 0$ . Воспользовавшись *z*-компонентой второго из уравнений Максвелла (1.46), нетрудно найти, что амплитуда продольного поля определяется соотношением

$$E_z \approx H_x(0) \sin \theta. \quad (1.51)$$

Анализ поведения магнитного поля можно провести, основываясь на уравнении (1.48), которое в данном случае ( $\mathbf{H}$  параллельно оси *x*,  $\epsilon$  зависит только от *z*) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - (1/\epsilon) (\partial \epsilon / \partial z) (\partial H / \partial z) + \\ + (\omega^2/c^2) (\epsilon - \sin^2\theta) H = 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Из этого уравнения следует, что точка отражения волны *P*-поляризации также определяется условием  $\epsilon = \sin^2\theta$ . После прохождения точки отражения  $z = -L \sin^2\theta$  магнитное поле волны экспоненциально спадает с характерным размером, имеющим порядок  $c/\omega \sin \theta$ .

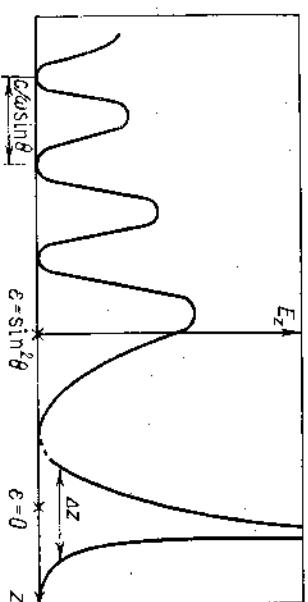


Рис. 1.8. Пространственное распределение электрического поля электромагнитной волны в неоднородной плазме вблизи точки «плазменного резонанса» и явление трансформации электромагнитной волны в плазменную

Точное решение уравнения (1.52), которое оказывается несколько более сложным, чем уравнения Эйри, показывает, что магнитное поле не испытывает никакой аномалии в точке плазменного резонанса  $z = 0$  и в формуле (1.51) магнитное поле можно считать постоянным. Тогда электрическое поле в точке  $z = 0$  будет иметь особенность порядка  $1/z$ . Структура электрического поля в случае *P*-поляризации показана на рис. 1.8. Тонкий слой вблизи особенности можно рассматривать как своеобразный конденсатор, в котором происходит накопление энергии до бесконечно большой величины при пренебрежении диссилиацией (столкновениями) и пространственной дисперсией, которая, как известно, соответствует выносу энергии плазменной волны.

Для того чтобы описанный здесь эффект был замечен, необходимо, чтобы точка отражения и точка плазменного резонанса не были разнесены в пространстве слишком далеко. Условие проникновения электромагнитной волны в область плазменного резонанса запишем в виде  $|k_z z| \sim 1$ , где  $z = -L \sin^2\theta$  — расстояние между точкой отражения и точкой плазменного резонанса. Подставляя сюда  $k_z \sim (\omega/c) \sin \theta$ , получаем, что электромагнитная волна проникает

в область резонанса при углах падения, близких к нормальному:

$$\theta \sim (c/\omega L)^{1/3} \ll 1.$$

Однако  $\theta$  не может обратиться в нуль (нормальное падение), так как в этом случае вообще отсутствует продольное электрическое поле.

Расходимость поля  $E_z$  в точке  $z=0$  отсутствует, если учесть реальные эффекты — столкновения или раскачу продольных плазменных колебаний. Для того чтобы учесть раскачу продольных колебаний, необходимо ввести поправку к частоте, возникающей из-за гравитационного движения [см. уравнение (1.3б)].

Рассмотрим сначала более простую задачу, когда особенность в точке резонанса снимается столкновениями. Используя выражение (1.3б) для диэлектрической пропиляемости плазмы при различии соударений, найдем, что амплитуда продольного электрического поля определяется соотношением

$$E_z = H_x(0) \sin \theta / (-z/\lambda) - iv/\omega. \quad (1.53)$$

Отсюда следует, что диссипация ограничивает продольное электрическое поле на уровне

$$E_{\max} \approx H_x(0) \sin \theta \omega/v. \quad (1.54)$$

Такое поле достигается в области шириной

$$\Delta z \sim Lv/\omega. \quad (1.55)$$

Во всех приведенных выше формулах  $H_x(0)$  — это магнитное поле в окрестности особенности. Для того чтобы связать его с амплитудой падающей волны  $H$ , необходимо решить уравнение (1.52). Мы не будем проводить здесь строгое решение этого уравнения и приведем лишь окончательный результат:

$$\sin \theta H_x(0) = H(c/\omega L)^{1/2} \Phi(\tau) / (2\pi)^{1/2}, \quad (1.56)$$

где  $\tau = (\omega L/c)^{1/2} \sin \theta$ . График функции  $\Phi(\tau)$  приведен на рис. 1.9, при больших  $\tau$  в соответствии с проведенным выше рассмотрением функция  $\Phi(\tau)$  экспоненциально спадает.

Теперь можно вычислить коэффициент поглощения электромагнитной волны в окрестности плаズменного резонанса. Очевидно, что такой коэффициент поглощения определяется отношением мощности диссипации в окрестности резонанса к потоку энергии в падающей волне, который, в свою очередь, определяется вектором Пойнтинга и равен  $cH^2/8\pi$ . Основной вклад в диссипацию, очевидно, обусловлен продольным электрическим полем. Тогда поглощаемая мощность равна

$$P = v \int (|E_z|^2 / 8\pi) dz.$$

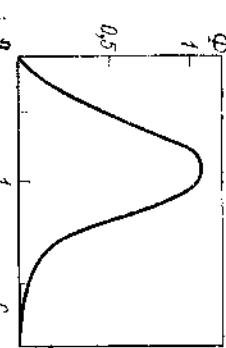


Рис. 1.9. График функции  $\Phi(\tau)$

Приставляя в этот интеграл формулу (1.53) для пространственной структуры продольного электрического поля в окрестности плаズменного резонанса, получаем следующее уравнение для скорости поглощения:

$$P = (1/8\pi) H_x^2(0) \sin^2 \theta \int \frac{v}{z^2/L^2 + v^2/\omega^2} dz =$$

$$= (1/8\pi) H_x^2(0) \sin^2 \theta \int \frac{vdz}{[(\omega - \omega_p(z))^2 + v^2]} =$$

одним из известных представлений  $\delta$ -функций, а именно

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\nu}{(\omega - \omega_p(z))^2 + \nu^2} = \pi \delta(\omega - \omega_p(z)).$$

Наличие этой  $\delta$ -функции подчеркивает резонансный характер поглощения — диссипация электромагнитной энергии происходит только в узком слое плазмы, где плазменная частота совпадает с частотой падающей волны. В этом случае частота столкновений определяет только ширину резонансного слоя  $\Delta z$  [см. (1.55)], а скорость поглощения от  $v$  не зависит. Это обстоятельство можно пояснить иначе:  $P \sim E^2 \cdot \Delta z \cdot E_{\max}^{-1}/v$  [см. (1.54)],  $\Delta z \sim v$ , следовательно,  $P$  не зависит от  $v$ . Иначе говоря, роль  $v$  является, в известном смысле, символической.

Следует заметить, что при дальнейшем рассмотрении свойств плазмы нам довольно часто придется сталкиваться с резонансными явлениями [черепковский резонанс волн и частиц  $\omega = ck$ ] (см. § 1.12), резонанс на плаズменной частоте в спектре поляризационных потерь заряженной частицы (см. § 1.8)]. Все эти резонансы в значительной степени аналогичны резонансу (1.57). Для получения конечной ширины резонанса мы и в дальнейшем будем довольно часто вводить соударения.

Вернемся к формуле (1.57). Выполняя интегрирование по  $z$ , получаем

$$P = (1/8) H_x^2(0) \sin^2 \theta \omega. \quad (1.58)$$

Коэффициент поглощения электромагнитной волны определяется отношением мощности, поглощаемой в окрестности резонанса, к потоку энергии в падающей электромагнитной волне:

$$K = P/c \frac{H^2}{4\pi}.$$

При  $K \rightarrow 0$  почти весь поток отражается от граничной плазмы и обраузуется стоячая электромагнитная волна. При  $K \rightarrow 1$  энергия падающей электромагнитной волны практически полностью поглощается в окрестности плаズменного резонанса.

Используя приведенное выше выражение для  $P$  и формулу (1.56), связывающую амплитуду магнитного поля в окрестности резонанса с амплитудой поля в падающей волне, находим следую-

шую формулу для коэффициента поглощения электромагнитной волны:

$$K=0.25\Phi^2(\tau). \quad (1.59)$$

Из графика функции  $\Phi(\tau)$  видно, что максимальное значение коэффициента поглощения достигается при очень малых углах между направлением распространения волны и градиентом плотности плазмы:

$$\theta_0 \approx 0.5(c/\omega L)^{1/3}$$

(0<sub>0</sub> порядка нескольких градусов). Максимальное значение коэффициента поглощения

$$K_{\max} \approx 0.4. \quad (1.60)$$

Другой механизм ограничения электрического поля в окрестности резонанса связан с выносом энергии из этой области плазменными волнами. Уравнение, описывающее трансформацию электромагнитной волны в плазменные волны, совпадает с уравнением (1.51), в котором теперь нужно учесть пространственную дисперсию диэлектрической проницаемости. Тогда в соответствии с (1.36)

$$\epsilon(\omega, k) = 1 - (\omega_p^2/\omega^2)(1 + 3k^2r_p^2).$$

Эта формула получена для плоской волны  $E_z = \text{exp}(ikz)$ . В более общем случае волновое число следует заменить оператором дифференцирования  $k = i\partial/\partial z$ , и тогда диэлектрическую проницаемость следует понимать в операторном смысле

$$\hat{\epsilon} = 1 - (\omega_p^2/\omega^2)(1 - 3r_p^2\partial^2/\partial z^2).$$

В этом случае вместо соотношения (1.51) имеем следующее дифференциальное уравнение для поля:

$$3r_p^2\partial^2 E_z / \partial z^2 - (z/L)E_z = H_x(0)\sin\theta. \quad (1.61)$$

Решение этого уравнения также можно выразить с помощью функции Эйри, в данном случае она будет определять структуру плазмы Эйри, в дальнем случае она будет определять структуру плазмы. Однако для качественных волн, выходящих из области резонанса. Однако для качественных оценок есть необходимость получать точное решение уравнения (1.61). Заменяя в этом уравнении  $\partial^2/\partial z^2$  на  $1/(\Delta z)^2$ , находим характерный пространственный масштаб, на котором изменяется амплитуда плазменных колебаний:

$$\Delta z \sim (Lr_p^2)^{1/3}, \quad (1.62)$$

а максимальная напряженность электрического поля

$$E_{\max} \sim H_x(0) \sin\theta (L/r_p)^{2/3}. \quad (1.63)$$

Теперь сопоставим оба конкурирующих механизма. Трансформация в плазменные волны доминирует над столкновительным поглощением, если характерный пространственный масштаб плазменных колебаний (1.62) превышает ширину области резонанса, обусловленную соударениями  $v < \omega(r_p/L)^{2/3}$ . В противном случае ограничение на величину продольного электрического поля в окрестности  $z=0$  связано с диссипацией на столкновениях.

Поток энергии в плазменной волне определяется формулой  $v_g E_z^2 / 4\pi$ , где  $v_g = d\omega/dk$  — групповая скорость плазменных колебаний, в соответствии с формулой (1.36) равная  $v_g = 3k_p r_p^2 \omega_p$ . По порядку величины  $k_p \sim 1/\Delta z$ , поэтому поток энергии, уносимый плазменной волной, приближенно равен

$$v_g E_z^2 / 4\pi \approx (1/4\pi) (H_x(0) \sin\theta)^2 \omega_p L.$$

Подставив в это соотношение значение магнитного поля в точке резонанса из (1.56), получим окончательное выражение для потока энергии в плазменной волне:

$$v_g E_z^2 / 4\pi = c(H_z^2/4\pi)(\Phi^2(\tau)/2\pi).$$

Если ввести коэффициент трансформации электромагнитной волны в плазменную волну, равный отношению потоков энергии в плазменной и падающей электромагнитной волнах, то нетрудно видеть, что при углах  $\theta_0 \sim (\omega L/c)^{-1/3}$  он оказывается порядка единицы. Более точное рассмотрение, основанное на решении уравнения Эйри для продольного поля, показывает, что этот коэффициент в точности совпадает с коэффициентом поглощения электромагнитной волны в результате соударений [см. формулу (1.59)]. Иначе говоря, в обоих случаях должна теряться одна и та же доля падающего на плазму потока электромагнитной энергии.

### § 1.8. Излучение плазмы

В плазме без магнитного поля электромагнитное излучение обычно возникает в результате элементарных процессов неупругого взаимодействия частиц. Одним из таких процессов является неупругое рассеяние электронов в электрическом поле иона с потерей энергии, которая превращается в электромагнитное излучение. Это так называемое тормозное излучение электрона. Это — главный источник излучения плазмы при очень высокой электронной температуре. Оно имеет сплошной спектр: энергия фотонов  $\hbar\omega$ , излучаемых в элементарном акте, лежит в пределах от  $\hbar\omega_p$  (что соответствует нижней возможной частоте электромагнитных волн в плазме) до  $\omega_e$ , где  $\omega_e$  — кинетическая энергия электрона до столкновения. Как правило, основная доля излучаемой энергии приходится на частоты  $\omega \gg \omega_p$ . Помимо этого, это условие для квантов с энергией порядка средней тепловой энергии электронов  $\hbar\omega_p T_e$  можно преобразовать к виду

$$e^2 (m_e)^{1/2} / \hbar (\Gamma_J)^{1/2} \gg 1/n r_p^3. \quad (1.64)$$

В правой части неравенства (1.64) стоит величина, характеризующая степень неидеальности плазмы как газа, т. е. обычно чрезвычайно малая. Выражение, стоящее в левой части, удобно представить как отношение  $(I_0/T_e)^{1/2}$ , где  $I_0 = e^4 m_e / \hbar^3$  с точностью до численного коэффициента единицы совпадает с боровской энергией электрона в атоме водорода. Для условий обычного га-

зового разряда эта величина порядка единицы. Она становится меньше единицы для высокотемпературных плазм, по обычно это с лихвой компенсируется еще более значительным уменьшением правой части неравенства (1.64).

Частотный спектр излучения для элементарных актов торможения нерелятивистских электропров с заданной энергией  $\omega_e$  приближенно можно получить, по существу, в рамках классической электродинамики. Воспользовавшись известной формулой для интенсивности классического дипольного излучения заряда, движущегося с ускорением:

$$dW/dt = (2/3) e^2 v^2 / c^3.$$

Полную энергию, излучаемую электроном при пролете около рассеивающего центра (иона), можно представить и как интеграл по всем возможным частотам:

$$(2/3) (e^2/c^3) \int_{-\infty}^{\infty} v^2 dt = (2/3) (e^2/c^3) 4\pi \int_0^{\infty} |v_w|^2 d\omega, \quad (1.65)$$

где  $v_w = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \exp(-i\omega t) dt$  — разложение ускорения в интеграл Фурье.

Рассмотрим тормозное излучение при столкновениях с большими прицельными расстояниями, т. е. с малыми углами рассеяния ( $b \ll 1$ ). В этом случае ускорение, испытываемое электроном, почти перпендикулярно к его первоначальной скорости и приблизительно равно

$$\dot{v}_\perp \approx (Z e^2/m_e) b / (b^2 + v^2 t^2)^{3/2}. \quad (1.67)$$

Напомним, что в § 1.4 упругие столкновения были рассмотрены в этом же приближении. Теперь, вычислим компоненту Фурье от величины ускорения, определяемой формулой (1.67):

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\perp w} &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_\perp(t) \exp(-i\omega t) dt = \\ &= (1/2\pi) (2Ze^2 b/m_e) \int_0^{\infty} \cos \omega t [1/(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}] dt. \end{aligned}$$

Возникший здесь интеграл можно выразить через некоторую бесконечную функцию от мнимого аргумента. Чтобы не вдаваться в детали теории специальных функций, ограничимся простой интерполяцией интеграла

$$A = \int_0^{\infty} dt \cos \omega t / (b^2 + v^2 t^2)^{3/2},$$

основанной на следующих рассуждениях. При достаточно малых частотах  $\omega \ll v/b$  в сущностной области интегрирования  $t \leq b/v$

(т. е. при таких  $t$ , когда знаменатель полиномиального выражения еще не успевает слишком сильно вырасти) можно положить  $\cos \omega t \approx 1$ . Тогда интеграл берется и равен

$$A(\omega \ll v/b) \approx 1/bv.$$

В противоположном предельном случае больших частот  $\omega \gg v/b$  в той же существенной области интегрирования  $t \geq b/v$  можно только учесть, что полиномиальное выражение оказывается знакопеременным и интеграл становится очень малым (экспоненциально, как следует из теории бесселевых функций). В этом можно было бы убедиться и с помощью прямых вычислений, например по методу перевала.

В итоге для приближенной оценки интенсивности тормозного излучения направляется простая интерполяционная формула, объединяющая оба предельных случая:

$$A(\omega) \approx \begin{cases} 1/b^2 v & \text{при } \omega < v/b, \\ 0 & \text{при } \omega > v/b. \end{cases}$$

Соответственно энергию, излученную при столкновении с прицельным параметром  $b$  в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , приближенно можно представить в виде

$$W(\omega) d\omega \approx (8/3) (2Ze^2 c / \pi b^2 v^2) r_0^2 d\omega,$$

где  $r_0 = e^2/mc^2$  — классический радиус электрона. Безразмерная величина  $W(\omega) d\omega / \hbar$  определяет вероятность излучения кванта с частотой в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Теперь нетрудно получить эффективное сечение излучения такого кванта, если проинтегрировать по всем возможным прицельным расстояниям:

$$\begin{aligned} d\sigma(\omega) &= \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} (W(\omega) / \hbar \omega) d\omega 2\pi b db \approx \\ &\approx (16/3) (2^2 e^2 c^2 / \hbar \omega^2) r_0^2 (d\omega / \omega) \ln(b_{\min}/b_{\max}). \end{aligned}$$

В этом выражении в отличие от формулы кулоновского логарифма  $b_{\max}$ , вообще говоря, уже не имеет смысла лебедевского радиуса  $r_D$ . Действительно, поскольку  $W(\omega)$  равно нулю при  $\omega > v/b$ , то всегда  $b_{\max}$  во всяком случае меньше  $v/\omega$ .

Таким образом, при  $v/\omega < r_D$  следует обрезать логарифм при  $b_{\max} = v/\omega$ . Именно так обстоит дело во всех практически интересных случаях  $\omega \gg \omega_p$ . Если в этом, по существу чисто классическом, выводе учсть возможные квантовые эффекты хотя бы самым примитивным образом, положив  $b_{\min}$  равным длине волны де-Броиля электрона  $\hbar/mv$ , то окончательное выражение для сечения тормозного излучения

$$d\sigma(\omega) \approx d\omega (16/3) (2^2 e^2 / \hbar \omega^2) (c^2 / v^2) (r_0^2 / \omega) \ln(m_e v^2 / \hbar \omega) \quad (1.68)$$

оказывается почти совпадающим с результатом квантовомеханических вычислений в борновском приближении. Если же интересоваться более тонкими деталями, то следовало бы обратиться к довольно громоздкому выражению, полученному в свое время Зоммерфельдом путем строгих вычислений. Во всяком случае формула (1.68) правильно описывает зависимости от  $Z$ ,  $e^2$  и скорости электронов. Из нее следует, что электрон при движении в веществе за 1 с теряет на излучение энергию

$$d\omega_e/dt = \int_0^{\hbar_e = m_e v_e^{1/2}} \hbar_e n_i v ds (\omega) = B n_i Z^2 (v_e)^{1/2}, \quad (1.69)$$

где численный множитель  $B$ , получающийся с учетом теории Зоммерфельда, равен  $1,5 \cdot 10^{-25}$ , если кинетическую энергию электрона  $v_e$  выражать в электронвольтах. Интенсивность тормозного излучения плазмы находят, интегриру выражение (1.69) по энергетическому распределению электронов. При максвелловском законе распределения полная энергия, которую излучает 1 см<sup>3</sup> плазмы в 1 с, должна составлять

$$q_{\text{нагл}} = 1,5 \cdot 10^{-27} n_i n_i Z^2 (T_e^\circ)^{1/2}. \quad (1.70)$$

В плазме, содержащей ионы нескольких веществ,  $q_{\text{нагл}}$  будет представляться суммой выражений вида (1.70) со значениями  $n_i$  и  $Z$ , соответствующими разным компонентам. Из формулы (1.70) следует, в частности, что присутствие даже очень незначительной примеси тяжелых ионов в плазме, которая в основном содержит ионы легкого вещества, должно приводить к резкому возрастанию интенсивности тормозного излучения.

Выражение (1.70) для интенсивности тормозного излучения справедливо с достаточной точностью при не слишком высоких значениях  $T_e$ , когда электроны можно считать нерелятивистскими. Однако оно нуждается в корректировке при переходе к релятивистским электронным температурам (т. е. для значений  $T_e^\circ \sim 10^\circ$  и выше). В этой области температур интенсивность излучения, обусловленного взаимодействием электронов с кулоновским полем ядер, растет с  $T_e$  быстрее, чем это следует из формулы (1.70). Кроме того, при релятивистских скоростях столкновения электронов с электронами также приводят к увеличению тормозного излучения. Выше такие столкновения не учитывались при вычислении тормозного излучения, из-за тождественного обращения в нуль второй производной по времени от дипольного момента системы, состоящей из электронов.

Излучение с непрерывным спектром возникает в плазме также в результате процессов рекомбинации электронов с ионами. В электо-релятивистском акте рекомбинации свободный электрон в результате взаимодействия с электрическим полем иона захватывается на

один из дискретных энергетических уровней. При этом излучается фотон с энергией, равной  $\omega_e + \omega_s$ , где  $\omega_s$  — энергия связи электрона на занятом им квантовом уровне. Заряд иона в акте рекомбинации уменьшается на единицу (в частности, рекомбинация однозаряженного иона приводит к образованию нейтрального атома). Захват электрона может происходить не только на наименший возможный энергетический уровень, но также и на уровня, соответствующие различным возбужденным состояниям атомной системы с зарядом  $(Z_i - 1)e$ . Поэтому после актов рекомбинации может происходить высвечивание возбужденных ионов (или атомов) с испусканием фотонов, принадлежащих к линейному спектру излучения вещества плазмы.

Интенсивность рекомбинационного излучения уменьшается с увеличением кинетической энергии электрона и очень сильно зависит от заряда ионов.

Для грубой оценки энергии, излучаемой в сплошном спектре в результате процессов рекомбинации в 1 см<sup>3</sup> плазмы за 1 с, можно пользоваться формулой

$$q_{\text{рек}} \approx 5 \cdot 10^{-22} n_e n_i Z_i^4 (T_e)^{-1/2}. \quad (1.71)$$

В общем случае в правой части выражения (1.71) надо заменить  $n_i Z_i^4$  на  $\Sigma n_i Z_i^4$ , распространяя суммирование на все разновидности ионов, присутствующих в плазме. Заметим, что при достаточно большом времени жизни иолов в плазме благодаря конкурирующим процессам ионизации — рекомбинации среднее значение заряда иона данного вещества должно приближаться к некоторому стационарному значению, которое тем ближе к  $Z$ , чем выше заряд электрона температура. Как следует из сравнения формул (1.70) и (1.71), в плазме с относительно невысокой электронной температурой рекомбинационное излучение должно преобладать над тормозным, в то время как при большом значении  $T_e$  имеет место обратное явление.

В низкотемпературной плазме с небольшой степенью ионизации главным источником квантового электромагнитного излучения становятся возбужденные атомы и молекулы. Поэтому излучение холодной плазмы имеет преимущественно линейчатый характер. При малых значениях  $T_e$  интенсивность линейчатого спектра излучения может на несколько порядков превосходить интенсивность сплошного спектра рекомбинационного и тормозного излучений. Поскольку состав линейчатого спектра и интенсивность входящих в него спектральных линий чрезвычайно сильно зависят от индивидуальных свойств атомов и ионов плазмы, то трудно установить общие количественные закономерности, характеризующие зависимость выхода линейчатого излучения от электронной температуры (в особенности для плазмы, содержащей атомы различных элементов). Однако можно отметить одну общую закономерность качественного характера — при достаточно высокой электронной тем-

пературе в плазме, находящейся в стационарных условиях, у атомов оторваны внешние электронные оболочки, и это приводит к обеднению спектра и быстрому падению интенсивности линейчатого излучения.

Здесь действуют две причины: во-первых, уменьшается число легко возбуждаемых электронов, находящихся в связанном состоянии, и, во-вторых, при больших значениях энергии электронов падает вероятность элементарных актов возбуждения. Вследствие этого в области высоких значений интенсивности излучения предстает собой быстро убывающую функцию электронной температуры. Иллюстрацией может служить приведенная на рис. 1.10 кривая изменения интенсивности линейчатого спектра ионов углерода в плазме, рассчитанная теоретически.

Рис. 1.10. Зависимость интенсивности линейчатого излучения для углеродной плазмы (штриховая кривая) и полное излучение (сплошная кривая)

Если плотность плазмы и геометрические размеры той области пространства, которую она занимает, невелики, то все излучение, образующееся в плазме, выходит наружу. Предположим, что при постоянных плотности и температуре плазмы занимаемый ею объем возрастает. При этом выход излучения будет увеличиваться пропорционально объему. Но полный поток излучения из плазмы не может превосходить поток излучения черного тела, имеющего ту же поверхность  $S$  и ту же температуру  $T_e$ . Следовательно, при достаточно больших размерах области, занимаемой плазмой, должна вступить в действие процессы поглощения, замедляющие рост потока излучения и приводящие к установлению термодинамического равновесия между электронами и излучением. Существует несколько различных элементарных механизмов поглощения излучения, каждый из которых может рассматриваться как обратный по отношению к одному из механизмов испускания фотонов.

Излучательному переходу между двумя дискретными уровнями в атоме или ионе соответствует селективное поглощение спектральных линий, приводящее к обратному электронному переходу. Процесс рекомбинации отвечает процессу фотоионизации атома или иона. Тормозному излучению соответствует обратный механизм, заключающийся в поглощении фотона свободным электроном в электрическом поле атомной системы. Вероятность различных процессов поглощения связана с вероятностями соответствующих излучательных переходов на основе принципа детального равновесия.

Для того чтобы найти, на каких длинах устанавливается теплое равновесие между тормозным излучением и обратным ему про-

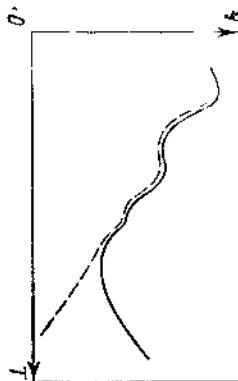


Рис. 1.10. Зависимость интенсивности линейчатого излучения для углеродной плазмы (штриховая кривая) и полное излучение (сплошная кривая)

$T_e$  интенсивность линейчатого излучения представляет собой быстро убывающую функцию электронной температуры. Иллюстрацией может служить приведенная на рис. 1.10 кривая изменения интенсивности линейчатого спектра ионов углерода в плазме, рассчитанная теоретически.

Если плотность плазмы и геометрические размеры той области пространства, которую она занимает, невелики, то все излучение, образующееся в плазме, выходит наружу. Предположим, что при постоянных плотности и температуре плазмы занимаемый ею объем возрастает. При этом выход излучения будет увеличиваться пропорционально объему. Но полный поток излучения из плазмы не может превосходить поток излучения черного тела, имеющего ту же поверхность  $S$  и ту же температуру  $T_e$ . Следовательно, при достаточно больших размерах области, занимаемой плазмой, должна вступить в действие процессы поглощения, замедляющие рост потока излучения и приводящие к установлению термодинамического равновесия между электронами и излучением. Существует несколько различных элементарных механизмов поглощения излучения, каждый из которых может рассматриваться как обратный по отношению к одному из механизмов испускания фотонов.

Излучательному переходу между двумя дискретными уровнями в атоме или ионе соответствует селективное поглощение спектральных линий, приводящее к обратному электронному переходу. Процесс рекомбинации отвечает процессу фотоионизации атома или иона. Тормозному излучению соответствует обратный механизм, заключающийся в поглощении фотона свободным электроном в электрическом поле атомной системы. Вероятность различных процессов поглощения связана с вероятностями соответствующих излучательных переходов на основе принципа детального равновесия.

Учитывая теперь наряду с излучением (1.68), (1.69) и поглощение, получаем

$$\frac{dW(\omega)}{dt} = \langle n_e n_{\nu} (16/3) (Z^2 e^2 / c) \times$$

$$\times (c^2 / \nu^2) r_0^2 \ln (m_e v^2 / \omega \hbar) \rangle - W(\omega) / \tau_{\phi}$$

(Угловые скобки означают усреднение по максвелловскому распределению электронов)

имеют дело с такими условиями эксперимента, при которых пребывание фотонов во много раз превышают линейные размеры плазменных образований (в некоторых специальных случаях, когда исследуется очень плотная плазма, узкая спектральная область близи линии поглощения может представлять исключение). В таких оптически прозрачных плазмах фотоны не удерживаются и плотность энергии излучения значительно меньше равновесной, т. е. плотности черного излучения. По мере увеличения размеров плазменного образования сначала должно устанавливаться равновесие для малых частот, как это следует из формулы (1.68).

Черное излучение может устанавливаться лишь внутри пространственно протяженных или достаточно плотных плазм, например в звездах. В таких плазмах при очень высоких температурах черное излучение может давать основной вклад в плотность энергии (а значит и в давление). Так, при плотности частиц в звездах порядка  $10^{24} \text{ см}^{-3}$  плотность энергии излучения  $aT^4$  превышает  $nT$ , если температура становится больше десятка килоэлектронвольт. Это условие не выполняется для Солнца, температура в центре которого порядка 1,5 кэВ. Но и в солнечной плазме черное излучение играет важную роль. В частности, механизм переноса тепла во внутренних слоях Солнца в значительной степени определяется черным излучением. Такой перенос тепла квантами из спектра черного излучения называют **лучистой теплопроводностью**. Коэффициент лучистой теплопроводности нетрудно определить, если известны средний пробег фотонов вблизи максимума распределения Планка  $\lambda \sim 5 kT$ . Коэффициент диффузии таких фотонов  $D_{\phi} = (1/3) l_{\phi}^2$ . Поток фотонов равен  $-D \text{ grad } \Phi$ . Поток энергии, переносимый фотонами,

$$q_{\phi} \approx -D \text{ grad } (\hbar \omega \Phi),$$

где  $\rho_{\phi}$  — плотность энергии черного излучения  $aT^4$ . Таким образом,  $\Phi \approx -4DaT^3$  град  $T$ . Это означает, что коэффициент линейной теплопроводности  $\kappa \sim (4/3)l_{\phi}aT^3$ .

Пробег фотонов в такой плазме, как солнечная, определяется в основном механизмом поглощения, обратным тормозному излучению. Его можно связать со средним временем свободного пролета  $\tau_{\phi}$  фотонов  $l_{\phi} = c\tau_{\phi}$ .

Интересующую нас величину  $\tau_{\phi}$  найдем из условия, что в равновесии между электронами и излучением  $W(\omega)$  должно представить собой распределение Планка. Следовательно,

$$\Phi \approx W_{\pi}/(n_e n_i (16/3)(Z^2 e^2/c)(c^3/v^3) r^2 v \ln(mv^2/k_B T)). \quad (1.72)$$

Для мягких фотонов ( $\hbar\omega < T_e$ ), которые могут излучаться электронами, принадлежащими максвелловскому распределению, формулу (1.72) можно привести к совсем простому виду. Распределение Планка превращается в спектр Рэлея — Джинса  $W(\omega) = T^{3/2}/\pi^2 c^3$ , а угловые скобки, символизирующие усреднение по максвелловскому распределению электронов, можно убрать, прислав  $v_e$  смысл средней тепловой скорости  $(3/2)kT = mv_e^2/2$ . Таким образом, находим, что

$$l_{\phi} = c\tau_{\phi} \sim c(\omega^2/\omega_p^2) \tau_{ei}^*. \quad (1.72a)$$

Величина  $\tau_{ei}^*$  отличается от среднего времени столкновения электрона с ионом лишь тем, что вместо кулоновского логарифма  $L_K$  здесь стоит, вообще говоря, несколько меньшая величина.

Этот результат можно получить достаточно простоим способом, используя минимую часть диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon = 1 - \omega^2/\omega(\omega + i\nu_e).$$

До сих пор мы исследовали электромагнитное излучение в плазме. Но мы уже знаем, что в плазме кроме электромагнитных колебаний возможны также колебания плотности заряда — плазменные волны, и естественно ожидать, что часть потерь энергии заряженной частицы в плазме будет связана с возбуждением продольных колебаний — поляризационными потерями. Важная особенность поляризационных потерь состоит в том, что основная доля энергии, теряемой в этом случае заряженной частицей, остается в плазме в виде колебаний плотности заряда и в конечном счете усваивается плазмой в результате поглощения при соударениях либо затухании Ландау плазменных колебаний. Однако не следует забывать, что в неоднородной плазме существует и другой механизм — трансформация в электромагнитные колебания (см. § 1.7).

Поляризационные потери можно также интерпретировать как потери энергии при кулоновских столкновениях с большими цельными параметрами, когда из-за дальнодействующего характера кулоновских сил во взаимодействие с налетающей частицей

может одновременно вовлекаться большое число частиц плазмы. С макроскопической точки зрения это обстоятельство проявляется в поляризации плазмы как сплошной среды при пролете заряженной частицы, т. е. в возбуждении уже знакомых нам плазменных колебаний.

Для иллюстрации механизма поляризационных потерь ограничимся для простоты случаем нерелятивистических скоростей частицы. Перейдем к Фурье-представлению электрического потенциала колебаний, вызываемых такой заряженной частицей:

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = (1/2\pi)^* \int dk \delta(\omega) \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t\} \varphi_{\mathbf{k}\omega}. \quad (1.73)$$

Плотность заряда, создаваемая точечным зарядом, движущимся со скоростью  $\mathbf{v}$ , определяется как  $\rho_e = -e\delta(\mathbf{r} - vt)$ . Разложим  $\delta(\mathbf{r} - vt) = (1/2\pi)^* \int \int \delta(\omega - k\mathbf{v}) \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t\} dk d\omega$ .

Тогда Фурье-компоненты плотности заряда  $-e\delta(\mathbf{r} - vt)$  есть

$$\rho_e^{\omega} = -2\pi e \delta(\omega - k\mathbf{v}). \quad (1.74)$$

Воспользуемся уравнением Пуассона, записанным для каждой Фурье-компоненты:

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) k^2 \varphi_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi \rho_e^{\omega}, \quad (1.75)$$

причем  $\epsilon(\omega) = 1 - \omega^2/\omega_p^2$  — обычная диэлектрическая проницаемость холодной плазмы для волны с фиксированной частотой [см. (1.35)]. Тогда для отдельной Фурье-гармоники потенциала имеем следующее уравнение:

$$\Phi_{\mathbf{k}\omega} = -(8\pi^2 e / \epsilon(\omega)) k^2 \delta(\omega - k\mathbf{v}). \quad (1.76)$$

Отсюда сразу следует, что заряженная частица возбуждает только те гармоники потенциала, которые находятся в фазовом резонансе с этой частицей, т. е. скорость движения частицы в направлении распространения волны должна совпадать с фазовой скоростью волны  $k v \cos \theta = \omega$ . Мощность излучения определяется формулой

$$dW/dt = -j\overline{E}, \quad (1.77)$$

где  $j = -ev\delta(\mathbf{r} - vt)$  — плотность тока, создаваемая движущимся электроном;  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  — электрическое поле плазменных колебаний, черта в правой части (1.77) соответствует усреднению по постоянным, большим по сравнению с длиной волны. С помощью (1.76) получим

$$dW/dt = 8\pi^2 e^2 v / (2\pi)^4 \int dk \delta(\omega) (\mathbf{k}/k^2 \epsilon(\omega)) \delta(\omega - k\mathbf{v}). \quad (1.78)$$

Полынграульное выражение имеет особенность при частотах  $\omega = \pm \omega_p$ . Эта особенность аналогочна рассмотривавшейся в § 1.7 и имеет резонансный характер. Однако если при распространении электромагнитной волны в неоднородной плазме резонанс имеет пространственный характер [возникает в слое  $\omega_p(z) = \omega$ ], то в эффекте поляризационных потерь резонанс возникает в спектре по частотам (при интегрировании по частоте). Для устранения особенности подынтегрального выражения по аналогии с § 1.7 введем малое затухание. Тогда с учетом мнимой части  $\varepsilon(\omega)$  получим

$$1/\varepsilon(\omega) = \omega_p^2 / (\omega^2 - \omega_p^2 + i\omega).$$

Кроме действительной части это выражение имеет мнимую часть, которую в пределе  $v \rightarrow 0$  можно представить как

$$\lim_{v \rightarrow 0} \operatorname{Im} [1/(\omega^2 - \omega_p^2 + i\omega)] = -\pi \delta(\omega^2 - \omega_p^2).$$

Согласно формуле (1.78) в интегrale, определяющем мощность потерь, существует только вклад от  $\delta$ -функции. Выполнив интегрирование, придем к следующей формуле для мощности потерь:

$$dW/dt = 16\pi e^2 \omega_p^2 / (2\pi)^4 \int dk \delta(\omega - kv)/k^2. \quad (1.79)$$

Для получения окончательной формулы следует проинтегрировать в (1.79) по  $k_\parallel$  и по  $k_\perp$ . Последний интеграл логарифмически расходится при больших  $k_\perp$ , и его необходимо обрезать при  $k_{\max} \sim 1/b$ . Здесь  $b$  — минимальный приспособленный параметр «столкновений», т. е. расстояние, на котором становится не применимым описание плазмы как сплошной среды. Очевидно, что  $b$  порядка радиуса лебаевского экранирования заряда  $r_0 = (T/4\pi e^2 n_0)^{1/2}$ . Окончательный результат для скорости потерь имеет вид

$$dW/dt = (e^2 \omega_p^2 / v) \ln(v/\omega_p b). \quad (1.80)$$

Величина, стоящая над знаком логарифма в этой формуле, — отношение скорости частицы к тепловой скорости, т. е. порядка 10–100. Поэтому  $\ln(v/\omega_p b)$  по порядку величины не сильно отличается от единицы. В этой связи напомним, что потери энергии на парные соударения с учетом многократного рассеяния по сравнению с формулой (1.80) содержат больший множитель — так называемый кулоновский логарифм, т. е. величину порядка 20. Подобно тому как рассеяние на тепловых флуктуациях в кулоновской логарифм раз меньше рассеяния при парных столкновениях, потери энергии на излучение плазменных волн (поляризационные потери) в кулоновской логарифм раз меньше потерь энергии при парных столкновениях. Следует иметь в виду, что поляризационные потери существенно увеличиваются при переходе от отдельных зарядов к пучкам заряженных частиц. В этом случае в актах излучения участвуют не отдельные электроны, а «бунца» (сгустки) когерент-

но излучающих частиц, на которые разбивается пучок из-за неустойчивости. При этом в формуле (1.80) для мощности потерь следует заменить  $e$  на  $N_{\text{аф}} e$ , где  $N_{\text{аф}}$  — число частиц в бунце, и соответственно этому потери, рассчитанные на одну частицу, возрастают пропорционально  $N_{\text{аф}} (N_{\text{аф}} \gg 1)$ . Самой сложной задачей является определение эффективного заряда бутика. Эту задачу можно решить только в рамках самосогласованной теории неустойчивости, основывающейся на кинетическом подходе.

### § 1.9. Кинетическое уравнение для плазмы

Идеальную плазму можно, как и обычный газ незаряженных частиц, описывать с помощью кинетического уравнения для функции распределения частиц в фазовом пространстве. В этом случае, разумеется, нужно вводить свою функцию распределения для каждого сорта зарядов. В координатной записи функция распределения  $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$  определяет плотность частиц на единицу объема в фазовом пространстве вблизи точки с геометрическими координатами  $x, y, z$  и компонентами скоростей  $v_x, v_y, v_z$  для момента времени  $t$ . Используем более компактную форму записи, в которой функция распределения имеет вид  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  и относится к точке с векторными координатами  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ . Интеграл от функции распределения по всему объему в пространстве скоростей дает плотность в данном элементе геометрического объема

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}.$$

Как показано выше, на заряженные частицы плазмы могут воздействовать силовые поля двух типов: а) регулярные поля, создаваемые внешними источниками или избыточными зарядами в объемах с размерами, превышающими длину (как, например, для колебаний плазмы), и б) случайные микрополя отдельных частиц, вызывающие процессы рассеяния (столкновения). Кинетическое уравнение описывает изменение функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  во времени под действием указанных полей. Допустим сначала, что микрополя относительно слабо влияют на процессы в плазме (это справедливо для плазмы с низкой концентрацией и очень высокой электронной и ионной температурой). В этом случае изменение  $f$  в некотором заданном элементе фазового объема происходит вследствие того, что каждая фазовая точка, изображающая отдельную частицу, непрерывно перемещается в геометрическом пространстве и пространстве скоростей. Причиной движения в пространстве скоростей может быть наличие в плазме макроскопического электрического поля  $\mathbf{E}$  (в общем случае  $\mathbf{E}$  — функция геометрических координат). Вычислив потоки частиц, входящих в элементарный объем фазового пространства и выходящих из него, нетрудно получить уравнение баланса ча-

$$\partial f / \partial t = -(d\mathbf{r} / dt) (df / d\mathbf{r}) - (d\mathbf{v} / dt) (df / d\mathbf{v}). \quad (1.81)$$

Поскольку  $d\mathbf{v}/dt = q\mathbf{E}/m$ , где  $q$  и  $m$  — соответственно заряд и масса частицы, то (1.81) равносильно уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - (q\mathbf{E}/m)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.82)$$

Это и есть кинетическое уравнение для заряженных частиц плазмы (для электронов или ионов). В формуле (1.82)  $\frac{\partial f}{\partial t}$  обозначает вектор с компонентами  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  и соответственно  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$  есть вектор с компонентами  $\frac{\partial f}{\partial v_x}, \frac{\partial f}{\partial v_y}, \frac{\partial f}{\partial v_z}$ . Перенесем все члены уравнения (1.82) в левую часть и перепишем его в следующем виде:

$$df/dt = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + (q\mathbf{E}/m)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.83)$$

В такой форме кинетическое уравнение имеет наиболее наглядный смысл, так как (1.83) означает сохранение плотности частиц в элементе фазового объема, движущемся вместе с выделенной группой частиц. Формула (1.83) — прямое следствие постоянства числа частиц и величины движущегося фазового объема (фазовый объем сохраняется по теореме Лиувилля, поскольку движение происходит в макроскопическом потенциальном поле).

Электрическое поле в плазме создается не только внешними источниками, но также объемными зарядами электронов и ионов. Вклад объемных зарядов плазмы в напряженность электрического поля учитывается в дополнительном уравнении для  $\mathbf{E}$ :

$$div \mathbf{E} = 4\pi\rho = 4\pi e \left( \int f_i d\mathbf{v} - \int f_e d\mathbf{v} \right). \quad (1.84)$$

Поле  $\mathbf{E}$  в этом уравнении называется самоогласованием (поскольку существует обратная связь между  $\mathbf{E}$  и  $f$ ). Прелебрежение микрополями отдельных частиц, т. е. кулоновскими столкновениями, справедливо, если ограничиться изучением процессов, разыгрывающихся за времена, меньшие среднего времени свободного пробега. Многие быстропротекающие явления в разреженной плазме, где столкновения редки, можно рассматривать в рамках такого приближения: колебания, развитие некоторых видов неустойчивостей и т. п. Система уравнений (1.83) и (1.84), описывающая поведение бесстолкновительной плазмы, широко известна под названием «уравнения Власова».

В случае когда значительную роль в поведении плазмы играют не только макроскопические поля  $\lambda > r_D$ , но и микрополя отдельных частиц, ответственные за процессы кулоновского рассеяния, равнество (1.83) перестает быть справедливым. В отдельном акте кулоновского столкновения вектор скорости электрона (или иона) испытывает конечное изменение, и частица перебрасывается из одной области пространства скоростей в другую. Поэтому в малом элементе фазового объема, который движется вместе с принадлежащими к нему частицами вдоль фазовой траектории, определяемой действием макроскопического поля, полное число частиц в общем случае не должно оставаться постоянным. Учитывая роль кулоновских столкновений, заменим (1.83) следующим соотношением:

$$df/dt = St\{f\}. \quad (1.85)$$

Выражение, стоящее в правой части, называется интегралом столкновений. Для того чтобы найти этот интеграл, нужно вычислить результатирующий эффект миграции частиц в пространстве скоростей, происходящий вследствие процессов кулоновского рассеяния. Не будем приводить здесь явное выражение для строгого интеграла столкновений не только потому, что такие вычисления выходят за рамки данной книги, но и потому, что многие свойства плазмы можно выяснить с помощью более простых приближений. К наибольшим упрощениям ведет интерполяция интеграла столкновений формулой

$$St\{f\} = (f_0 - f)/\tau. \quad (1.86)$$

Это так называемое  $\tau$ -приближение в кинетической теории. В выведенной формуле  $\tau$  обозначает среднее время свободного пробега частиц.

В правой части (1.86)  $f_0$  — равновесная максвелловская функция распределения. Физический смысл правой части уравнения (1.86) заключается в том, что в результате столкновений восстанавливается максвелловское распределение по скоростям, экспоненциально приближающееся к  $f_0$  с характерным временем установления  $\tau$ . Как видно из рассмотрения столкновений между столкновителями плазмы, понятие  $\tau$  как среднего времени между столкновениями неоднозначно. Различные процессы в плазме характеризуются разными  $\tau$ , причем это различие может быть чрезвычайно большим. Так, время обмена энергиами между электронами и ионами приблизительно в  $m_i/m_e$  раз больше времени потери импульса электронами при соударении с ионами. Даже для одинаковых частиц время столкновения зависит еще и от скорости. Это означает, что пользоваться кинетическим уравнением в  $\tau$ -приближении следует весьма осторожно. Выбирать  $\tau$  в интерполяционной формуле, заменяющей интеграл столкновений, нужно в зависимости от конкретной постановки задачи. Так, например, в задаче о законе Ома следует выбрать  $\tau$  равным среднему времени потери импульса электронами при столкновениях с ионами.

Покажем, как с помощью кинетического уравнения для электронов в  $\tau$ -приближении можно получить формулу для электропроводности. В этом случае кинетическое уравнение имеет вид

$$(e\mathbf{E}/m_e)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = (f_0 - f)/\tau_{ei}. \quad (1.87)$$

Пусть  $f = f_0 + f_1$ . При достаточно малом электрическом поле второй член представляет собой лишь относительно небольшую добавку к  $f_0$ , и поэтому можно пренебречь произведением двух малых со- множителей  $(e\mathbf{E}/m_e)\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}$ . Тогда

$$(e\mathbf{E}/m_e)\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = -f_1/\tau_{ei}. \quad (1.88)$$

Отсюда  $f = -e \int \mathbf{v} f_1(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = (e^2 \mathbf{E}/m_e) \tau_{ei} \int f_0 d\mathbf{v} = (ne^2/m_e) \tau_{ei} \mathbf{E}$ , т. е. приходим к выведенной в § 1.5 формуле электропроводности.

Теперь раскроем смысл приближения слабого электрического поля. Условие  $f_1 \ll f_0$  можно объяснить с помощью формулы (1.88), пользуясь тем, что по порядку величины  $\partial f_0 / \partial v \sim f_0 / v^2$ . В итоге получаем  $(eE/m_e)(T_{ei}/v_T) \ll 1$  или  $(eE/T_e)k_{ei} \ll 1$ . Это значит, что энергия, приобретаемая электроном в электрическом поле на длине свободного пробега, должна быть намного меньше тепловой.

При нахождении коэффициента электронной теплопроводности нужно учитывать столкновения электронов друг с другом и с ионами. Напротив, в задаче об ионной теплопроводности плотностью ионизованной плазмы  $\tau$  — среднее время столкновения иона с ионами, столкновения же ионов с электрополями здесь можно не учитывать, так как ионы практически не рассеиваются на электронах. В тех случаях, когда существенны столкновения заряженных частиц с нейтральными атомами и молекулами, вводятся другие характерные времена  $\tau$ . Следует еще раз подчеркнуть, что каждую из этих задач можно устранить при корректном подходе к отдельным конкретным задачам о поведении плазмы в различных физических процессах.

Для определения коэффициента теплопроводности воспользуемся методом кинетического уравнения. Если плазма находится в стационарном состоянии, а внешнее электрическое поле отсутствует, то

$$v \partial f / \partial x = (f_0 - f) / \tau. \quad (1.89)$$

Здесь  $x$  — направление градиента температуры. Для достаточно плотной плазмы, в которой длина свободного пробега  $l \sim \sigma T$  мала по сравнению с характерными линейными размерами, функцию можно разложить в ряд по степеням малого параметра  $\tau$ :  $f = f_0 + f_1 + \dots$ , где  $f_0$  — максвелловская функция распределения\*,

$$\mathbf{f}_0 = n(m/2\pi T)^{1/2} \exp(-mv^2/2T(x)).$$

В следующем приближении имеем

$$\begin{aligned} f_1 &= -v \partial f_0 / \partial x = [-n v (m/2\pi)^{1/2}] \times \\ &\times (mv^2/2T^{5/2} - 1/2T^{3/2}) \exp(-mv^2/T) \partial T / \partial x. \end{aligned}$$

Каждая компонента плазмы переносит поток тепла

$$q = \int (v/2) mv^2 f(v) dv = \int (v/2) mv^2 f_0 dv - \int (v/2) mv^2 f_1 dv.$$

Первый из этих интегралов равен нулю. Вычислив второй интеграл, находим, что

$$q = 3\pi k (T/m) \partial T / \partial x. \quad (1.90)$$

Суммарный поток тепла для плазмы получается, если сложить потоки тепла, которые переносятся электронами и ионами. Однако

\* Этот упрощенный расчет выполняется для одномерной модели плазмы.

из (1.90) следует, что ионный поток тепла исчезает мал по сравнению с электрополем (так как  $m_e/m_i \ll 1$ ). Поэтому коэффициент теплопроводности плазмы

$$\kappa = 3\pi k (T_e/m_e). \quad (1.91)$$

где  $\tau$  — время между двумя столкновениями для электронов. Здесь нужно учитывать любые столкновения электронов (как друг с другом, так и с ионами). Но поскольку  $\tau_{ee} \sim \tau_{ei}$ , то порядок величины не изменится, если положить

$$\kappa \approx (3/2) \pi k T_{ei} (T_e/m_e). \quad (1.92)$$

Правильный численный множитель в этом выражении для коэффициента теплопроводности дает строгая кинетическая теория с точным, а не приближенным интегралом столкновений. Не проводя здесь слишком громоздких вычислений, приведем результат такой строгой теории:

$$\kappa = 3.203 (n T_e \tau_{ei} / m), \quad (1.93)$$

где  $\tau_{ei} = (3.5 \cdot 10^6 / L_s) (T_s^{3/2} / n)$ . Таким образом, в плазме посителями тепла и электрического тока являются электроны (по крайней мере в отсутствие магнитного поля).

В этом смысле плазма близка по своим свойствам к металлам. Естественно, что и для плазмы справедлив аналог закона Видемана — Франца, утверждающий, что отношение коэффициента теплопроводности к коэффициенту электропроводности пропорционально температуре. Это следует из (1.22) и (1.93).

Однако упрощенная форма интеграла столкновений в  $\tau$ -приближении хотя и описывает уставновление максвелловского распределения, но не отражает основную особенность кулоновского рассеяния, которая приводит к медленному («диффузионному») изменению вектора скорости частиц, имеющему место в результате многократного рассеяния на малые углы. Л. Д. Ландау привел интеграл столкновений между заряженными частицами в специальной диффузионной форме (напоминающей диффузию по Фоккеру — Планку), учитывая рассеяние частиц только на очень малые углы. Но даже этот вывод довольно громоздок. Воспользуемся некоторыми дополнительными упрощениями, чтобы проиллюстрировать идею диффузионного подхода к интегралу столкновений. При этом ограничимся рассмотрением функции распределения, зависящей лишь от одной компоненты скорости  $f(v)$  (это значит, что по двум другим составляющим скорости проведено интегрирование), и будем считать, что рассеивающие заряженные частицы находятся в состоянии теплового равновесия с некоторой температурой  $T$ .

В диффузионном приближении влияние многочленов диффузии приводят, во-первых, к появлению силы динамического трения  $F_{tr} = -mv$  и, во-вторых, к диффузионному блужданию скопления

рости рассеиваемой частицы под действием толчков, создаваемых тепловым движением рассеивающих зарядов. Соответственно в интеграле столкновений появятся два члена. Один из них, который описывает регулярное изменение скорости из-за силы трения  $d\mathbf{v}/dt = -\mathbf{uv}$ , дает в левой части кинетического уравнения слагающее  $\partial(\partial\mathbf{v}/\partial t)/\partial v$ , т. е.  $-\partial(\mathbf{v}\mathbf{v})/\partial v$ . Оно совершенно аналогично члену  $\operatorname{div}_{\mathbf{r}}((d\mathbf{r}/dt)\mathbf{n})$ , т. е.  $\operatorname{div}(\mathbf{v}\mathbf{n})$ , в обычном уравнении непрерывности. Поэтому нет нужны в более строгом доказательстве. Другой член описывает диффузию  $\partial(D(v)\partial f/\partial v)/\partial v$  с некоторым коэффициентом  $D(v)$ , который можно выразить через ту же частоту столкновений  $v$ , вводя эффективный шаг блужданий скорости  $D(v) = \Delta v^2 v$ . Строгое рассмотрение многократного рассеяния должно дать величину  $\Delta v^2$ . Однако при сделанном выше упрощающем предположении о том, что рассеивающие частицы имеют определенную температуру  $T$ , ответ получить еще легче. Под действием столкновений с рассеивающими зарядами, по сути дела играющими роль термостата, функция распределения  $f(v)$  рассеиваемых частиц должна стремиться к максвелловской с температурой термостата  $T$ , так что интеграл столкновений

$$St\{f\} = (\partial/\partial v) [-\mathbf{v}\mathbf{v}f + D(v)\partial f/\partial v] \quad (1.94)$$

должен обращаться в нуль в тех случаях, когда функция распределения  $f$  совпадает с максвелловской:

$$f_0 = \text{const. exp}(-mv^2/2T).$$

Отсюда находим, что

$$D(v) = -(T/m)v \quad (1.95)$$

и диффузионный интеграл столкновений

$$St\{f\} = -(\partial/\partial v) [\mathbf{v}(v\mathbf{v} + (T/m)\partial f/\partial v)].$$

Полученный результат весьма просто обобщается на трехмерный случай, когда тензор коэффициентов диффузии

$$D_{\alpha\beta} = \langle \Delta v_{\alpha} \Delta v_{\beta} \rangle / \Delta t,$$

вид которого также можно определить из условия обращения в нуль интеграла столкновений для равновесной максвелловской функции распределения с температурой, равной температуре термостата:

$$D_{\alpha\beta} = -(T/m_{\alpha}) \mathbf{v}(\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{v}_{\beta} / v^2). \quad (1.96)$$

Учитывая также возможность столкновения электронов с нескользящими рассеивающими центрами, интеграл столкновений записем в виде

$$St\{f\} = - \sum_{f, \alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} \{v_{\beta} [v_{\alpha} f + (T/m_{\alpha})(v_{\alpha} v_{\beta} / v^2) (\partial f / \partial v_{\beta})]\}. \quad (1.97)$$

В некоторых случаях, когда под действием каких-либо внешних факторов (например, плазменной волны) в некоторой области пространства скоростей у функции распределения рассеиваемых частиц появляются большие градиенты, в интеграле столкновений для этой области скоростей достаточно удерживать только вторую производную. В этом случае эфективной оказывается следующая форма интеграла столкновений:

$$St\{f\} = -v^2 \mathbf{v} (\partial^2(f - f_0) / \partial v^2), \quad (1.98)$$

которая также описывает установление максвелловского распределения  $f_0$ .

Детальный анализ свойств плазмы, связанных с влиянием столкновений и строгим методом кинетических уравнений, слишком громоздок и не входит в задачу авторов книги. Следует иметь в виду, что (как уже отмечалось) для большого круга проблем в физике плазмы (например, связанных с колебаниями и волнами) правая часть кинетического уравнения не существенна, если речь идет о поведении плазмы за времена, значительно меньшие времени свободного пробега.

### § 1.10. Гидродинамическое описание плазмы

Для понимания многих плазменных процессов очень полезной оказывается гидродинамическая модель плазмы, в которой плазма изображается как смесь электронной и ионной жидкостей. Эта модель применима для плазмы, у которой характерный линейный размер  $L$  во много раз превосходит длину свободного пробега  $t_p$ , а характеристическая длительность процессов  $t_p$  велика по сравнению со временем между двумя столкновениями  $\tau$ . Величины  $L$  и  $t_p$  обратно пропорциональны скорости изменения функции распределения частиц в пространстве и во времени:  $1/L \sim (1/t_p)(\partial f / \partial x)$ ,  $1/t_p \sim (\partial f / \partial t)$ . В этом случае, как было показано ранее, функцию распределения  $f$  для каждой компоненты плазмы можно разложить по малому параметру  $t$  или  $\tau$ . В нулевом приближении

$$f = f_0 = (m/2\pi T)^{1/2} n \exp(-m(v-u)^2/2T),$$

где  $n = n(x, t)$ ,  $T = T(x, t)$ ,  $u = u(x, t)$  (для простоты ограничиваемся одномерной задачей). В гидродинамической модели вся информация о локальных свойствах любой компоненты содержится в трех величинах: плотности  $n$ , температуре  $T$  и средней скорости  $u$ , которые пока остаются произвольными функциями  $x$  и  $t$ . Поставляя в кинетическое уравнение разложение для  $f(f = f_0 + f_1 + \dots)$ , получаем в нулевом приближении

$$\partial f_0 / \partial t + v \partial f_0 / \partial x + (qE/m) \partial f_0 / \partial v = St\{f\}. \quad (1.99)$$

Здесь в правой части оставлен интеграл столкновений для полной функции распределения  $f$ , поскольку  $St\{f_0\} = 0$ , а  $St\{f\}$  имеет пульсовой порядок относительно параметра малости  $t/t_p$ . В данном случае  $* St\{f\}$  не является аддитивной функцией аргумента, и поэтому нельзя написать  $St\{f\} = St\{f_0\} + St\{f_1\} + \dots$

чае в уравнении (1.99) мы имеем в виду строгое выражение интеграла столкновений, а не упрощенный вид в  $\tau$ -приближении. При этом нас не должно смущать, что в строгом виде интеграл столкновений весьма громоздок. Как будет видно из дальнейшего, совсем не обязательно знать явный вид интеграла столкновений, можно использовать лишь некоторые его общие свойства — законы сохранения. Ограничимся вначале анализом поведения электронной и ионной компонент плазмы. Процессы ионизации и рекомбинации, вызывающие появление или исчезновение новых заряженных частиц, при этом учитывать не будем.

Чтобы построить гидродинамическую модель, проинтегрируем уравнение (1.99) для выбранной компоненты по всему пространству скоростей. Интегралы от двух первых членов уравнения (1.99) представим в следующем виде:

$$\int (\partial f_i / \partial t) dv = \partial \left( \int f_i dv \right) / \partial t = dn_i / \partial t;$$

$$\int v (\partial f_i / \partial x) dv = \partial \left( \int v f_i dv \right) / \partial x = \partial (n u) / \partial x.$$

Здесь изменен порядок дифференцирования по  $t$  и  $x$  соответственно и интегрирования по  $dv$ , так как в кинетической теории  $f_i$ ,  $x$ ,  $v$  — независимые переменные. При интегрировании третьего члена уравнения (1.99) по частям получается тождественный нуль:

$$\int (\partial f_i / \partial v) dv = 0.$$

Даже без конкретизации вида интеграла столкновений ясно, что при отсутствии ионизации и рекомбинации полное число частиц сохраняется.

Итак, имеем уравнение непрерывности

$$\partial n / \partial t + \partial (n u) / \partial x = 0. \quad (1.100)$$

Умножим теперь уравнение (1.99) на  $v$  и опять проинтегрируем. Поступая так же, как и при выводе (1.100), получаем

$$\partial (n u) / \partial t + \partial \left( \int v^2 f_i dv \right) / \partial x - (q E / m) n = \int v S t \{ f \} dv. \quad (1.101)$$

Если для обеих компонент плазмы (электронной и ионной) средняя скорость  $u$  одинакова, то интеграл  $\int v S t \{ f \} dv$  должен обращаться в нуль, так как не происходит передачи импульса от одной компоненты к другой. При этом условии равенство (1.101) можно с помощью (1.100) привести к виду

$$n m \left( \partial u / \partial t + u \partial u / \partial x \right) = - \partial (n T) / \partial x + q E n. \quad (1.102)$$

Это уравнение Эйлера для заряженной жидкости. Заметим, что в общем случае при наличии электрического поля  $u_i \neq u_e$  и поэтому между компонентами плазмы возникает сила трения. Эту силу, которая для электронной компоненты на единицу объема равна

$$F_{ei} = m_e \int v S t \{ f \} dv,$$

а для ионной компоненты

$$F_{ie} = - F_{ei} = m_i \int v S t \{ f \} dv,$$

нужно прибавлять к правой части равенства (1.102). Наконец, умножая уравнение (1.99) на  $v^2$  и еще раз интегрируя, после несложных выкладок с использованием (1.100) и (1.102) получаем

$$\partial T / \partial t + u \partial T / \partial x + 2 T \partial u / \partial x = 0. \quad (1.103)$$

Это соотношение найдено в предположении о том, что интегралы  $\int v S t \{ f \} dv$  и  $\int v^2 S t \{ f \} dv$  равны нулю. Первое условие справедливо при  $u_i = u_e$ , а второе — при  $T_i = T_e$ . Если  $T_i \neq T_e$ , то происходит обмен тепловой энергией между компонентами плазмы и интеграл  $\int v^2 S t \{ f \} dv$  не обращается в нуль ни для одной из них.

Уравнение (1.103), очевидно, есть не иное, как уравнение одномерной адиабаты ( $\gamma = 3$ ). Действительно,

$$n^2 d(p/m^3) / dt = \partial T / \partial t + u \partial T / \partial x + 2 T \partial u / \partial x = 0,$$

так как  $p = nT$ , а из (1.100)  $dn / dt = -n \partial u / \partial x$ . Для трехмерного случая в результате аналогичных, но более громоздких вычислений можно получить в векторной форме следующую полную систему уравнений «двухжидкостной» плазменной гидродинамики с учетом сил трения:

$$\begin{aligned} \partial n_i / \partial t + \operatorname{div} n_i u_i &= 0; \\ \partial n_e / \partial t + \operatorname{div} n_e u_e &= 0; \end{aligned} \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned} n_i m_i du_i / dt &= -\operatorname{grad} n_i T_i + n_i e E + \mathbf{F}_{ie}; \\ n_e m_e du_e / dt &= -\operatorname{grad} n_e T_e - n_e e E + \mathbf{F}_{ei}. \end{aligned} \quad (1.105)$$

В уравнениях (1.105)  $du / dt = \partial u / \partial t + (\mathbf{u} \operatorname{grad}) \mathbf{u}$ . Векторное обозначение  $(\mathbf{u} \operatorname{grad}) \mathbf{u}$  расшифровывается как вектор с компонентами:

$$\begin{aligned} (u_x \partial u_x / \partial x + u_y \partial u_x / \partial y + u_z \partial u_x / \partial z); \\ (u_x \partial u_y / \partial x + u_y \partial u_y / \partial y + u_z \partial u_y / \partial z); \\ (u_x \partial u_z / \partial x + u_y \partial u_z / \partial y + u_z \partial u_z / \partial z). \end{aligned}$$

Сила трения  $\mathbf{F}$  равна импульсу, передаваемому в единице объема за секунду от частиц одной компоненты плазмы к частицам другой, в  $\tau$ -приближении ее можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{F}_{ei} = -n m_e (u_e - u_i) \mathbf{v}_{ei},$$

где  $\mathbf{v}_{ei}$  — частота столкновений между частицами разного сорта.

Аналог уравнения (1.103) в трехмерном случае имеет вид

$$\partial T / \partial t + \mathbf{u} \operatorname{grad} T + (2/3) T \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.106)$$

(Ему соответствует показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ .) Заметим, что при выводе уравнений основного гидродинамического приближения из кинетического уравнения не обязательно знать явный вид интеграла столкновений. Нет необходимости также вычислять поправку  $f_1$  в явном виде. Знание этой поправки позволило бы нам

найти дисипативные добавки (вязкость, теплопроводность и т. д.) к уравнению (1.102), (1.103) и к трехмерным обобщениям (1.105), (1.106), но тогда нужно было бы задаться определенным видом интеграла столкновений. При строгом рассмотрении эта задача является довольно громоздкой. Она упрощается, если интеграл столкновений на этом этапе представить в упрощенной форме тепло-приближения. Именно так был ранее найден коэффициент теплопроводности.

Следует обратить внимание на то, что уравнения (1.104) и (1.105), образующие основу гидродинамического приближения в теории плазмы, были выведены из более общего кинетического уравнения, однако их можно получить гораздо более простым путем при анализе макроскопических свойств плазмы. Уравнения (1.104) имеют смысл закона сохранения числа частиц каждого сорта, а уравнения (1.105) —уть второй закон Ньютона применительно к движению единичного объема — электронной и ионной компонент плазмы — под действием градиентов давления, электрического поля и сил взаимного трения.

В описанной картине плазма является смесью двух взаимодействующих жидкостей, взаимодействующих друг с другом через самоогласованное электрическое поле и силу трения из-за парных соударений. Во многих задачах, когда плазма сохраняет свою квазинейтральность  $n_e = n_i = n$ , удобно пользоваться и более простой моделью одножидкостной гидродинамики. Складывая уравнения (1.105) для ионов и электронов и принимая во внимание, что члены, обусловленные трением между электронной и ионной компонентами, скрываются, получаем

$$m_i n_i [\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\nabla p_i - \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{вн}} - \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{вн}}, \quad (1.107)$$

где

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + (m_e/m_i) \mathbf{u}_e \approx \mathbf{u}_i.$$

Это основное уравнение одножидкостной гидродинамики плазмы уже не содержит электрического поля.

Следует подчеркнуть, что в плазме электрическое поле, как правило, возникает и в том случае, если нет внешнего источника. Вообще говоря, согласно условию сохранения квазинейтральности потоки электронов и ионов через любую замкнутую поверхность должны быть равны. Поскольку электроны подвижнее ионов, то при возникновении градиента давления электронный поток из области высокого давления в область более низкого сначала превышает поток ионов. Вследствие этого произойдет поляризация плазмы и появится электрическое поле, которое будет тормозить электроны и ускорять ионы.

До сих пор рассматривался случай полностью ионизованной плазмы. В слабоионизованной среде заряженные частицы, пред-ставляющие слабый раствор плазмы, не могут разогнаться под действием собственных градиентов давления вследствие торможе-

ния из-за частых столкновений с нейтральными частицами. Основной вклад в силу трения должны давать столкновения ионов с нейтральными атомами и молекулами:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -m_i n_i \mathbf{v}_{i0}. \quad (1.108)$$

Когда градиент полного давления плазмы  $\nabla p = \nabla(p_i + p_e)$  уравновешивается трением о нейтральный газ, движение плазмы носит характер диффузии. Действительно, из условия баланса силы трения и градиента давления имеем

$$\mathbf{u} = -(nm_i \mathbf{v}_{i0})^{-1} \nabla p. \quad (1.109)$$

В случае однородности температуры  $T(r) = \text{const}$ , следовательно,

$$\mathbf{u} = -(T/nm_i \mathbf{v}_{i0}) \nabla p. \quad (1.110)$$

Подставляя это выражение для скорости в уравнение непрерывности

$$\partial n / \partial t + \nabla \cdot n \mathbf{u} = 0,$$

получаем

$$\partial n / \partial t = (T/m_i n \mathbf{v}_{i0}) \nabla \cdot \nabla p. \quad (1.111)$$

Это уравнение описывает диффузионный процесс с коэффициентом диффузии

$$D = T / m_i \mathbf{v}_{i0}. \quad (1.112)$$

Заключая разбор гидродинамического описания плазмы, следует подчеркнуть, что деление плазмы на гидродинамические и кинетические было бы в корне ошибочным. Один и тот же плазменный объект в одно и то же время может обнаруживать и гидродинамические, и кинетические (бесстолкновительные) свойства. Так, например, плазма газового разряда в макроскопических масштабах, как правило, достаточно хорошо описывается в рамках гидродинамической модели (включая явления переноса: диффузия, закон Ома и т. д.). Вместе с тем в микроскопических масштабах (с характерными размерами, много меньшими длины свободного пробега) поведение той же плазмы газового разряда всегда носит бесстолкновительный характер. В такой плазме вообще можно пренебрегать обычными столкновениями. К процессам, которые нужно рассматривать в микроскопической шкале, относятся колебания плазмы, распространение электромагнитных волн, затухание волн по Ландау. Таким образом, граница раздела между разными методами описания является границей раздела не видов плазмы, а явлений, происходящих в них. Подобно тому как явления с характерными длинами, значительно превышающими длины свободного пробега, составляют особый предмет — гидродинамическое описание плазмы, микроскопические процессы с характерными масштабами, много меньшими длины свободного пробега, составляют стационарный раздел физики плазмы — бесстолкновительную плазму, описываемую системой бесстолкновительных кинети-

ческих уравнений. Следует иметь в виду, что кинетическое описание плазмы намного более громоздко, чем описание в рамках гидродинамических уравнений, и было крайне тяжело для описания всех бесстолкновительных процессов применять кинетический метод. Однако в некоторых случаях этот метод описания бесстолкновительной плазмы можно существенно упростить путем перехода к уравнениям своеобразной бесстолкновительной гидродинамики. Физическая причина возможности такого перехода совершенно применимася для описания столкновений волновых и колебательных процессов, когда кроме частоты столкновений возникает еще один характерный временной масштаб — частота колебаний. Если в столкновительном случае переход к гидродинамике, т. с. пренебрежение тепловым движением частиц, означает малость длины свободного пробега  $v_T/\nu$  по сравнению с характерным пространственным масштабом задачи  $L$ , то в бесстолкновительном случае переход к гидродинамике и пренебрежение тепловым движением возможны при условии малости параметра  $v_T/\omega$  по сравнению с длиной волны  $\lambda$ .

Последнее условие фактически означает, что бесстолкновительная гидродинамика применима, если тепловая скорость частиц много меньше характерной скорости возникающих в плазме волновых движений. Система уравнений бесстолкновительной гидродинамики состоит из уравнений (1.104) и (1.105), в которых не учитывается сила трения.

### § 1.11. Звук в плазме

В начале книги говорилось о лентгюровских колебаниях. Было отмечено, что кроме электронных колебаний существуют также и звуковые (иногда их называют ионо-звуковыми), обусловленные движением ионов. Свойства всех видов колебаний можно исследовать единим методом на основе кинетических уравнений (см. § 1.12). Здесь же мы проведем более простой и наглядный анализ звуковых колебаний плазмы в рамках гидродинамической модели.

Как и в любой сплошной среде, при звуковых колебаниях плазмы роль квазиупругой возвращающей силы играют силы газового давления. В одножидкостной гидродинамике плазмы [см. уравнение (1.107)] давление складывается из суммы электронного и ионного  $p = p_e + p_i$ , и соответственно этому хорошо известное выражение для скорости звука в обычной сплошной среде  $c_s = (\partial p / \partial \rho)^{1/2}$  трансформируется в  $[(\partial(p_e + p_i) / \partial \rho)]^{1/2}$ . Как обычно, здесь под частной производной подразумевается так называемая адиабатическая производная, вычисляемая при постоянной энтропии. Тогда  $c_s^2 = \gamma(T_e + T_i) / m$ , при  $\gamma = 5/3$ .

Процессы последовательного сжатия и расширения плазмы в звуковых волнах можно считать адиабатическими, если возни-

кающие при этом перепады температур не успевают выравниваться из-за теплопроводности. Сравним член  $\partial T / \partial t$ , отписывающий колебания температуры в уравнении баланса тепла, с членом  $\chi \Delta T$ , описывающим теплообмен. В звуковой волне при  $T = \text{exp}[(kx - \omega t)]$  производная по времени  $\partial T / \partial t = -i\omega T$ , а второй член превращается в  $\chi \Delta T = -\chi k^2 T$ . Тогда условие адиабатичности  $\partial T / \partial t \gg \chi k^2 T$  примет вид  $\omega \gg k_x^2 \chi$ . Но электронная и ионная компоненты плазмы имеют сильно различающиеся коэффициенты теплопроводности (см. § 1.9). Труднее выполнить условие адиабатичности для электронной компоненты. Неравенство  $\omega \gg k_x^2 \chi$  можно представить в виде

$$\omega/k \approx (T/m_i)^{1/2} \gg k_x \chi \approx 2\pi k/\lambda,$$
 (1.112)

где  $\lambda$  — длина волны. Подставляя сюда вместо  $\chi$  электронную температуропроводность  $\chi = \nu_e \nu_i T_e / 3$ , получаем неравенство

$$\lambda \gg (2\pi \nu_e / 3) (m_i/m_e)^{1/2}. \quad (1.113)$$

Это значит, что полностью адиабатическими являются только звуковые колебания с длиной волны, по крайней мере на два порядка большей длины свободного пробега электронов. При обратном условии

$$l_e(m_i/m_e)^{1/2} \gg \lambda, \quad (1.114)$$

но при  $\lambda \gg l_e$  звук изотермичен для электронной компоненты, но аддабатичен для ионной. Выражение для скорости звука в этом случае можно записать так:

$$c_s = (T_e/m_i + (5/3)T_i/m_i)^{1/2}. \quad (1.115)$$

Таким образом, аналогия со звуком в обычном сжимаемом газе не является полной из-за двухкомпонентности плазмы. Однако по настоящему аномальные свойства плазмы проявляются при еще более коротких длинах волн. Обычный звук с приближением длины волны к длине свободного пробега начинает все сильнее загущаться (из-за вязкости и теплопроводности) и при условии  $\lambda \ll l$  вообще не может существовать. Ясно, что любое возмущение плотности в свободномолекулярном потоке рассеивается из-за теплового движения отдельных частиц. В плазме же при отсутствии парных столкновений частицы взаимодействуют через самосогласованное электрическое поле. Подобно тому как электрическое поле такого типа приводит к лентгюровским колебаниям электронов, возникает их возможность существования и колебаний звукового типа, в которых участвуют и ионы, если частоты колебаний достаточно малы, что ионы успевают реагировать на изменения поля.

Таким образом, упругая связь между электронной и ионной компонентами в коротковолновом звуке осуществляется благодаря взаимодействию электрического поля, а температуры электронов и ионов в такой звуковой волне остаются постоянными.

Кроме того, большое вступление и отмечает одно общее обстоятельство, весьма важное для волновых процессов в плазме. Вообще говоря, как и в любой физической системе, колебания в пла-

ме являются нелинейными. Однако исследование волновых и колебательных процессов в плазме целесообразно начать с линейной теории.

В линейной теории рассматриваются колебания плазмы достаточно малой амплитуды, соответствующие малым возмущениям исходного равновесного состояния плазмы, на фоне которого они развиваются. В кинетической теории малость амплитуды колебаний означает, что возмущение функции распределения, связанное с колебаниями и волнами, во всей физической области мало по сравнению с исходной равновесной функцией распределения:  $f = f_0 + \delta f$ ,  $\delta f \ll f_0$ . Соответственно этому в гидродинамической теории следует считать, что все физические величины, связанные с колебаниями и волнами, также достаточно малы:

$$\delta n \ll n_0, \delta \varphi \ll \text{пах}(T, m_e^2/k^2), \delta v \ll \omega/k, \xi \ll 1/k,$$

где  $\delta n$  — возмущение плотности в колебаниях;  $\varphi$  — их характерный потенциал;  $\delta v$  и  $\xi$  — характерное значение скорости и смещения частиц в колебаниях соответственно. Поэтому основная математическая процедура, которая превращает обще уравнения колебаний, будь то кинетические уравнения или уравнения гидродинамики, в уравнения линейной теории, — это процедура линеаризации. Линеаризация означает, что все физические величины, характеризующие состояние плазмы, представляются в виде суммы их равновесного значения и возмущения, связанного с колебаниями и волнами, и в исходных уравнениях пренебрегается слагаемыми второго и более высокого порядка по амплитуде возмущений.

Вернемся теперь к рассмотрению бесстолкновительного звука, ограничившись в этом параграфе линейной теорией. Можно ожидать, что, как и в столкновительном случае, рассматриваемая звуковая волна достаточно медленна — ее фазовая скорость много меньше тепловой скорости электронов. Фактически это означает, что возмущение, создаваемое волной, является квазистатическим для электронов и в изменяющемся со временем электрическом поле волны они всякий раз успевают «подстроиться» под стационарное распределение Больцмана:

$$n_e = n_0 \exp\{\epsilon\varphi/T_e\}. \quad (1.116)$$

Для колебаний малой амплитуды следует, как мы уже знаем, линеаризовать эту формулу. В результате линеаризации находим, что возмущение электронной плотности связано с потенциалом волны следующим соотношением:

$$\delta n_e = n_0 \epsilon \varphi / T_e. \quad (1.116a)$$

Для ионов, наоборот считаем выполненным условие  $\omega/k \gg v_{Ti}$ . Как отмечалось выше, это и есть условие применимости бесстолкновительной гидродинамики. Поэтому движение ионов в бесстолкновительной звуковой волне будем рассматривать с помощью линеаризованной по амплитуде возмущений гидродинамической

системы уравнений без силы трения:

$$\left. \begin{aligned} m_i \partial \delta n_i / \partial t + n_i \partial \delta n_i / \partial x &= -e \partial \varphi / \partial x - (T_i/n_i) \partial \delta n_i / \partial x; \\ \partial \delta n_i / \partial t + n_i \partial \delta n_i / \partial x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.117)$$

Сравнивая различные слагаемые в этих уравнениях, нетрудно показать, что силой давления [последнее слагаемое в правой части (1.117)] при выполнении условия  $\varphi \gg k v_{Ti}$  можно пренебречь.

Сделаем еще одно дополнительное предположение, а именно будем считать, что длина волны рассматриваемых здесь ионно-звуковых колебаний все же достаточно велика по сравнению с дебаевской. Тогда, поскольку ионно-звуковая волна для электронов является квазистатической, к ней применимы соображения § 1.2 о квазинейтральности плазмы. Оторвать электроны от ионов с помощью их энергии взаимодействия волне можно только на расстояниях масштаба дебаевской длины. Ионно-звуковые колебания с длиной волны много больше дебаевской длины являются квазинейтральными:  $\delta n_e = \delta n_i = \delta n$ . В этом случае с учетом (1.116a) систему уравнений (1.117) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \partial \delta n / \partial t + n_0 \partial \delta n / \partial x &= 0, \\ m_i \partial \delta n_i / \partial t + - (T_e/n_0) \partial \delta n / \partial x, \end{aligned} \right\} \quad (1.118)$$

который совпадает с видом линеаризованных уравнений обычной газовой динамики изотермического газа ( $\gamma = 1$ ). Фазовая скорость звуковой волны в таком газе равна

$$\omega/k = (T_e/m_i)^{1/2}. \quad (1.119)$$

Но в рассматриваемом здесь случае плазмы звук с таким законом дисперсии является бесстолкновительным. Подобно лэнгмировским колебаниям звук также испытывает бесстолкновительное затухание из-за резонансного взаимодействия с тепловыми частичками плазмы. Физический механизм затухания был разяснен в § 1.2 на примере лэнгмировских колебаний. Звуковая волна может затухать в результате взаимодействия как с ионами, так и с электронами. Однако поскольку параметр  $\omega/k v_{Ti} = (T_e/T_i)^{1/2}$ , то при выполнении условия  $T_e \gg T_i$  (горячие электроны, холодные ионы) в резонанс со звуковой волной попадает лишь небольшое количество ионов на «хвосте» распределения Максвелла, и затухание на ионах оказывается экспоненциально малым. С ростом ионной температуры все больше и больше ионов может попадать в резонанс. При этом если  $T_i \sim T_e$ , то уже основная масса ионов даст вклад в затухание Ландау ионно-звуковых колебаний, и декремент затухания станет сравним с частотой колебаний, т. е. распространение ионного звука окажется невозможным. Поэтому существование слабозатухающих бесстолкновительных ионно-звуковых колебаний требует неизотермичности плазмы, т. е.  $T_e \gg T_i$ . Число же касается бесстолкновительного затухания звука на электронах, то его декремент является малым по отношению

к частоте  $\sim (m_e/m_i)^{1/2}$ . Качественно это можно разъяснить следующим образом. Фазовая скорость волны существенно меньше тепловой скорости электронов  $\omega/kv_{te} \sim (m_e/m_i)^{1/2}$  и резонансное затухание на электронах возникает в той области электронной функции распределения, где ее градиенты  $df/d\omega$  малы и, как следует из формулы (1.5), см. § 1.2, соответственно мало и бесстолкновительное затухание. Подробно вопрос о бесстолкновительном затухании ионно-звуковой волны рассмотрен в § 1.12.

Отклонение от квазинейтральности в ионном звуке, как уже отмечалось выше, становится существенным на очень малых длинах волн, сравнимых с лебаевской длиной. Распределение электронов в такой коротковолновой ионно-звуковой волне по-прежнему остается бульмановским и  $\delta n_e$  определяется формулой (1.117).

Систему уравнений (1.118) для ионов следует дополнить уравнением Пуассона для потенциала ионно-звуковой волны. Получающаяся при этом система уравнений, которая описывает коротковолновый ионный звук, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + n_o \frac{\partial n_i}{\partial x} &= 0; \\ m_i \frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} - (T_e/n_o) \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} &= (4\pi e^2 n_o/T_e) (\delta n_i - \delta n_e). \end{aligned} \right\} \quad (1.120)$$

Поставляя в эти уравнения все волновые величины в виде  $\exp(i(kx - \omega t))$ , приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 k^2 r_p^2 / (k^2 r_p^2 + 1), \quad (1.121)$$

где  $\omega_{pi}^2 = 4\pi e^2 n_i / m_i$  — квадрат ионной плазменной частоты. В пределе длинных волн  $\lambda \gg r_p$  из уравнения (1.120) следует полученный ранее закон дисперсии (1.119). С уменьшением длины волны становится существенной дисперсия фазовой скорости — фазовая скорость уменьшается при движении в область коротких длии волн и, наконец, при  $k \rightarrow \infty$  ( $\lambda \ll r_p$ ) стремится к нулю, а частота ионного звука стремится к ионной плазменной  $\omega_{pi}$ .

Полученный результат имеет весьма простое объяснение. Из-за теплового движения частота электрического поля, действующего на электроны, сдвинута по Доплеру:  $\omega \rightarrow |\omega - kv_{te}|$ . Для очень коротких волн ( $\lambda \ll r_p$ )  $kv_{te} \gg \omega$ , т. е. эффективная частота поля, действующего на «средний» электрон, существенно больше электронной плазменной частоты, и электроны не успевают участвовать в колебаниях. В результате для столь коротких длии волн плотность электронов остается практически невозмущенной и мы вновь получаем ленгмюровские колебания зарядов одного знака относительно зарядов другого знака, так же как и в высокочастотных ленгмюровских колебаниях (см. § 1.2). Единственное различие состоит в том, что если в высокочастотных колебаниях происходит колебания электронного заряда относительно неподвижных ионов, то в коротковолновом ионном звуке ионный заряд

колебается на электронном фоне и соответственно этому частота этих колебаний совпадает с ионной плазменной.

Результаты проведенного в книге исследования колебаний кристаллической плазмы суммированы на рис. 1.11. Кроме электромагнитной волны  $\omega^t = (\omega_{pe}^2 + k^2 c^2)^{1/2}$  в такой плазме существуют две ветви чисто продольных колебаний. Это высокочастотные ленгмюровские колебания  $\omega^l = (\omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{te}^2)^{1/2}$  и низкочастотные ионно-звуковые колебания с законом дисперсии  $\omega^s(k)$ , определяемым

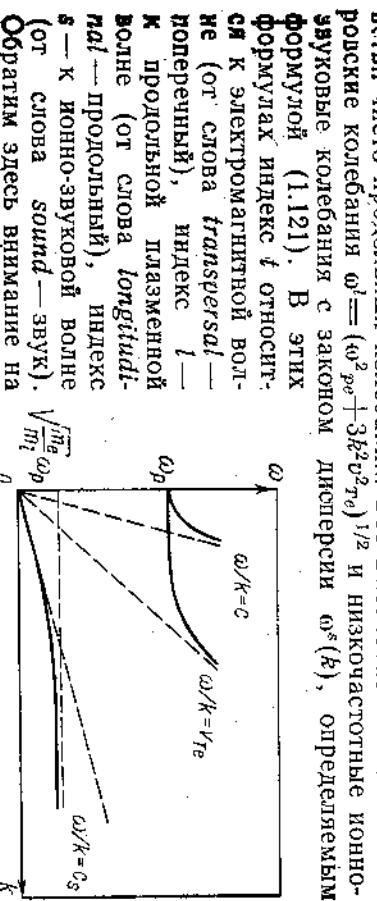


Рис. 1.11. Ветви колебаний в однородной изотропной плазме

■ Двухатомной решетке существуют две ветви колебаний — оптическая ветвь, в которой атомы (либо ионы) разных сортов при колебаниях движутся навстречу друг другу и которая аналогична колебаниям плотности заряда — ленгмюровским колебаниям в плазме, и акустическая ветвь, в которой атомы (ионы) смещаются в одном направлении и которая аналогична ионно-звуковым колебаниям плазмы.

До сих пор при рассмотрении колебаний плазмы мы использовали гидродинамическую систему уравнений. В следующем параграфе излагается кинетическая теория колебательных и волновых процессов в плазме. Такой подход позволяет не только получить с единой точки зрения все уже известные нам ветви колебаний, но и количественно строго рассмотреть эффект резонансного взаимодействия колебаний с частицами. По этой причине кинетическая теория имеет крайне важное значение в теории колективных взаимодействий в плазме.

### § 1.12. Кинетическая теория волн в плазме

Наиболее важной демонстрацией метода самосогласованного и кинетической теории плазмы является вывод дисперсионного соотношения для различных типов колебаний плазмы с по-

мощью бесстолкновительного кинетического уравнения. Предположим, что распространение плоской монохроматической волны с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  сопровождается появлением (из-за поляризации плазмы) самосогласованного электрического поля с потенциалом

$$\varphi = \tilde{\varphi} \exp \{ikx - i\omega t\}.$$

Также как и в гидродинамической модели малых колебаний, в кинетической теории используется метод линеаризации. Функцию распределения ионов (электронов) ищем в виде

$$f_i = f_{0i}(v) + \delta f_i(x, v, t).$$

Здесь  $f_{0i}$  — функция распределения в равновесном состоянии (невозмущенная). Поправку  $\delta f_i$ , связанную с предполагаемой звуковой волной, считаем малой. Тогда кинетическое уравнение для нее примет вид

$$\partial \delta f_i / \partial t + v \partial \delta f_i / \partial x - (e/m_i) (\partial \Phi / \partial x) \partial f_{0i} / \partial v = 0 \quad (1.122)$$

(в последнем слагаемом слева мы пренебрели нелинейным членом  $(e/m_i) (\partial \Phi / \partial x) \partial f_{0i} / \partial v$ , поскольку он имеет второй порядок малости). Из уравнения (1.122) видно, что  $\delta f_i$  пропорционально  $\Phi$  и, следовательно, также ведет себя как  $\exp[i(kx - \omega t)]$ . Подставляя в (1.122)  $\delta f_i = \tilde{\delta f}_i \exp[i(kx - \omega t)]$ , получаем

$$-i(\omega - kv) \tilde{\delta f}_i - (e/m_i) ik \tilde{\delta f}_{0i} / \partial v = 0. \quad (1.123)$$

Таким образом, возмущение плотности ионов

$$\delta n_i = \int \tilde{\delta f}_i dv = - (e/m_i) k \tilde{\varphi} \int \frac{\partial f_{0i}}{\omega - kv} dv. \quad (1.124)$$

Рассуждая точно так же, для возмущения плотности электронов можно написать

$$\delta n_e = (e/m_e) k \tilde{\varphi} \int \frac{\partial f_{0e}}{\omega - kv} dv. \quad (1.125)$$

По сравнению с формулой (1.124) здесь заменены все индексы ионов (заряд и масса). Теперь воспользуемся тем, что электрический потенциал и пространственный заряд  $e(\tilde{\delta n}_i - \tilde{\delta n}_e)$  связаны уравнением Пуассона

$$k^2 \tilde{\varphi} = 4\pi e (\tilde{\delta n}_i - \tilde{\delta n}_e). \quad (1.126)$$

Выразив плотность заряда с помощью (1.124) и (1.125) и подставив в (1.126), получим следующее уравнение:

$$k^2 = -\frac{4\pi e^2}{m_i} k \left\{ \int \frac{\partial f_{0i}}{\omega - kv} dv + \frac{m_e}{m_i} \int \frac{\partial f_{0e}}{\omega - kv} dv \right\}, \quad (1.127)$$

эквивалентное обращению в нуль диэлектрической проницаемости плазмы:

$$+\frac{m_i}{m_e} \int \frac{k \partial f_{0e} / \partial v}{\omega - kv} dv \} \quad (1.128)$$

где  $\varepsilon_0, \varepsilon_i$  — вклад электронов и ионов в диэлектрическую проницаемость. Конкретный вид  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_i$  очевиден из соотношения (1.128).

Уравнение (1.127), которое в неявном виде содержит зависимость  $\omega = \omega(k)$  — закон дисперсии, называется общим дисперсионным уравнением колебаний плазмы без магнитного поля. Из уравнения (1.127) можно вывести ранее исследованные свойства всех видов продольных колебаний плазмы.

Рассмотрим сначала звуковые колебания. Прежде всего представляем оба слагаемых в фигурных скобках правой части уравнения (1.127) к более простому виду. Начнем со второго слагаемого, представляющего собой вклад электронов. На рисунке показано, что средняя тепловая скорость электронов намного больше фазовой скорости звуковых волн  $\omega/k \ll v_{Te}$  (или  $\omega \ll k v_{Te}$ ). По этой причине в основной области интегрирования в знаменателе полынтигрального выражения  $1/(\omega - kv)$  для электронов можно пренебречь  $\omega$  по сравнению с  $kv$ . Упрощенный интеграл  $\int (\partial f_{0e} / \partial v) dv / v$  для Максвелловского распределения электронов по скоростям  $f_{0e} = n_e (m_e / 2\pi T_e)^{1/2} \exp(-mv^2 / 2T_e)$  равен  $-n_e m_e / T_e$ , т. е.  $\varepsilon_0 = 1/2\pi k^2 T_e$ .

При вычислении «ионного» интеграла (первое слагаемое в фигурных скобках) следует предположить, что фазовая скорость волн существенно превышает среднюю тепловую скорость ионов  $\omega \gg kv_T$ . Согласно § 1.1 это условие выполняется лишь в плазме с холодными ионами  $T_i \ll T_e$ . Если в знаменателе выражения для ионов в формуле (1.126) пренебречь  $kv$  по сравнению с  $\omega$ , то интеграл тождественно обращается в нуль. Следовательно, нужно удержать второй член в разложении

$$1/\omega - kv = 1/\omega + kv/\omega^2 + \dots$$

В результате получаем

$$\int (\partial f_{0i} / \partial v) (kv/\omega^2) dv = -(k/\omega^2) \int f_{0i} dv = -kn/\omega^2,$$

что приводит к следующей формуле для  $\varepsilon_i$ :  $\varepsilon_i = -\omega^2 \rho_i / \omega^2$ .

Подставив в (1.127) полученные выражения для интегралов, получим дисперсионное уравнение в виде

$$k^2 = (4\pi e^2 n/m_i) \{k^2/\omega^2 - m_i/T_e\}. \quad (1.129)$$

Нетрудно убедиться, что результат полностью совпадает с дисперсионным уравнением бесстолкновительных звуковых колебаний,

которое получено ранее при гидродинамическом рассмотрении (1.121).

Физический смысл бесстолкновительного затухания волны в плазме детально исследовался в § 1.2 на примере лентмюровских колебаний. Бесстолкновительное затухание своим возникновением обязано поглощению энергии волны частичками, движущимися со скоростью равной фазовой и поэтому длительное время сохраняющими фазовую равноту. Поэтому при рассмотрении количественной стороны эффекта естественно использовать закон сохранения энергии в системе волна — резонансные частицы. Для его вывода обратимся к дисперсионному уравнению (1.127). Учтем, что диэлектрическая проницаемость плазмы, которая определяется интегралами по скоростям частиц, входящими в правую часть (1.127), в действительности имеет небольшую мнимую часть, математическая природа ее возникновения — наличие особенностей (полюса) полынтигрального выражения в точке  $\omega = \omega_0/k$ . Появление мнимой части диэлектрической проницаемости как раз и приводит к возникновению бесстолкновительного затухания волны. Разобъем диэлектрическую проницаемость на действительную и мнимую части:

$$\epsilon(\omega, k) = \epsilon'(\omega, k) + i\epsilon''(\omega, k).$$

Тогда действительная часть частоты  $\omega'(\omega = \omega' + i\gamma)$  будет решением действительной части дисперсионного уравнения:

$$\epsilon'(\omega', k) = 0.$$

Уравнение для  $\gamma$  — это мнимая часть дисперсионного уравнения.

При  $\gamma \ll \omega'$ , т. е. при  $\epsilon'' \ll \epsilon'$ , уравнение

$$\operatorname{Im} \epsilon'(\omega) + \epsilon''(\omega) = 0$$

можно привести к виду

$$j\omega \epsilon' / \partial \omega' = -\epsilon''(\omega'), \quad (1.130)$$

разложив  $\epsilon'(\omega + i\gamma)$  в ряд с точностью до первого члена по  $i\gamma/\omega$ . Домножим обе части уравнения (1.130) на  $\omega |E|^2/4\pi$ . Тогда, учитывая, что

$$d|E|^2/dt = 2\gamma |E|^2,$$

а диэлектрическая проницаемость в связана с проводимостью  $\sigma$  соотношением  $\epsilon = i\omega\sigma/\omega$ , представим уравнение для  $\gamma$  в следующем виде:

$$d/dt \omega \partial \epsilon / \partial \omega \langle E^2/8\pi \rangle = -\operatorname{Re} \sigma \langle E^2 \rangle. \quad (1.131)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по длине волны колебаний. Это уравнение выражает закон сохранения энергии в системе волна — резонансные частицы. Величина

$$w = \omega \partial \epsilon / \partial \omega \langle E^2/8\pi \rangle \quad (1.132)$$

имеет смысл энергии монохроматической продольной волны, которая складывается из потенциальной энергии (энергии электриче-

ского поля) волны  $w_{\text{пот}} = \langle E^2/8\pi \rangle$  и энергии колебаний частиц  $\epsilon_{\text{пол.}}$  Используя приведенные выше выражения для  $\epsilon_e$  и  $\epsilon_i$ , для энергии ионно-звуковой волны получаем

$$w = 2(\omega_p^2 p_i / \omega^2) \langle E^2 / 8\pi \rangle. \quad (1.133)$$

Вклад в эту энергию дают кинетическая энергия колебаний ионов  $\langle p_{\text{имп}} \delta \omega_i^2 / 2 \rangle = \omega_p^2 p_i / \omega^2 \langle E^2 / 8\pi \rangle$ , колебательная энергия электронов  $\langle \delta \omega e \Phi \rangle = (1/k^2 r_D^2) \langle E^2 / 8\pi \rangle$ .

(считалось, что только квадратичные по амплитуде волны величины имеют отличное от нуля среднее значение, и в соответствии с этим оставлено под знаком среднего только слагаемое, пропорциональное  $\delta \omega$ ), и, наконец, потенциальная энергия волны  $\langle E^2 / 8\pi \rangle$ . Для длинноволновых ионно-звуковых колебаний основной вклад в энергию обусловлен колебательной энергией частиц — естественный результат, поскольку для длинноволновой звуковой волны с малым разделением зарядов электрическое поле также мало, иначе говоря, плазма почти квазинейтральна.

Изменение во времени энергии волны определяется диссипацией, связанной с взаимодействием волна — резонансные частицы. Диссипируемая мощность пропорциональна  $\operatorname{Re} \sigma$ , и ее можно представить в виде работы поля волны  $E$  над резонансными частицами:  $\operatorname{Re} \sigma E^2 = \langle j^{\text{рез}} E \rangle$ .

Возвращаясь к амplitude потенциала электростатической волны  $\Phi_k$ , закон сохранения энергии в системе волна — резонансные частицы запишем в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} |\Phi_k|^2 = -\frac{16\pi}{k^2 \omega \partial \epsilon / \partial \omega} \langle j^{\text{рез}} E \rangle. \quad (1.134)$$

Диссипация энергии волны, связанная с резонансными частицами, как ясно из приведенного выше вывода, выражается через мнимую часть  $\epsilon(\omega, k)$ , ее легко можно найти из конкретной формулы для  $\epsilon(\omega, k)$  [см. (1.128)]. Мы, однако, проведем здесь независимый вывод формулы для диссипируемой мощности  $\langle j^{\text{рез}} E \rangle$ , поскольку такой вывод проясняет физический смысл бесстолкновительного затухания Ландау.

Ток  $j^{\text{рез}}$  просто выражается через возмущение равноплоской функции распределения резонансных частиц

$$j^{\text{рез}} = \sum e \int v \delta \Phi^{\text{рез}} dv,$$

то суммирование проводится по двум сортам частиц — электронам и ионам. Подставляя сюда функцию распределения  $\delta f$  из

уравнения (1.123), можно легко вычислить среднее в правой части уравнения (1.134). Рассмотрим, для примера, ионный вклад:

$$\langle j^{(p_3)} E \rangle = \left\langle \left| \left( e^2 / 2m_i \right) \int \frac{\partial \phi k v \delta f / \partial v}{kv - \omega} \exp \{ i(kx - \omega t) \} + \text{к. с.} \right| \right\rangle = (1/4) (e^2 / m_i) \phi^2 k^3 \int \delta f / \partial v \times$$

$$\times \left\{ -\frac{i k}{2} \varphi_k \exp \{ i(kx - \omega t) \} + \text{к. с.} \right\} dv. \quad (1.135)$$

Здесь проведено усреднение по времени и учтено, что величины  $\delta f$ ,  $\Phi$  — вещественны. Использованное ранее комплексное представление этих величин справедливо только в линейной теории, при вычислении же квадратичных комбинаций, таких как  $\langle jE \rangle$ , в приведенных выше формулах для  $\delta f$  и  $\Phi$  надо прибавить комплексно сопряженные слагаемые и множитель  $1/2$ .

Из (1.135) следует, что изменение амплитуды волны связано с резонансной областью скоростей  $v \approx \omega/k$ , в которой имеется особенность подынтегрального выражения. Здесь мы вновь сталкиваемся с одним из типов резонансных явлений, о которых уже упоминалось в § 1.7. В данном случае речь идет о резонансе между частотой и волной, фазовая скорость которой совпадает со скоростью частицы  $v = \omega/k$  (резонанс Ландау). Как и раньше, для того чтобы устранить особенность в резонансе, введем в рассмотрение бесконечно малое затухание волны, связанное со столкновениями. Тогда из кинетического уравнения со стост-членом в форме (1.86), следует, что учет столкновений приводит к замене  $\omega \rightarrow \omega + i/\tau$ . Положение полосы  $v = \omega/k + i/\tau$  смешается с действительной осью в верхнюю полуплоскость. Отсюда следует, что при интегрировании по  $v$  в формуле (1.135) особенность подынтегрального выражения в точке  $v = \omega/k$  надо обходить (рис. 1.12), в результате имеем

$$\lim_{1/\tau \rightarrow 0} 1/(kv - \omega - i/\tau) = \mathcal{P} \{ 1/(kv - \omega) \} + i\pi \delta(kv - \omega). \quad (1.136)$$

Здесь символ  $\mathcal{P}$  — главное значение,  $\delta(x)$  — дельта-функция. Такое направление обхода особенности принято называть правилом обхода Ландау.

Подставляя в (1.135)  $1/(kv - \omega)$  из (1.136), выполняя интегрирование по  $v$  с учетом  $\delta$ -функции и суммируя вклад от ионов и электронов, приходим к следующему уравнению для амплитуды волны:

$$\frac{\partial \Phi^2}{\partial t} = [8\pi^2 e^2 / m_i k^2 (\partial \varepsilon / \partial \omega)] \Phi^2 k \times$$

$$\times \left\{ \delta f_{oi} / \partial v + (m_i / m_e) \delta f_{ie} / \partial v \right\}. \quad (1.137)$$

Для звуковой волны с законом дисперсии  $\omega = k(T_e/m_i)^{1/2}$ , предполагая равновесные функции распределения электронов и ионов Максвелловскими, получаем

$$\gamma \approx -(\pi/8)^{1/2} \omega \{ (m_e/m_i)^{1/2} + (T_e/T_i)^{3/2} \} \exp(-T_e/2T_i), \quad (1.138)$$

что подтверждает возможность существования слабозатухающей ( $T_e \gg T_i$ ) плазмы.

Ионно-звуковые колебания плазмы напоминают фононы в металлах. Вместо неравенства  $T_i \ll T_e$  в металлах  $T \ll E_F$  ( $E_F$  — энергия Ферми электронов). Таким образом, роль  $T_e$  играет  $E_F$ . Скорость звука в металлах порядка  $(E_F/m_i)^{1/2}$ , а закон дисперсии напоминает зависимость, показанную на рис. 1.11.

В термодинамически равновесной плазме для ионно-звуковых колебаний устанавливается спектр Рэлея — Джинса. Взаимодействие электронов с такими тепловыми шумами звуковых волн дает вклад в длину свободного пробега по сравнению с парными кулонаическими столкновениями (как это было в случае лентгюровских колебаний). Нетрудно представить, что при неустойчивых ионно-звуковых колебаниях, когда уровень шумов становится достаточно большим, длина свободного пробега может в основном определяться коллективным взаимодействием электронов с ионно-звуковыми колебаниями.

Основная неустойчивость, специфическая для ионного звука, — это неустойчивость, возникающая в плазме с достаточно большим электрическим током. Действительно, в плазме с током электронов должны иметь относительно ионов среднюю скорость  $v_{te}$ , связанную с плотностью тока соотношением  $j = e n v_{te}$ . Тогда функция распределения электронов имеет вид

$$f_{te} = C \exp[-m_e(v - v_{te})^2/2T].$$

Используя эту функцию распределения для электронов и предполагая, что ионы сохраняют Максвелловское распределение (их токовая скорость  $v_{te}/m_e$  раз меньше скорости электронов), получаем из (1.137) следующую формулу для декремента:

$$\gamma = -(\pi/8)^{1/2} \omega \{ (v - kv_{te}) / k (T_e/m_i)^{1/2} +$$

$$+ (T_e/T_i)^{3/2} \exp(-T_e/2T_i) \}. \quad (1.139)$$

Видно, что при  $v_{te} > \omega/k \sim (T_e/m_i)^{1/2}$  вклад электронов в декремент меняет знак, т. е. электроны вместо поглощения могут раскачивать ионно-звуковые колебания. Если ионная температура достаточно мала, то этот эффект перевешивает ионное затухание, и возникает способная когерентная накачка ионного звука электронами. Развитие такой неустойчивости может привести к резкому возрастанию электрического сопротивления. Но плазма с сильно подавленными хаотическими ионно-звуковыми колебаниями находит自己 в своеобразном турбулентном состоянии, трудно поддающемся теоретической интерпретации. Основной метод, используе-

мый теоретиками, заключается в представлении подобной турбулентности как некоего газа квазичастиц — волн (в данном случае ионо-звуковых). В такой теории, которая здесь рассмотрена ниже, нелинейные эффекты при больших амплитудах волн интегрируются как столкновения квазичастиц — волн.

Ионно-звуковая неустойчивость реализуется только при не слишком больших скоростях электронов меньшие их тепловой скорости. При больших скоростях электронов (больших электрических токах) возникает так называемая неустойчивость Бунемана — раскаска связанных друг с другом колебаний плотности заряда электронной и ионной компонент плазмы.

Известно, что в плазме возможны два типа колебаний плотности заряда: быстрые электронные  $\omega \gg \omega_{pe}$  и медленные ионные  $\omega < \omega_{pi}$ . Если направленная скорость электронов достаточно велика, то в результате додлеровского свида частоты возможно своеобразное пересечение этих двух ветвей колебаний. При этом медленные ионные колебания  $\omega \sim \omega_{pi}$  в системе отсчета, движущейся вместе с электронным потоком, попадают в резонанс с быстрыми колебаниями электронной плотности  $|\omega - \omega_{pe}| \sim \omega_{pe}$ . В этих условиях и возникает неустойчивость Бунемана. Дисперсионное уравнение для этой неустойчивости, как обычно в случае продольных колебаний, соответствует обращению в нуль диполярной проницаемости. Чтобы проиллюстрировать основные черты неустойчивости в терминах диэлектрической проницаемости, достаточно учесть лишь основной вклад ионов и электронов, соответствующий первым членам разложения интеграла (1.127). Результат имеет вид

$$\epsilon = 1 - \omega_{pi}^2/\omega^2 - \omega_{pe}^2/(\omega - \omega_{pe})^2. \quad (1.140)$$

Для  $\omega \ll \omega_{pe}$  последнее слагаемое можно разложить:  $\omega_{pe}^2/(\omega - \omega_{pe})^2 \approx \omega_{pe}^2/k^2 u_{de}^2 + 2\omega_{pe}^2 \omega/k^2 u_{de}^3$ . Подставим это разложение в уравнение (1.140) и рассмотрим его решение для частного выбора волнового числа  $k = \omega_{pe}/u_{de}$ . Тогда из (1.140) получим

$$\omega^3 = -\omega_{pe}^2 \omega_{pe}/2. \quad (1.141)$$

Это кубическое уравнение имеет комплексный корень  $\omega = \omega' + i\gamma$  с положительной мнимой частью, соответствующий экспоненциальному росту амплитуды со временем  $E \sim e^{i\gamma t}$ . Инкремент нарастания амплитуды волны, определяемый из (1.141), равен

$$Y = (3^{1/2}/2^{4/3}) \omega_{pe}^{2/3} \omega^{1/3}. \quad (1.142)$$

Более строгий анализ исходного уравнения (1.140) показал бы, что это есть максимум инкремента и достигается он как раз при  $k = \omega_{pe}/u_{de}$ . С развитием этой неустойчивости связывают резкое торможение электронного потока и, следовательно, механизм так называемого аномального сопротивления (см. § 2.19) плазмы, наблюдающегося при достаточно больших силах звуковой волны,  $j = \epsilon n_{de} E_{ext}$ .

С использованием такой неустойчивости можно сконструировать своеобразный линейный ускоритель для ионов в электронном пучке. В этом случае (взаимодействие электронной и ионной потоков) неустойчивая волна плотности заряда в додлеровском резонансе с ионным пучком  $\omega \approx \omega_{pi}$ . Инкремент неустойчивости определяется формулой (1.142), а частота колебаний находится из уравнения (1.141) с учетом додлеровского свида частоты в результате направленного движения ионов.

$$\omega = k_{pi} + (1/2^{4/3}) \omega_{pi}^{2/3} \omega_{pe}^{1/3}. \quad (1.143)$$

Как следует из (1.143), неустойчивая волна движется быстрее ионного пучка. Поле такой волны и реализует высокочастотное поле линейного ускорителя. В такой волне резонансные частицы (в данном случае ионный пучок) должны ускоряться. При этом, как обычно в линейных ускорителях, процесс непрерывного ускорения должен обеспечиваться поддержанием непрерывного синхронизма между волной и ускоряемыми частицами:  $u_i(z) = \omega/k(z)$ . Воспользовавшись также приведенным выше условием резонанса неустойчивой волны с электронным пучком и тем, что  $\omega \ll \omega_{pe}$ , условие синхронизма можно переписать в виде

$$u(z) = n_{de} \omega / \omega_{pe}(z). \quad (1.144)$$

Если мощность, поглощаемая от электронного пучка, достаточно мала, то ток в пучке должен сохраняться:  $n_{de} u_{de} = \text{const}$ . Поскольку, кроме того, частота ускоряющей волны постоянна  $\omega = \text{const}$ , а при перелетаистских энергиях скорость ускоряемых ионов  $u$ растет, как обычно в линейных ускорителях, пропорционально  $z^{1/2}$ , то видно, что синхронизм между ионами и ускоряющей их волной может быть легко обеспечен за счет профилированного изменения плотности в электронном пучке:

$$n_{de} \sim 1/z^{1/2}. \quad (1.144a)$$

В общем, рассмотренная выше схема в значительной степени аналогична линейному ускорению. Основное отличие состоит в том, что мощность, необходимая для ускорения, не вводится в ускоритель извне, а из-за неустойчивости черпается от электронного пучка в самом процессе ускорения (так называемый коллективный метод ускорения).

Механизму неустойчивости Бунемана можно дать еще одну важную трактовку. Для волны плотности заряда в электронном пучке  $\omega - \omega_{pe} \approx -\omega_{pe}$  производная  $d\omega/d\theta \approx -2/\omega_{pe}$ , т. е. отрицательна. Из формулы (1.132) следует, что в этом случае энергия волны отрицательна. Так называемая отрицательность энергии волны означает, что при распространении такой волны в среде энергия среды (в данном случае электронного потока) уменьшается. Тогда любой механизм диссиляции (в рассматриваемом здесь примере это ускорение ионов) должен приво-

дить к дальнейшему уменьшению энергии среды, а следовательно, и к росту амплитуды волны отрицательной энергии, т. е. к неустойчивости. Этот результат следует также из уравнения (1.134) для амплитуды волны: диссипация ( $\text{Re } \sigma > 0$ ) в случае волны «отрицательной энергии»  $\partial e / \partial \omega < 0$  приводит к неустойчивости ( $d/dt E^2 > 0$ ).

В этом смысле рассмотренная неустойчивость является примером достаточно широкого класса неустойчивостей волн с отрицательной энергией. Волны отрицательной энергии возможны в неравновесных средах с запасом свободной энергии, таких, например, как электронные пучки. Диссипация энергии этих волн (в плазме такая диссипация может быть связана не только со столкновениями, но и с затуханием Ландау) является причиной неустойчивости. Неустойчивости волн отрицательной энергии также хорошо известны в радиофизике (резистивные генераторы и усиители на полупроводниках). В последнем случае механизм диссипации связан с поглощением электромагнитной энергии в стенах резонатора или волновода.

### § 1.13. Кинетическая теория волн в плазме (Ленгмюровские колебания)

Рассмотрим свойства высокочастотных электронных (ленгмюровских) колебаний на основе дисперсионного уравнения (1.127). В этом случае речь идет о быстрых волнах с фазовой скоростью, существенно большей тепловой скорости электронов; что же касается ионов, то они не успевают участвовать в таких колебаниях из-за их большой массы. Поэтому для ленгмюровских колебаний в уравнении (1.127) достаточно ограничиться электронным вкладом. В знаменателе соответствующего интеграла в (1.127)  $\omega \gg k v$  — по крайней мере для скорости электронов порядка средней тепловой, т. е. в существенной области интегрирования по скоростям. Тогда для вычисления интеграла можно воспользоваться разложением

$$1/(\omega - kv) = 1/\omega + kv/\omega^2 + (kv)^2/\omega^3 + (kv)^3/\omega^4. \quad (1.45)$$

Подстановка (1.145) в электронный интеграл в дисперсионном уравнении (1.127) и последующее интегрирование по частям приводят к следующим результатам:

$$(1/\omega) \int \partial f_{oe} / \partial v dv = 0$$

( $f_0$  обращается в нуль на пределах интегрирования  $v \rightarrow \pm \infty$ );

$$(k^2/\omega^2) \int v \partial f_{oe} / \partial v dv = -(k^2/\omega^3) n;$$

$(\partial f_{oe} / \partial v) \int v^2 \partial f_{oe} / \partial v dv = 0$  (функция распределения);

$$(k^3/\omega^4) \int v^3 \partial f_{oe} / \partial v dv = -3(k^3\omega^4)(T_e/m_e)n.$$

Разложение, аналогичное (1.145), с последующим интегрированием, можно было бы осуществить и с первым интегралом справа в дисперсионном уравнении (1.127). Однако этот член, являющийся результатом учета движения ионов, оказывается в  $m_i/m_e$  раз меньше. Поэтому им можно пренебречь.

В итоге вместо (1.127) получаем

$$k^2 \approx k^2 (\omega_p^2/\omega^2 + 3\omega_p^2 k^2 (T_e/m_e)/\omega^4) \quad (1.46)$$

и при  $\omega \gg k v_T$  приходим к уже известному закону дисперсии для электронных колебаний плазмы:  $\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 T_e/m_e$ . Очевидно, что такое дисперсионное уравнение соответствует диэлектрической проницаемости

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2 \rho / \omega^2 (1 + 3k^2 (T_e/m_e)/\omega^2).$$

Нетрудно получить формулу для энергии ленгмюровской волны с помощью общей формулы (1.132). В случае ленгмюровской волны с  $k v_D \ll 1$ , когда тепловые поправки малы, эта формула принимает совсем простой вид:

$$W = \langle E^2 / 4\pi \rangle. \quad (1.47)$$

Интересно отметить, что для такой ленгмюровской волны, так же как и для гармонических колебаний в аналитической механике, имеет место так называемая теорема вриала — среднее значение кинетической энергии колебаний частиц

$$W_{\text{кол}} = \langle p_{\text{кол}}^2 m_e / 2 \rangle = \langle E^2 / 8\pi \rangle$$

равно среднему значению потенциальной энергии волны

$$W_{\text{пот}} = \langle E^2 / 8\pi \rangle.$$

Этот результат также вполне естествен — уже из качественного рассмотрения, проведенного в § 1.2, известно, что высокочастотные ленгмюровские колебания можно рассматривать как гармонические колебания электронов относительно неподвижных ионов.

Декремент затухания ленгмюровских колебаний определяется формулой (1.137), где в данном случае существует только электронный вклад. В результате для декремента затухания получаем выражение, отличающееся от приближенной формулы § 1.2 лишь численным множителем  $\pi/2$ :

$$\gamma = (2\pi e^2 / m_e k) \omega \partial f_{oe} / \partial v \Big|_{v=\omega/k} \quad (1.48)$$

(мы учли, что для ленгмюровских колебаний  $\partial e / \partial \omega = 2\omega_p^2 / \omega^3 \approx 2/\omega$ ). Для плазмы с максвелловским распределением по скоростям из (1.148) имеем формулу для декремента затухания, впервые полученную Л. Д. Ландау:

$$\gamma = (\pi/8)^{1/2} (\omega_p / k^3 v_D) \exp \{-3/2 - 1/2 k^2 v_D^2\}. \quad (1.49)$$

Подчеркнем интересную особенность затухания Ландау — как всякое явление, описываемое кинетическим уравнением (1.122) без

столкновений и поэтому сохраняющим энергию (в соответствии с *H*-теоремой Больцмана), такое затухание должно быть обратимым. Для того чтобы разъяснить это, обратимся еще раз к качественной картине, рассмотренной в § 1.2. Там мы для простоты считали, что потенциал волны имеет прямоугольный профиль (см. рис. 1.2). Для такого идеализированного профиля частицы, захваченные в потенциальную яму волны, т. е. движущиеся достаточно медленно относительно волны

$$|v - \omega/k| \lesssim (e\phi/m)^{1/2},$$

меняют свою скорость только при столкновении со стенкой потенциального барьера. Для этого случая мы разделили частицы на две группы: частицы, догоняющие волну, и, следовательно, теряющие свою энергию при таком столкновении, и частицы, отстающие от волны, а значит, получающие энергию. В Максвелловской

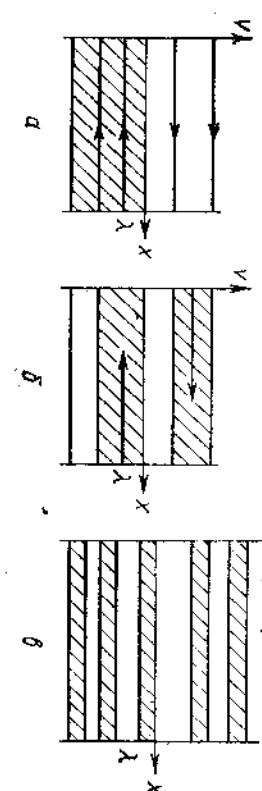


Рис. 1.13. Динамика поведения резонансных электронов на фазовой плоскости

плазме частиц второй группы (т. е. более медленных) больше, поэтому волна затухает. Следует, однако, иметь в виду, что после столкновения эти две группы частиц меняются местами: частицы, которые отставали от волны и которых было больше, теперь опежают волну и при следующем столкновении со стенкой потенциального барьера отдают волне энергию. Поэтому «затухание» меняет знак и является остилирующей функцией времени с периодом, равным периоду колебаний частицы в потенциальной яме:

$$T_0 \sim 1/k(e\phi/m)^{1/2}. \quad (1.150)$$

Строго говоря, такая картина имеет место только в том случае, когда все захваченные частицы синхронно колеблются в потенциальной яме. В действительности период колебаний частиц в яме зависит от их энергии:  $\tau \sim 1/k|v - \omega/k|$ .

Для того чтобы понять, как это обстоятельство влияет на застухание Ландау, рассмотрим поведение траекторий частиц на фазовой плоскости ( $x, v$ ). Фазовая плоскость для случая частиц, захваченных волной прямоугольной формы, показана на рис. 1.13. Частицы движутся с постоянной скоростью между стенками потенциальной ямы, а затем скачком меняют скорость, переходя

из верхней части фазовой плоскости в нижнюю, и наоборот. Будем считать, что вначале было больше частиц, движущихся медленнее волны, т. е. находившихся в нижней части фазовой плоскости (см. рис. 1.13, a, заштрихованная часть фазовой плоскости). Из бесконечного уравнения

столкновительного кинетического уравнения следует, что функция распределения сохраняется при движении частиц (теорема Лиувилля) и поэтому при отражении от грани потенциальной ямы заштрихованные участки переходят в верхнюю часть фазовой плоскости. Быстрее всего колебляются частицы с большей энергией, и они раньше других передут наверх, частицы с меньшей энергией остаются в нижней части плоскости (см. рис. 1.13, б), через несколько периодов колебаний частиц картина на фазовой плоскости чрезвычайно усложняется (см. рис. 1.13, в), на котором перемежаются заштрихованные и незаштрихованные участки фазовой плоскости). Вообще, если представить себе две частицы с несколькими различающимися энергиями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , то им будут соответствовать разные периоды колебаний в потенциальной яме  $\Delta t = (dt/d\epsilon) \Delta \epsilon$ . Даже если эти частицы начинают двигаться по своим траекториям с одинаковыми начальными фазами  $\theta = kx$ , то через время  $t \sim \epsilon^2 / \Delta t$  их фазы разойдутся на величину  $\Delta\theta \sim 1$  и они могут оказаться в разных частях фазовой плоскости.

В итоге происходит своеобразное размешивание частиц по всей фазовой плоскости.

Чисто частиц, движущихся быстрее и медленнее волны, промерно выравнивается, и затухание волны прекращается. Амплитуда волны как функция времени, полученная при точном решении задачи с волной синусоидальной формы, показана на рис. 1.14. Она качественно соответствует рассмотренной здесь упрощенной картине.

В принципе можно представить ситуацию, когда все частицы, лежащие по своим фазовым траекториям, вновь окажутся застужены, в нижней части фазовой плоскости и восстановится застужение. Однако для системы с большим числом частиц вероятность такого события крайне мала (иначе говоря, время «возвращения» чрезвычайно велико), и с большой степенью точности можно считать, что в результате фазового размешивания в плазме устанавливается волна постоянной амплитуды. Фазовое размешивание (см. рис. 1.13) приводит к мелкомасштабным осцилляциям на функции распределения. (На этом рисунке все времена перемежаются заштрихованные и незаштрихованные участки на фазовой

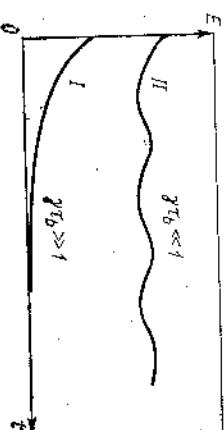


Рис. 1.14. Зависимость от времени амплитуды монохроматической волны: I — волна малой амплитуды, когда спонтанное затухание Ландау, II — волна большой амплитуды, для которой происходит быстрое включение затухания в результате фазовых осцилляций резонансных частиц

плоскости.) Рано или поздно масштаб этих шероховатостей становится настолько мелким, что нельзя пренебречь диффузий в пространстве скоростей из-за столкновений учитываемой в интегrale столкновений в кинетическом уравнении в форме  $\partial(v(T/m)\partial f/\partial v)/\partial v$  (см. § 1.9). Так что даже в бесстолкновительной плазме столкновения в концах концов слаживают шероховатости функции распределения. При таком слаживании энтропия уже не сохраняется и процесс становится истинно необратимым. Любопытно, что время, в течение которого происходит этот процесс, практически значительно меньше среднего времени столкновений. Из приведенных рассуждений следует, что рассматривавшиеся ранее линейное затухание Ландау существенно только для волн, достаточно малой амплитуды, когда  $U/k \gg 1$ , т. е.  $U/k \gg (e\varphi_0/m_e)^{1/2}$ .



Рис. 1.15. Экспериментальное наблюдение затухания Ландау монохроматической плазменной волны (Wharton C. B., Malinberg J. H., O'Neil T. M. «Phys. Fluids», 1968, v. II, 1761).

На рисунке показано пространственное распространение амплитуды потенциала волны линейных колебаний расстояния от источника при различных значениях амплитуды возбуждения в плазме синусоидального вида. Амплитуда сигнала возрастает при переходе от кривой 3 к 2 и далее к 1. При малых амплитудах (при  $k_2 \ll k_1$ ) имеет место монотонное затухание сигнала с линейным коэффициентом затухания  $\gamma_0 = 3k_2^2/\omega^2$  — групповая скорость волны. При больших амплитудах возникают осцилляции амплитуды волны, период которых определяется формулой (1.150),

где  $\gamma$  определяется формулой (1.148),  $v_g = 3k_2^2/\omega^2$  — групповая скорость волны. При этом затухание волны, пока амплитуда и волна успевает затухнуть, прежде чем проявится эффект осцилляций декремента. В обратном предельном случае относительное изменение амплитуды  $\Delta E/E \sim \gamma t \ll 1$ , и за несколько периодов колебаний амплитуды в результате фазового размешивания резонансных частей в плазме устанавливается стационарная нелинейная волна. На рис. 1.15 приведены экспериментальные результаты исследования затухания волны конечной амплитуды.

Фазовая память, сохраняющаяся до тех пор, пока плазма опи- сывается бесстолкновительным кинетическим уравнением, наглядно иллюстрируется эффектом так называемого «паземного эха». Рассмотрим его. Пусть при  $t=0$  в плазме возбуждается лентоморковская волна  $\exp[i(k_1 x - \omega_1 t)]$ , которая затем затухает из-за механизма Ландау. Эта волна оставляет, однако, незатухающую модуляцию функции распределения в форме  $f_1(v) \exp[i(k_1 x - \omega_1 t)]$ . Действительно, ранее при выводе дисперсионного уравнения (1.127) мы ограничивались частным решением кинетического уравнения, затухающим вместе с волной. Полное же решение кинетического уравнения, удовлетворяющее, к примеру, условию  $\delta f(t=0) = 0$ , имеет вид

$$\tilde{\delta f} = -(e/m_e) ik \left\{ \tilde{\varphi}(t) \frac{\exp[i(kx - \omega t)]}{1/(kv - \omega)} - \tilde{\varphi}(0) \frac{\exp[i(kx - \omega t)]}{1/(kv - \omega)} \right\} \frac{df_0}{dv} \quad (1.151)$$

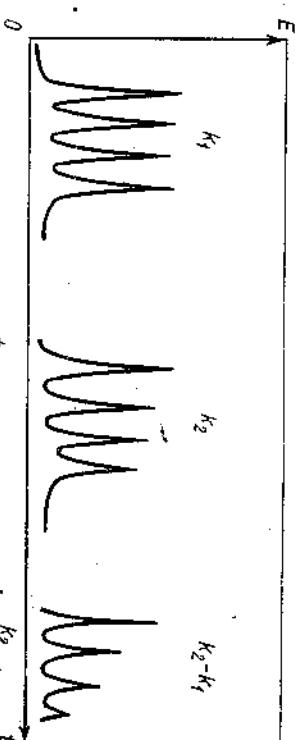


Рис. 1.16. Схема наблюдения явления плазменного эха

точно большое время  $t_0$  после первой волны в плазме создать новую волну  $\exp[i(k_2 x - \omega_2 t)]$ , которая затем также затухает, то такая волна приведет к модуляции функции распределения в форме  $f_2(v) \exp[i(k_2 x - i k_2 v(t - t_0)]$ . Модулироваться будет и возмущенная часть функции распределения, так что на ней возникнут биения

$$f_1(v) f_2(v) \exp[i(k_2 \pm k_1)x] \exp[i k_2 v t_0 - i(k_2 \pm k_1)v t]. \quad (1.152)$$

Эффект эха имеет место для биения с разностным волновым числом  $k_2 - k_1$  и состоит в следующем. В момент времени

$$t = t_0 k_2 / (k_2 - k_1) > t_0 \quad (1.153)$$

происходит своеобразная «фазировка»: взаимная компенсация фаз отдельных множителей в (1.152), и фаза биения перестает зависеть от  $v$ . В результате модуляция функции распределения в форме (1.152) приводит в этот момент времени к возмущению макроскопических величин — плотности электронного заряда, а следовательно, и электрического поля. Типичная схема наблюдения плазменного эха показана на рис. 1.16. Первые два импульса электрического поля при  $t=0$  и  $t=t_0$  возбуждаются от внешнего источника. Третий импульс — отклик плазмы, связанный с описанной выше фазировкой волны модуляции ее функции распределения. Эффект плазменного эха в значительной степени аналогичен явле-

[см. (1.123)]. Последнее слагаемое соответствует незатухающей волне модуляции на функции распределения, которая приводит к мелкомасштабным ее осцилляциям как функции скорости с характерным масштабом  $\sim 1/k_2 t$ , неограничено уменьшающимся с ростом времени. Физически такие осцилляции вполне аналогичны мелкомасштабной структуре функции распределения захваченных частиц, описанной выше. Им не соответствует макроскопическое возмущение плотности и электрическое поле, поскольку интеграл по скорости от  $\delta f$  стремится к нулю при больших временах. В результате фазового размешивания. Однако если через достаточно

ниям эха (спиновое, циклотронное) в неуплазменных средах. В каждом из них затухание макроскопически наблюдаемой физической величины, связанное с фазовым размешиванием быстро ослабляющихся микроскопических элементов (мелкомасштабные колебания функции распределения в плазменном эхо, прецессирующие ядерные магнитные моменты в спиновом эхо, ларморовское вращение электронов в циклотронном эcho), обращается во времени путем соответствующего воздействия на направление фазовой эволюции микроскопических элементов. Такое обращение достигается, как мы видели, в результате второго импульса плазменных колебаний или высокочастотного излучения, фазирующего микроскопические элементы.

## § 1.14. Пучковая неустойчивость

Проведем анализ одного важного следствия формулы (1.148) для декремента затухания Ландау плазменных колебаний. Из этой формулы следует, что затухание колебаний, обусловленное обменом энергий с резонансными частотами, реализуется только в том случае, когда функция распределения резонансных частей есть

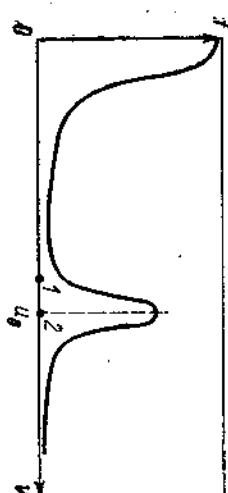


Рис. 1.17. Функция распределения электронов по скоростям для системы плазма-типор

распределения по скоростям может иметь дополнительный максимум для значения  $v_{\phi}$ , отличного от нуля. Этот случай изображен на рис. 1.17. Волна, фазовая скорость которой лежит вблизи второго максимума функции распределения между точками 1 и 2, раскачивается электронным пучком. Механизм раскачки — все тот же резонансный обмен энергией между волной и частицами, который в данном случае из-за выполнения условия  $df/dt(t=0=k)$  > 0, т. е. при обладания в исходном состоянии частиц, движущихся быстрее волн, приводит к росту амплитуды волны. Таким образом, из всего спектра волн, которые вследствие флюктуаций всегда присутствуют в плазме, электронный пучок выделяет узкую спектральную область находящихся с ним в фазовом резонансе волн и интенсивно накачивает энергию в эти волны.

В определенном смысле электронный пучок в плазме можно рассматривать как классический мазер на продольных колебаниях, поскольку механизм неустойчивости связан

монотонно убывающая функция скорости. Это имеет место, например, при максвелловском распределении частиц плазмы по скоростям, когда единственный максимум функции распределения соответствует скорости

При налажии в плазме достаточно интенсивного пучка электронов функция распределения по скоростям для значения  $v_e$ , отличного от  $v_{e0}$ , отлична от единицы и имеет максимум, соответствующий  $v_e = v_{e0}$ . На рис. 1.17 изображены фазораспределение второго максимума функции

\* Которая часто используется для цензуры.

THE JOURNAL OF CLIMATE

Формулы (1.148) и (1.154) описывают неустойчивости пучков с большим тепловым разбросом. Дело в том, что из-за нестационарности волнового процесса, в данном случае роста амплитуды волны при неустойчивости, резонанс волна — частота имеет колебательную ширину по скорости  $|v - \omega/k| \sim \gamma/k$ . Именно на такую минимальную ширину по фазовым скоростям, размыт пакет волн из-за мнимой части частоты. Формула (1.154), при выводе которой пренебрегалась конечной шириной резонанса волна — частота, относится к случаю сильно размытых пучков, когда тепловой разброс в пучке существенно больше ширины резонанса и для каждой неустойчивой волны на функции распределения пучка выделяется своя небольшая группа резонансных частот.

В обратном предельном случае до  $\frac{U}{U_0}$  весь пучок как целое находится в резонансе с неустойчивой волной. Именно в этом случае следует ожидать развития наиболье сильной пучковой неустойчивости. Дисперсионное уравнение для такой неустойчивости можно получить из общего уравнения (1.127). При вычислении интеграла по скоростям в этом уравнении следует выделить область тепловых скоростей, в которой интеграл по  $v$  вычисляется обычным путем (разложением по параметру  $k_U v/U_0$ ), и область скоростей пучка, при рассмотрении которой можно считать пучок имеющим  $\delta$ -образное распределение по скоростям:  $f_{\text{пуч}} = n_0(v - U_0)$ . Однако нагляднее вывести искомое уравнение по аналогии с дисперсионным уравнением неустойчивости Бунемана, считая электрона пучка своего рода отдельным сортим частиц со своей плас-

менной частотой  $\omega$ :

$$1 = \omega_p^2/\omega^2 + \omega_b^2/(\omega - k u_0)^2, \quad (1.155)$$

где  $\omega_b^2 = 4\pi e^2 n_i/m_e$  — квадрат ленгмюровской частоты в пучке. Применим графический метод анализа корней этого уравнения. График правой части этого уравнения  $F(\omega, k)$  при фиксированном  $k$ , т. е. для возмущений с заданной длиной волны, приведен на рис. 1.18. Видно, что когда минимальное значение  $F$  оказывается меньше единицы, т. е. для возмущений со временем  $(1.155)$  все четыре корня вещественны, что соответствует периодическому изменению возмущений со временем. Если же минимум  $F$  больше единицы, то уравнение (1.155) имеет только два вещественных корня, а два очевидно, соответствуют изменению амплитуды колебаний по закону  $\exp[\pm i\omega t - i\omega' t]$ , и таким образом, один из этих корней приводит к росту амплитуды со временем, т. е. к неустойчивости. Из (1.155) имеем, что при  $F = (\omega_p^2/\omega_b^2 u_0^2)^{1/3} (1 + (\omega_b^2/\omega_p^2)^{2/3})^3$  и, следовательно, неустойчивыми окажутся достаточно длинноволновые возмущения, для которых

$$k < k_{cr} = (\omega_p/u_0)[1 + (\omega_b^2/\omega_p^2)^{2/3}]^{3/2}. \quad (1.156)$$

Коротковолновые колебания с  $k > k_{cr}$  устойчивы. Примерный график функции  $\gamma(k)$  можно представить следующим образом. Нестойчивы только волны, сохраняющие фазовый резонанс с пучком  $\omega = k u_0$ . При малых  $k$  ( $k < \omega_p/u_0$ ) инкремент нарастает с волновым числом

$$\gamma < \gamma_{cr} = (\omega_p/u_0)^{1/2} (\omega_b^2 u_0^2/\omega_p^2 - 1)^{-1/2}. \quad (1.157)$$

Максимальный инкремент имеет место при выполнении резонансного условия  $k u_0 = \omega_p$  (резонанс между собственными колебаниями электронов плазмы  $\omega = \omega_p$  и волной в пучке  $\omega = k u_0$ ). Инкремент нарастания этой наиболее неустойчивой гармоники

$$\gamma_{max} = \omega_p (3^{1/2}/2^{4/3}) (n_i/n_0)^{1/3}. \quad (1.158)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что условие пренебрежения тепловым разбросом в пучке (моноэнергетический пучок) можно записать в виде

$$\Delta v/u_0 \ll (n_i/n_0)^{1/3}. \quad (1.159)$$

В обратном предельном случае «размытого» пучка  $\Delta v/u_0 \gg (n_i/n_0)^{1/3}$  для инкремента применима формула (1.148). Как и следовало

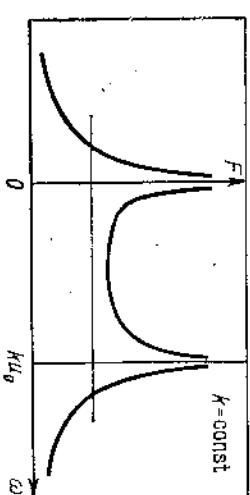


Рис. 1.18. График функции  $F(\omega, k)$  в дисперсионном уравнении (1.155).

корни являются комплексно сопряженными  $\omega = \omega' \pm i\gamma$ . Эти корни, очевидно, соответствуют изменению амплитуды колебаний по закону  $\exp[\pm i\omega t - i\omega' t]$ , и таким образом, один из этих корней приводит к росту амплитуды со временем, т. е. к неустойчивости. Из (1.155) имеем, что при  $F = (\omega_p^2/\omega_b^2 u_0^2)^{1/3} (1 + (\omega_b^2/\omega_p^2)^{2/3})^3$  и, следовательно, неустойчивыми окажутся достаточно длинноволновые возмущения, для которых

$$k < k_{cr} = (\omega_p/u_0)[1 + (\omega_b^2/\omega_p^2)^{2/3}]^{3/2}. \quad (1.156)$$

Коротковолновые колебания с  $k > k_{cr}$  устойчивы. Примерный график функции  $\gamma(k)$  можно представить следующим образом. Нестойчивы только волны, сохраняющие фазовый резонанс с пучком  $\omega = k u_0$ . При малых  $k$  ( $k < \omega_p/u_0$ ) инкремент нарастает с волновым числом

$$\gamma < \gamma_{cr} = (\omega_p/u_0)^{1/2} (\omega_b^2 u_0^2/\omega_p^2 - 1)^{-1/2}. \quad (1.157)$$

Максимальный инкремент имеет место при выполнении резонансного условия  $k u_0 = \omega_p$  (резонанс между собственными колебаниями электронов плазмы  $\omega = \omega_p$  и волной в пучке  $\omega = k u_0$ ). Инкремент нарастания этой наиболее неустойчивой гармоники

$$\gamma_{max} = \omega_p (3^{1/2}/2^{4/3}) (n_i/n_0)^{1/3}. \quad (1.158)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что условие пренебрежения тепловым разбросом в пучке (моноэнергетический пучок) можно записать в виде

$$\Delta v/u_0 \ll (n_i/n_0)^{1/3}. \quad (1.159)$$

В обратном предельном случае «размытого» пучка  $\Delta v/u_0 \gg (n_i/n_0)^{1/3}$  для инкремента применима формула (1.148). Как и следовало

ожидать, инкремент неустойчивости в этом случае существенно меньше.

Выясним теперь механизм рассматриваемого явления. В основе пучковой неустойчивости лежит физический механизм поляризационных потерь заряженной частицы, т. е. потерь энергии на излучение продольных колебаний, но существует и значительное различие. Если использовать аналогию с квантовомеханической излучающей системой, то это различие можно сформулировать

следующим образом: поляризационные потери отдельной заряженной частицы — эффект спонтанный, поляризующий пучок однороден по плотности, запионные потери, приводящие к пучковой неустойчивости, — процесс инициированный. В равновесном состоянии пучок однороден по плотности, поляризован по заряду и эффект поларизационных потерь отсутствует. Потери возникают в результате того, что волны плотности заряда, существующие в плазме на зародышевом тепловом уровне, приводят к предварительной модуляции пучка. В определенных условиях, которые будут выяснены ниже, электроны пучка собираются в основном в области тормозных фаз поля волны и тем самым усиливаются ниже, элекtronы ниже, элекtronы пучка собираются в основном в области тормозных фаз поля волны и тем самым усиливают модулирующую их волну. Чем больше амплитуда модулирующего поля, тем глубже модуляция пучка и больше потери и вследствие этого эффективнее происходит возбуждение волн пучком. В результате развивается пучковая неустойчивость — возбуждение плазменных колебаний с теплового уровня, сопровождающееся автомодуляцией пучка.

Неустойчивые плазменные волны должны находиться в фазовом резонансе с пучком — их фазовые скорости должны быть близки к скорости пучка. Однако условие фазового резонанса только необходимо для возникновения неустойчивости плазменных волн, достаточно ее условием является преимущественная бunchedировка пучка в области тормозных фаз поля, т. е. преобладание процессов индуцированного излучения волн над процессами поглощения.

Выясним условия, при которых происходит такая бunchedировка. На рис. 1.19 изображены профиль потенциала плазменной волны  $\Phi(x)$  и сила, действующая на электроны пучка в волне  $d\varphi/dx$ . Для определенности будем считать пучок моноэнергетическим, первоначально все его частицы имеют скорость  $v_0$ . Если предположить, что амплитуда волны изменяется со временем достаточно медленно, то возмущение скорости частиц пучка можно найти из закона

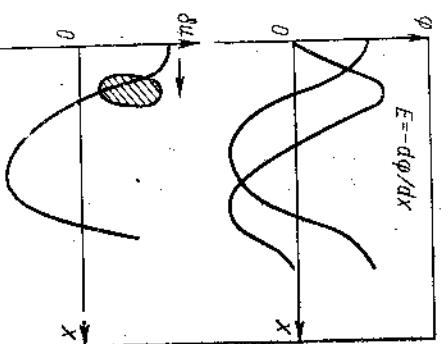


Рис. 1.19. Автомодуляция (бunchedировка) электронного пучка при пучковой неустойчивости. Графики приведены в системе отсчета волны  $x = (v_0 t)/\omega_p$ .

## сохранения энергии

$$(m_e/2)(u - \omega/k)^2 - e\Phi = \text{const}, \quad (1.160)$$

**т. е.**  $\delta u = (e\Phi/m_e)/(u_0 - \omega_0/k)$ . С течением времени первоначально синусоидальный профиль волн скорости в пучке искается, частицы с  $u > u_0$  забегают вперед, частицы с  $u < u_0$  отстают. При этом частицы пучка собираются в областях с повышенной крутизной профиля скорости  $u(x)$  (в системе отсчета волны движение направо). При выполнении условия  $u_0 > \omega_0/k$  (см. рис. 1.19) частицы собираются в области тормозящих фаз  $0 < \xi \equiv (kx/2\pi) < 1/2$ . Аналогичным образом если  $u_0 < \omega_0/k$ , то частицы будут бунироваться в области фаз  $1/2 < \xi < 1$ , где они ускоряются электрическим полем волнами, и неустойчивость не может быть.

Из приведенного анализа вытекает, что при взаимодействии электронного пучка с плазмой неустойчивыми оказываются только волны, для которых выполнено условие

$$\omega < k u_0. \quad (1.161)$$

В этом случае электронный пучок разбивается на струйки, стягивающиеся к тормозящим фазам электрического поля, и амплитуда волн растет со временем. Такой рост продолжается до тех пор, пока струйки, на которые разобьется электронный пучок, не окажутся захваченными возбуждаемой им плазменной волной. Как

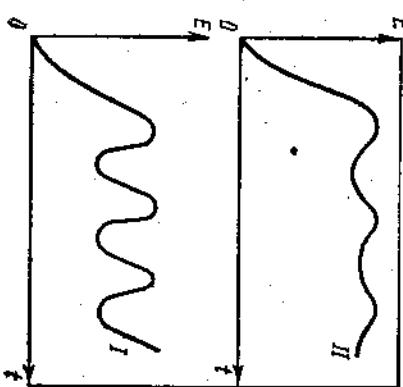


Рис. 1.20. Нелинейная эволюция амплитуды монохроматической волны, возбужденной при пучковой неустойчивости:

*I* — неустойчивая «моноэнергетическая» волна, вспыхивающая в квазистационарном режиме амплитуда волны колеблется, глубокие осцилляции соответствующие синхронным колебаниям частиц пучка в потенциальной яме; *II* — неустойчивость «размытого» пучка в плазме. В результате фазового размываения волны амплитуда волны достаточно быстро подходит на стационарный

пучка определяется соотношением (1.158). В результате из (1.162) получим, что при неустойчивости «моноэнергетического» пучка энергия плазменной волны должна возрастать до значения

$$E^2/4\pi \sim n_1 m_e u_0^2 (n_1/n_0)^{1/2}. \quad (1.163)$$

Эта оценка, основанная на наглядных физических соображениях, подтверждается графиком зависимости амплитуды волны от времени, полученным при численном решении задачи с учетом нелинейных эффектов (рис. 1.20). Вначале происходит экспоненциальный рост амплитуды волны от теплового уровня, сопровождающийся бунчивкой пучка. В дальнейшем захват пучка волной приводит к стабилизации неустойчивости, осцилляции амплитуды поля в нелинейном режиме соответствуют фазовым колебаниям бунчей, за-

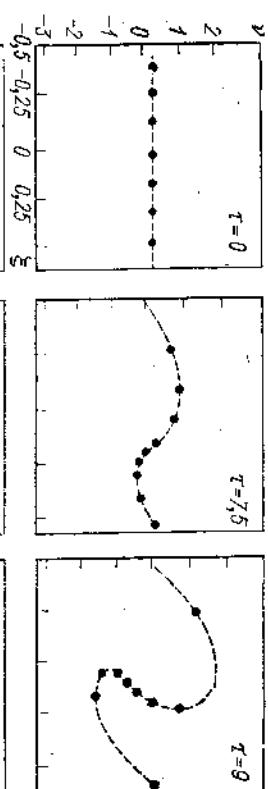


Рис. 1.21. Фазовая плоскость (зависимость скорости частиц пучка в системе отсчета волны  $v \sim \omega_0/k$  от их координаты  $\xi = kx/2\pi$ ) для моноэнергетического электронного пучка, взаимодействующего с плазмой в различные моменты времени  $t$  (по результатам численного эксперимента Н. Г. Маниборко и др. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 63, с. 874).

На рисунке показаны бунчивка электронов пучка в поле волны и последующее фазовое размывание волны, когда амплитуда волны становится равной  $\approx \omega_0 r / u_0$ , инкремент неустойчивости  $k \approx \omega_0 r / u_0$ , соответствует осцилляции амплитуды волны (см. рис. 1.20). Время измеряется в обратных инкрементах пучковой неустойчивости

$$e\Phi/m_e \sim \gamma^2/k^2. \quad (1.162)$$

Вспользуемся тем, что электрическое поле плазменной волны  $E \sim k\Phi$ , соответствующее синхронным колебаниям частиц пучка в потенциальной яме; *II* — неустойчивость «размытого» пучка в плазме. В результате фазового размываения волны амплитуда волны достаточно быстро подходит на стационарный

хваченных в потенциальную яму волны, между тормозящими и ускоряющими фазами поля.

Примерно такой же вид имеет зависимость от времени амплитуды волны, возбуждаемой «размытым» электронным лучком (см. рис. 1.20). Основные отличия этого случая от случая монознергетического пучка: 1) из-за малого числа частиц, резонансных с волнами

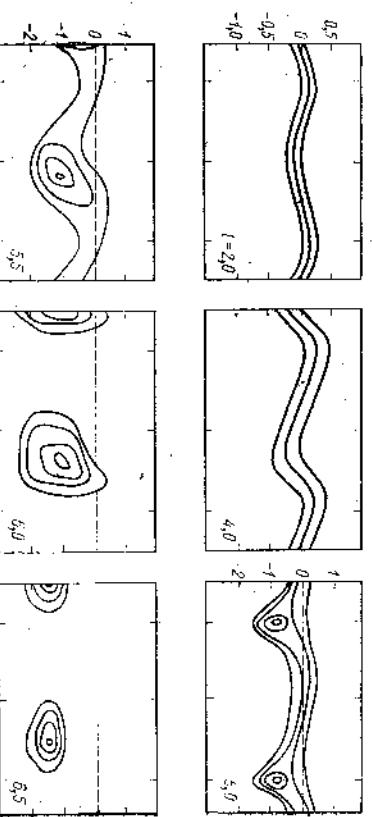


Рис. 1.22. Фазовая плоскость электронов пучка в эксперименте по взаимодействию монознергетического пучка малой плотности с плазмой (Genie K. W., Lohr J. *J. Phys. Fluids*, 1973, v. 16, p. 1465). Фазовая плоскость показана на различных расстояниях  $t$  от места накачки электронного пучка в плазму; расстояние измеряется в пространственных инверсиях. При  $\zeta = 4.0$  происходит лишь недолгая модуляция пучка; центральная линия соответствует максимуму функции распределения. При больших  $t$  внутренний контур соответствует максимуму функции распределения. При указанных же  $t$ -ах, соответствующих  $I = 0.8$ ,  $0.5$ ,  $0.2$ , пучок бunched, то есть при  $t = 6.5$  не достигает пика, а при  $t = 6.5$  не достигает минимальной фазовой ширине спектров. В дальнейшем спектр начинает переноситься к ускоряющим фазам поля, пучок ускоряется и при  $t = 9$  он снова имеет свою на-

чальную скорость.

нной, амплитуда волны оказывается существенно меньше; 2) наличие разброса по энергиям в пучке приводит к фазовому размещению в потенциальной яме, затуханию осцилляций и установлению волн постоянной амплитуды.

Процесс бunched-пучка, «наблюденный» в численном эксперименте, показан на рис. 1.21. На рис. 1.22 приведены результаты лабораторного эксперимента по возбуждению монохроматической волны электронным пучком.

### § 1.15. Параметрическая неустойчивость

Авторы надеются, что читатель уже привык мыслить, что плазма — это не только большое число заряженных частиц, но и ансамбль большого числа осцилляторов — элементарных мод колебаний, каждое из которых характеризуется определенным значением волнового числа и частоты. В равновесной плазме все эти колебания находятся в зародышевом состоянии на уровне тепловых флуктуаций. При отклонении от равновесности (электрический ток в плазме, пучок быстрых частиц и др.) некоторые ветви колебаний (ионно-звуковая, плазменная) могут возбуждаться до весьма значительного уровня в результате какого-либо из описанных в предыдущих параграфах механизмов линейной неустойчивости. Пока амплитуда колебаний мала, все электромагнитные моды — осцилляторы можно считать гармоническими и независимыми друг от друга. Однако поскольку плазма — среда нелинейная, то при достаточно больших амплитудах возникает связь между модами — осцилляторами. Одна из форм этой связи, которая рассмотрена в настоящем параграфе, напоминает хорошо известное явление параметрического резонанса, описываемого в механике в простейшем случае уравнением Маттье.

Ситуация такого рода получается, если в плазме возбуждено колебание с некоторой концепцией амплитудой. Нелинейность плазмы приводит к тому, что малые волновые возмущения (пробные волны) на фоне заданного колебания (будем называть его «вольной накачки») оказываются параметрически связанными, подобно тому как это имеет место в системе параметрически связанных осцилляторов. По аналогии с задачей о параметрическом осцилляции, иначе говоря, о том, не может ли присутствие «волны накачки» приводить к нарастанию пробных волн. Первое, что сразу бросается в глаза, условие резонанса Маттье  $\omega_{00} = 2\omega$ , должно быть дополнено ограничением на волновые числа  $n\kappa_0 = 2k$ , так как в плазме каждый элементарный осциллятор характеризуется не только частотой, но и волновым числом. Одновременное выполнение этих условий явилось бы слишком жестким ограничением, поскольку кроме условий параметрического резонанса  $\omega$  и  $k$  для каждой ветви колебаний связаны друг с другом еще законом дисперсии  $\omega = \omega(k_0)$ ,  $\omega = \omega(k)$ .

Более реальной оказывается возможность параметрического возбуждения одновременно по крайней мере пары волн. Развивающаяся при этом параметрическая, т. е. нелинейная, неустойчивость в плазме часто изменяется «распадной». Она состоит в том, что в присутствии волны накачки с частотой  $\omega_0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_0$  нарастает одновременно пара волн  $\omega_1, \mathbf{k}_1$  и  $\omega_2, \mathbf{k}_2$ , удовлетворяющих условием

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \omega_1 + \omega_2; \\ \mathbf{k}_0 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.164)$$

Соотношения (1.164) допускают весьма наглядную квантовую интерпретацию. При такой интерпретации набор элементарных мод — осцилляторов, присутствующих в плазме, можно рассматривать как некий газ «квазичастиц» с энергией  $\epsilon = \hbar\omega$  и импульсом  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  (фотоны для электромагнитных колебаний, фононы — для ионно-звуковых и т. д.). Тогда соотношение (1.164) есть не что иное, как законы сохранения энергии и импульса при распаде исходного «кванта» ( $\omega_0, \mathbf{k}_0$ ) на два других — ( $\omega_1, \mathbf{k}_1$ ), ( $\omega_2, \mathbf{k}_2$ ).

Первым теоретически предсказанным и детально исследованным еще в 1962 г. типом параметрической распадной неустойчивости явилась неустойчивость электронной ленгмировской волны накачки.

Волнами с индексами 1 и 2 в условиях (1.164) в этом случае являются другая плазменная волна и ионно-звуковая волна, поэтому предполагается неизотермичность плазмы ( $T_e \gg T_i$ ). Эта неустойчивость часто называется распадом «плазмон — плазмон + фонон», хотя задача совершенно не квантовая. В дальнейшем параметрическая неустойчивость исследовалась для самых различных ветвей колебаний и волн. Несмотря на разнообразие типов волн в плазме и вытекающий отсюда большой выбор параметрических связей, все параметрические неустойчивости имеют одинаковую природу. Поэтому удобно начать их рассмотрение с какой-нибудь простой модели. Очевидным обобщением уравнения Матье на случай волновой среды могло бы служить, например, следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - s^2 [1 + \alpha \cos(\omega_0 t - k_0 x)] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \hat{L} u = 0. \quad (1.165)$$

Подобно тому как в уравнении Матье модулируется собственная частота осциллятора, здесь модулируется скорость распространения волны. Слагаемое  $\hat{L}u$ , где  $\hat{L}$  — линейный оператор, добавлено, чтобы учесть возможное отклонение от линейного закона дисперсии  $\omega = ks$ , коэффициенты в этом члене в принципе также можно модулировать.

Будем искать условия параметрического возбуждения в уравнении (1.165) одновременно пары элементарных волн. Для этого приведем уравнение (1.165) к виду, напоминающему уравнение гармонического осциллятора с правой частью (вынуждающая сила). Удобно перейти к Fourier-компонентам  $u_k = \int u dx$  и перенести слагаемое, учитывающее влияние волны накачки, в правую часть:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_k}{dt^2} + \omega^2(k) u_k &= -(1/2) s^2 (k_0 - k)^2 \alpha \exp(-i\omega_0 t) u_{k_0-k}^* - \\ &\quad - (1/2) s^2 (k_0 + k)^2 \alpha \exp(i\omega_0 t) u_{k_0+k}^*, \end{aligned} \quad (1.166)$$

где  $\omega^2(k) = s^2 k^2 + L(k)$  — закон дисперсии волн (для простоты считаем, что модулируется только скорость распространения волн).

Вынуждающая сила будет в резонансе с собственной частотой осциллятора  $\omega_k$ , если выполнено условие

$$\omega_0 \pm \omega_{k_0-k} = \omega_k. \quad (1.167)$$

Выберем в этом условии знак минус, тогда приведенное соотношение совпадает, как нетрудно видеть, с распадным условием (1.164) для частоты. В этом случае в правой части уравнения (1.166) существенно только первое слагаемое. Волна  $u_{k_0-k}$  в свою очередь, описывается аналогичным уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_{k_0-k}}{dt^2} + \omega_{k_0-k}^2 u_{k_0-k}^* &= -(1/2) s^2 k^2 \exp(i\omega_0 t) u_k - \\ &\quad - (1/2) \alpha (2k_0 - k)^2 s^2 \exp(-i\omega_0 t) u_{2k_0-k}^*. \end{aligned} \quad (1.168)$$

При выполнении резонансного условия на частоту  $\omega_0 - \omega_{k_0-k} = \omega_k$  в правой части уравнения (1.168) также существенно только первое слагаемое.

Итак, рассмотренное здесь параметрическое взаимодействие волн в нелинейной среде ничем не отличается от параметрического резонанса в системе двух связанных осцилляторов  $u_k, u_{k_0-k}$ . Однако эта аналогия стала полной лишь в силу использованного предположения — мы опустили слагаемое  $\sim u_{k_0+k}$  в правой части уравнения (1.166) и аналогичный член в уравнении (1.168). Дело в том, что для одновременного возбуждения осцилляторов  $u_{k_0-k}, u_{k_0+k}$  должны выполняться два распадных условия для частоты:

$$\omega_0 - \omega_{k_0-k} = \omega_k; \quad \omega_{k_0+k} = \omega_0 = \omega_k.$$

Их совместное выполнение практически маловероятно. Поэтому хотя в литературе и были попытки исследования этого случая, они не представляют существенного интереса в общем случае и здесь не рассматриваются.

Параметрическая связь между осцилляторами приводит к смещению частоты. Будем интересоваться случаем, когда поправка к частоте становится чисто мнимой и, следовательно, соответствует неустойчивости. Решение системы уравнений (1.166), (1.168) ищем в виде

$$u_k = \tilde{u}_k \exp(-i\omega t); \quad u_{k_0-k}^* = \tilde{u}_{k_0-k}^* \exp\{-i(\omega - \omega_0)t\}.$$

Подстановка в (1.166) и (1.168) дает следующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 - \omega_k^2) \tilde{u}_k &= (\alpha s^2 / 2) (k_0 - k)^2 \tilde{u}_{k_0-k}^*; \\ [(\omega - \omega_0)^2 - \omega_{k_0-k}^2] \tilde{u}_{k_0-k}^* &= (\alpha s^2 / 2) k^2 \tilde{u}_k. \end{aligned} \right\} \quad (1.169)$$

При малой параметрической связи частота осцилляторов близка к линейной:  $\omega = \omega_0 + i\gamma$ ,  $|\gamma/\omega_0| \ll 1$ . Тогда, используя распадное

условие  $\omega_k = \omega_0 - \omega_{k_0-k}$ , получим из условия разрешимости системы (1.169) следующее уравнение для  $\gamma$ :

$$\gamma^2 = \alpha^2 k^4 (k_s - k)^2 / 16\omega_{k_0-k}^4. \quad (1.170)$$

Неустойчивость развивается при  $\gamma^2 > 0$ , т. е. при  $\omega_{k_0-k} > 0$ , это вместе с распадным условием для частоты означает, что для возникновения параметрической неустойчивости необходимо, чтобы

$$\omega_s > \omega_k, \omega_{k_0-k}. \quad (1.171)$$

\*Смысл полученного результата достаточно очевиден на «квантовом» языке: квант волны накачки ( $\omega_0, k_0$ ) имеет большую частоту, а, следовательно, и большую энергию, чем квант любой из образующихся при распаде пробных волн, поскольку при распаде часть энергии уносится вторым квантам.

После обсуждения такой символической модели рассмотрим уже упоминавшийся выше распад плазменной волны на плазменную волну и звук.

Основной нелинейный эффект, приводящий к связи плазменных и звуковых колебаний, — это модуляция плотности плазмы низкочастотной звуковой волной. Рассмотрим, как с учетом этого эффекта меняются уравнения для плазменных и звуковых колебаний. Естественная физическая величина, характеризующая высокочастотные лентмировские колебания с большим разделением зондов, — это электрическое поле колебаний  $E(t, x)$ . В линейной теории уравнение для электрического поля монохроматической лентмировской волны сводится к хорошо известному дисперсионному уравнению (1.146):

$$[\omega^2 - \omega_p^2 - 3k^2 T_e/m] E(\omega, k) = 0. \quad (1.172)$$

В присутствии звуковой волны происходит модуляция плотности плазмы, в результате чего в слагаемом  $\omega_p^2 E$  появляется нелинейный член, пропорциональный  $\delta E$ . С учетом этого слагаемого плазменная волна уже не является более монохроматической, в ней рождаются новые гармоники на биениях лентмировской и звуковой волн. Нетрудно обобщить уравнение (1.172) на случай немонохроматичности лентмировской волны. Очевидно, что при этом следует заменить частоту  $\omega$  на оператор дифференцирования по времени  $\partial \rightarrow i\partial/\partial t$  и аналогичным образом волновое число  $k \rightarrow (1/i)(\partial/\partial x)$ . В итоге вместо (1.172) получаем следующее дифференциальное уравнение для электрического поля лентмировской волны:

$$(\partial^2/\partial t^2 - 3k^2 \rho \omega_p^2 (\partial^2/\partial x^2) - \omega_p^2) E = \omega_p^2 E \Phi t/m_e, \quad (1.173)$$

где  $\Phi$  — квадрат лентмировской частоты, рассчитанной по неизменной плотности  $n_0$  (нелинейный член, возникающий в результате модуляции плотности плазмы звуковой волной, перенесен в правую часть уравнения).

Для низкочастотных квазинейтральных колебаний, напротив, электрическое поле весьма мало и звуковые колебания наиболее естественно описываются такими величинами, как скорость ионов в волне либо возмущение плотности. Уравнение для возмущения плотности в монохроматической звуковой волне опять-таки может быть получено простым обобщением линейного дисперсионного уравнения. Считая волну достаточно медленной  $\omega/k \ll v_{te}$  и квазинейтральной, с учетом результатов § 1.11 запишем следующее уравнение для  $\delta n$ :

$$[(1/k^2 r^2) + s_i(\omega, k)] \delta n(\omega, k) = 0. \quad (1.174)$$

Это уравнение, в принципе, учитывает и кинетические эффекты, связанные с ионами, что может быть существенно при выполнении условия  $\omega/k \sim v_{te}$ . Если же частота и волновое число низкочастотной волны таковы, что выполнено условие  $\omega/k \gg v_{te}$ , то ионы можно описывать гидродинамически. В этом случае, как мы знаем,  $s_i = -\omega_p^2 r^2/\omega^2$  и уравнение (1.174) переходит в следующее:

$$[\omega^2 - k^2 (T_e/m_i)] \delta n(\omega, k) = 0. \quad (1.175)$$

Связь ионно-звуковых колебаний с высокочастотными лентмировскими осуществляется из-за существования сил высокочастотного давления (см. § 1.7). В этом параграфе было показано, что при наличии высокочастотных колебаний кроме обычного газокинетического давления электронов возникает еще и высокочастотное

$$\rho_{v,4} = (1/16\pi) \langle E^4 \rangle,$$

где угловые скобки, как обычно, означают усреднение по высокой частоте. Звуковая волна приводит, с одной стороны, к модуляции плотности плазмы, а следовательно, и кинетического давления  $\sim \delta n T_e$ , а с другой стороны, из-за возникновения биений лентмировских волн — к модуляции высокочастотного давления  $\sim \langle E^4 \rangle / 16\pi$ . Поэтому в уравнении (1.175) для  $\delta n$  следует следовать замену:

$$\delta n T_e \rightarrow \delta n T_e + \langle E^4 \rangle / 16\pi.$$

Кроме того, так же как и в уравнении для высокочастотной лентмировской волны, подставим в (1.175) вместо  $\omega$  и  $k$  операторы дифференцирования  $i\partial/\partial t$  и  $(1/i)\partial/\partial x$ : В результате получим следующее уравнение для модуляции плотности плазмы медленных квазинейтральных движений:

$$(\partial^2/\partial t^2 - (T_e/m_i) \partial^2/\partial x^2) \delta n = (1/16\pi m_i) \partial^2/\partial x^2 \langle E^4 \rangle. \quad (1.176)$$

Будем искать решение уравнений (1.173) и (1.176) в виде колебаний, удовлетворяющих распадным условиям (1.164):

$$\left. \begin{aligned} \delta n &= (1/2) \tilde{\delta n} \exp\{i(kx - \omega t)\} + \text{к. с.}; \\ E &= E_0 \exp\{i(k_s x - \omega t)\} + E_1 \exp\{i(k_s - k)x - i(u_0 - \omega)t\} + \text{к. с.} \end{aligned} \right\} \quad (1.177)$$

Тогда для амплитуд плазмена и фона, возбуждаемых при параметрической неустойчивости, имеем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\omega^* - \omega_s(k))\delta n &= (k^2 n_s / 2m_i m_e \omega_p^2) E_1^* E_{-1}^*; \\ [(\omega_p - \omega)^2 - \omega_{i,k_0-k_1}] E_1^* &= (\omega_p^2 / 2n_s) \delta n E_{-1}^*, \end{aligned} \right\} \quad (1.178)$$

где  $\omega(k) = (\omega_p^2 + 3k^2 T_e/m_e)^{1/2}$  — частота плазмена с волновым числом  $k$ ,  $\omega_s(k) = k(T_e/m_i)^{1/2}$  — частота звука. По структуре эта система уравнений эквивалентна уравнениям (1.169), и по аналогии с (1.169) имеем в рассматриваемом случае следующую формулу для инкремента параметрической неустойчивости:

$$\Psi_d^2 = (1/16) \omega \delta n E_0^2 / 4 \pi l_0 T. \quad (1.179)$$

Как уже отмечалось выше, возбуждаемый при параметрической неустойчивости плазмон должен иметь частоту меньшую, чем у вол-

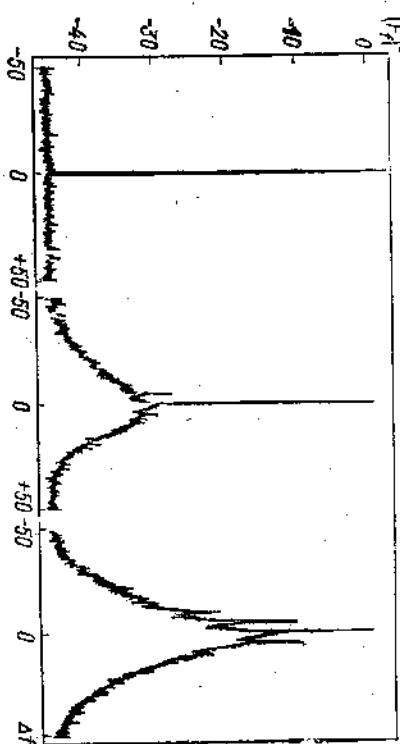


Рис. 1.23. Экспериментальное наблюдение распадной параметрической неустойчивости монохроматической плазменной волны (Franklin R. N., Haukeberger S. M., Smith G. J. («Plasma Phys.», 1973, v. 15, p. 935).  
Монохроматическая волна с частотой, близкой к плазменной, и малым резонансным затуханием возбуждалась с помощью зонда. Показаны спектры вспарывающих плазменных колебаний на различных расстояниях от возбуждающего зонда.

Ни накачки. С учетом закона дисперсии плазменных колебаний это означает, что при параметрической неустойчивости перекачка энергии колебаний происходит в сторону больших длин волн. Используя распадное условие, которое в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$(3/2) k^2 r^2 D - (3/2) k_1^2 r^2 D = k_D (m_e/m_i)^{1/2}, \quad (1.180)$$

где  $k_1 = k_0 - k$  — волновое число пробного плазмена, получаем, что параметрическая неустойчивость распада на звук возможна только для не слишком длинноволновых плазмонов:  $k_0 r_D > (1/3) \times (m_e/m_i)^{1/2}$ . Если  $k_0 r_D \gg (m_e/m_i)^{1/2}$ , то, как следует из соотноше-

ния (1.180), параметрически связанными окажутся **только** распространяющиеся навстречу друг другу плазменные волны,  $k_1 \approx -k_0$ , при этом в результате отдельного акта распада длинноволновая перекачка плазмена проходит на некоторое малое

$$\Delta k = k_0 + k_1 \approx r_D^{-1} (m_e/m_i)^{1/2} \ll k_0.$$

На рис. 1.23 и 1.24 приведены результаты лабораторного и численного экспериментов, иллюстрирующих параметрический распад плазменной волны.

Параметрически связанными между собой могут быть самые различные ветви колебаний плазмы — электромагнитные  $t$ -волны,

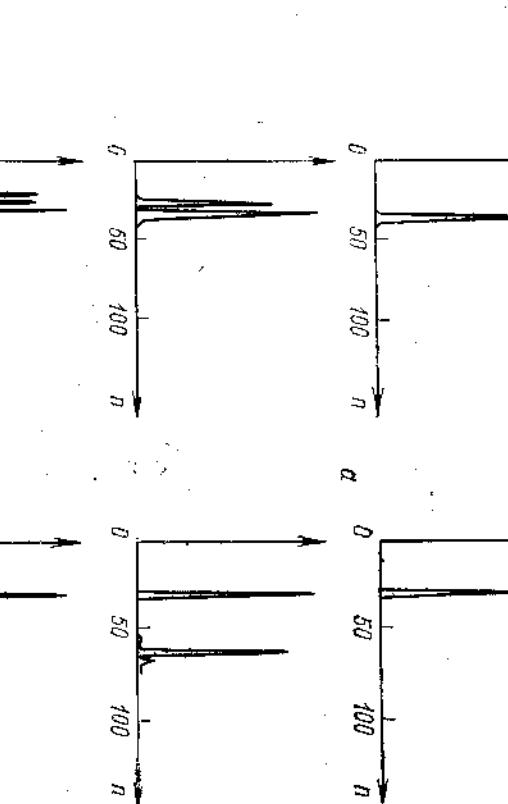


Рис. 1.24. Взаимодействие спектра ленгмюровских волн, возбуждаемых вследствие распада электромагнитной волны накачки с частотой  $\omega_0$ , близкой к плазменной ( $t$ -частотный эксперимент):  $a$  — возбуждение монохроматической ленгмюровской волны из электромагнитной волны на-  
качки,  $k_1 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{3} (\omega_0 - \omega_p) \omega_p^{-1}}$ . При этом в спектре ионно-звуковых колебаний также

появляется волна с волновым числом  $k_1$ ;  $b$  — возбуждение сегнетоидов в спектре ленгмюровских волн в результате распадной неустойчивости по схеме  $j+j+s$ . В результате распада ленгмюровской волны возбуждаются ионо-звуковые колебания с волновым числом порядка  $2k_1$  (Горбунова Т. А., Петров Л. М. и др. Препринт Инита прил. мат. АН СССР, 1978, № 17)

плазменные  $J$ -волны, ионно-звуковые  $S$ -волны. Но непременное условие параметрической неустойчивости — частота волны накачки должна быть больше частоты всех возбуждаемых в результате неустойчивости волн. Не вдаваясь в детали соответствующих вычислений, которые легко провести в рамках намеченной выше общей схемы, приведем условия возникновения всех возможных типов параметрических неустойчивостей изотропной плазмы и инкременты нарастания амплитуды (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Условия распада параметрических неустойчивостей волн в плазме

Волны, участвующие в распаде	Условие распада	Инкремент нарастания
$I \rightarrow I' + S$	$k_0 > r_D^{-1} (1/3) (m_e/m_i)^{1/2}$	$(eE_0/m_e\omega^t v_{Te}) (\omega/\omega_p)^{1/2}$
$I \rightarrow I + S$	$k_0 > (\omega_p/c) (m_e/m_i)^{1/2}$	$(eE_0/m_e\omega^t v_{Te}) (\omega'/\omega^S)^{1/2}$
$I \rightarrow I + I'$	$\omega^t \approx 2\omega_p$	$(eE_0/\omega^t m_e c) \omega_p$
$I \rightarrow I' + I$	$\omega_p \geq \omega^t (v_{Te}/c)$	$(eE_0/m_e\omega^t c) (\omega'/\omega_p)^{1/2}$
$I \rightarrow I' + S$	$\omega_p \geq \omega^t (v_{Te}/c)$	$[(eE_0/(m_e\omega^t v_{Te})] (\omega'/\omega^S)^{1/2} (\omega_p/\omega)$

Некоторые из приведенных в таблице параметрических неустойчивостей соответствуют явлениям вынужденного комбинационного рассеяния, известным из других разделов физики. Так, например, распад по схеме  $I \rightarrow I' + S$  соответствует хорошо известному в физике твердого тела явлению Мандельштама — Бриллюэна — рассеянию света интенсивными звуковыми колебаниями решетки. Распад по схеме  $I \rightarrow I' + I$  — это явление рассеяния Рамана — рассеяние света на оптических колебаниях решетки.

Порог параметрической неустойчивости в однородной плазме определяется диссилиацией энергии пробных волн. Затухание однотипных раскачиваемых возмущений не может полностью стабилизировать неустойчивость, а только уменьшает ее инкремент. Действительно, обратимся вновь к задаче о распаде плазменной волны и учтем сначала затухание низкочастотной моды колебаний. При этом соответствующий ей осциллятор становится затухающим с лекрементом затухания  $\gamma_s$ , соответственно этому левую часть первого из уравнений (1.178) следует видоизменить, введя в нее слагаемое  $2i\nu_s \omega_b$ . Дисперсионное уравнение получается по общей схеме. Решая его в предположении, что  $\Upsilon = \text{Im } \omega \ll \nu_s$ , получаем, что в этом случае развивается диссилиативная параметрическая неустойчивость с инкрементом

$$\gamma = \gamma_d^2 / \nu_s.$$

И только при учете затухания плазменной волны (его **легко** **учесть** **выделением** в левую часть второго из уравнений (1.178) слагаемого  $2i\nu_s(\psi_{00}-\psi_0)$ ), где  $\nu_s$  — затухание плазмона), когда уравнение (1.181) трансформируется в следующее:

$$\Upsilon = \gamma_d^2 / \nu_s - \nu_s,$$

возможна стабилизация параметрической неустойчивости. Порого-вое значение амплитуды накачки, при которой происходит такая стабилизация, определяется из условия

$$\gamma_d^2 = \nu_s \Upsilon.$$

Предшествующее рассмотрение относилось к начальной стадии параметрической неустойчивости, когда амплитуду волны накачки можно считать постоянной, а амплитуды пробных волн — экспонентой. При достаточно больших амплитудах пробных волн становится существенные нелинейные эффекты, связанные с изменением амплитуды волны накачки. Обратимся для конкретности к задаче о параметрической неустойчивости плазменной волны. Уравнение для изменения  $E_0$  легко можно получить из (1.173), причем очевидно, что  $\partial E_0 / \partial t \sim \delta \eta E_1$ . Распад при больших амплитудах пробных волн описывается, таким образом, системой из трех связанных нелинейных уравнений для  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $\delta \eta$ . Эта система уравнений допускает точное аналитическое решение. Однако, слишком громоздко для этой книги. Опуская вывод, приведем графики зависимостей  $E_0(t)$  и  $E_1(t)$ , полученные при точном интегрировании уравнений взаимодействия трех волн (рис. 1.25). Как видно, амплитуда пробной волны  $E_1$  достигает максимального значения, равного начальному значению амплитуды накачки  $E_0(0)$  (накачка при этом минимальна), в дальнейшем энергия перекачивается от пробной волны к волне накачки и т. д. Характерный период осцилляций порядка величины обратного инкремента неустойчивости. Энергия, переходящая в ионно-звуковые колебания, мала по сравнению с энергией плазменной волны в  $\omega^s / \omega_p$  раз — именно такая доля энергии уносится фононом при элементарном акте распада — «плазмон- $\rightarrow$ плазмон+фонон».

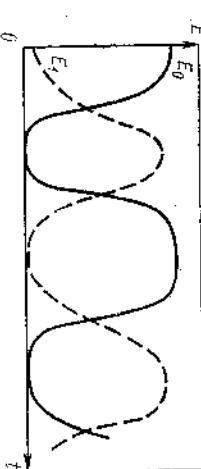


Рис. 1.25. Зависимость от времени амплитуд при взаимодействии трех волн при распаде неустойчивости

§ 1.16. Резонансное взаимодействие волн и частиц (квазилинейная теория)

Плазму, в которой в конце концов возбуждается большая количество волн — мод колебаний (например, из-за неустойчивостей, рассмотренных ранее), можно назвать **турбулентной**, если

7\*

амплитуды волн существенно превышают уровни тепловых флуктуаций, а их фазы случайны. Вообще говоря, если уровни колебаний становятся очень большим, то могут стираться описанные выше характерные черты отдельных мод. Поэтому специально выделяют более простой случай, где очень больших амплитуд — так называемое приближение слабой турбулентности. Нелинейность плазмы приводит к взаимодействию между модами типа рассмотренной в предыдущем параграфе распадной неустойчивости, так что коэффициенты в разложении по собственным колебаниям становятся медленно меняющимися (в масштабе периода колебаний) функциями времени.

Важная особенность плазменной турбулентности, отличающая ее от турбулентности жидкости, связана с тем, что в плазме значительно, а иногда и доминирующую роль играет известный из предыдущих параграфов эффект резонансного взаимодействия волн с частицами. В старшем порядке по амплитуде поля такой эффект соответствует индуцированному излучению и поглощению волн частотами, скорости которых связаны с частотами и волновыми векторами волн Черенковским условием (резонанс Ландау):

$$\omega = kv. \quad (1.182)$$

Здесь уместно поставить вопрос о том, как будет меняться функция распределения резонансных частиц по скоростям при излучении и поглощении волн. Этот вопрос уже рассматривался в § 1.13 для изолированной монохроматической волны. В этом случае основной эффект обратного воздействия волны на частицы заключается в захвате резонансных частиц волной и их фазовых осцилляциях в потенциальной яме. Зависимость периода фазовых колебаний от энергии частиц приводила к фазовому размешиванию, так что функция распределения в узком интервале скоростей  $|v - \omega|/k \sim (e\Phi_0/m)^{1/2}$  испытывала мелкомасштабные осцилляции, слаженная по этим осцилляциям. Функция распределения была постоянна вдоль траекторий.

Траектории резонансных частиц существенно отличались от невозмущенных, и решение задачи удалось получить только благодаря тому, что уравнения движения частиц при достаточно медленном изменении амплитуды волны имеют точные интегралы. Уже при наличии двух-трех волн строгий анализ движения резонансных частиц становится безнадежно сложным, и аналитическое решение задачи для этого случая до сих пор не получено. Ситуация, однако, существенно упрощается в предельном случае очень

большого числа волн, когда можно использовать статистический подход, ссылая случайными их фазы. Действительно, предположим, что в пакете возбужден широкий пакет волн, фазовые скорости которых достаточно плотно заполняют некоторый интервал  $(\omega/k)_{\text{max}} > v > (\omega/k)_{\text{min}}$ , так что области захвата соседних волн перекрываются. Очевидно, что для этого должно быть выполнено условие

$$\delta(\omega/k) < \{(e/mk)(E^2 k \delta_k)\}^{1/2}, \quad (1.183)$$

где  $\delta(\omega/k)$ ,  $\delta_k$  — расстояние между соседними гармониками по фазовой скорости и волновому числу соответственно;  $E^2 k$  — спектральная плотность энергии электрического поля плазменных шумов. Тогда энергия плазменных шумов на интервале  $\delta_k$  равна  $E^2 k \delta_k$ , среднеквадратичный потенциал на этом интервале  $(E^2 k \delta_k)^{1/2}/k$  и условие (1.183) действительно соответствует перекрытию потенциальных ям для соседних волн (рис. 1.26). При выполнении этого условия происходит своеобразная «коллективизация» резонансных частиц между двумя любыми соседними ямами. Если фазы волн случайны, то в результате столкновений многих волн скорость частицы как бы участвует в броуновском движении. В фазовом пространстве это броуновское движение складывается со свободным движением частиц, так что результатирующие траектории имеют вид, изображенный на рис. 1.27. С течением времени броуновские траектории частички хаотически, но достаточно плотно заполняют па фазовой плоскости весь участок резонансных скоростей частиц:  $(\omega/k)_{\text{max}} > v > (\omega/k)_{\text{min}}$ . Относительно полной ширины пакета волн в этом случае предполагается, что она существенно больше ширины потенциальной ямы, созданной пакетом:

$$\Delta(\omega/k) = (\omega/k)_{\text{max}} - (\omega/k)_{\text{min}} \gg (e\Phi_0/m)^{1/2}, \quad (1.184)$$

где  $\Phi_0 = [\int dk E^2 k / k^2]^{1/2}$  — среднеквадратичный потенциал в пакете волн. Устанавливаясь в этих условиях функция распределения, разумеется, содержит мелкомасштабные шероховатости и сохраняет (в отсутствие столкновений) энтропию, но физический смысл имеет только слаженная функция распределения, которая соответствует росту энтропии и описывает диффузию резонансных частиц в поле волны. В результате диффузии функция распределения будет выравниваться, т. е. стремиться к постоянному значению, на участке  $(\omega/k)_{\text{max}} > v > (\omega/k)_{\text{min}}$ , заполненном траекториями частиц (постоянство слаженной функции распределения

на траекториях имело место и в случае монохроматической волны).

Процесс диффузии резонансных частиц можно описать в рамках так называемого квазилинейного приближения. При получении уравнений этого приближения предполагается, что амплитуды возбужденных в плазме волн не слишком велики, так что нелинейными взаимодействиями между колебаниями можно пренебречь, а единственный нелинейный эффект, который принимается во внимание, связан с обратным воздействием колебаний на распространение резонансных частиц по скоростям, в результате чего возбуждение и поглощение колебаний происходит на медленно меняющемся под действием самих же колебаний «фоне».

Мы не будем вдаваться в детали обоснования уравнений квазилинейного приближения (хотя такое обоснование уже давно проведено), а ограничимся наиболее простым выводом этих уравнений для случая взаимодействия с плазмой лентьюмодовых колебаний. Будем считать плазму однородной, а колебания одномерными.

В соответствии со сделанным выше замечанием функцию распределения резонансных частиц по скоростям представим в виде

$$f = f_0(t, v) + \delta f(t, v, x). \quad (1.185)$$

Здесь  $f_0(t, v)$  — медленно меняющаяся функция распределения, характеризующая фон, на котором развиваются колебания,  $\delta f(t, v, x)$  — осциллирующая в пространстве и во времени добавка к функции распределения, характеризующая эти колебания. Очевидно, что

$$\langle \delta f \rangle = 0, \text{ т. е. } \langle f \rangle = f_0. \quad (1.186)$$

Скобки здесь означают усреднение по временному интервалу, большому по сравнению с периодом колебаний, и по пространственному интервалу, большому по сравнению с длиной волны.

Тогда уравнение для  $\dot{f}_0$  получается простым усреднением исходного кинетического уравнения и имеет вид

$$\partial \dot{f}_0 / \partial t = (e/m) \langle E \delta f / \partial v \rangle. \quad (1.187)$$

Здесь кроме соотношений (1.185) и (1.186) учтено отсутствие среднего электрического поля в плазме  $\langle E \rangle = 0$ . Следовательно, перенесенное в правую часть уравнения (1.187), определяет изменение  $f_0$  из-за наличия среднеквадратичного эффекта быстрых осцилляций (так называемый квазилинейный интеграл столкновений). При получении его явного вида учтем, что в плазме возбужден достаточно широкий пакет волн, т. е.

$$E = \sum_k E_k(t) \exp[i(kx - \omega_k t)];$$

$$\delta f = \sum_k \delta f_k(t, v) \exp\{i(kx - \omega_k t)\}. \quad (1.188)$$

В этих формулах  $\omega_k$  — частоты линейных плазменных мод, определяемые соотношением (1.36);  $E_k(t)$  — амплитуды этих мод, мед-

ленно меняющиеся со временем в результате взаимодействия с резонансными частицами. Поскольку величины  $\delta f$  и  $E$  по физическому смыслу должны быть вещественны, то очевидно, что в разложениях (1.188)  $E_k$ - и  $E_{-k}$ -гармоники комплексно сопряжены, т. е. выполняются условия:

$$E_{-k} = E_k^*, \quad f_{-k} = f_k^*, \quad \omega_{-k} = -\omega_k. \quad (1.189)$$

Используя эти условия, уравнение (1.187) перепишем в виде

$$\partial \dot{f}_0 / \partial t = (e/m) \sum_k E_k \partial f_k / \partial v \quad (1.190)$$

(гармоники с  $k' \neq -k$  из этой суммы исчезают при усреднении).

Выше отмечалось, что эффектом нелинейного взаимодействия гармоник в квазилинейном приближении пренебрегается. Соответственно этому для связи  $f_k$  и  $E_k = -ik\bar{f}_k$  используем формулу линейной теории (1.123). Единственное отличие от линейной теории состоит в том, что в этой формуле под  $\dot{f}_0$  понимается меняющаяся со временем фоновая функция распределения; формула (1.123) применима, если «фон» изменяется со временем достаточно медленно в масштабе периода колебаний  $|(1/f_0) \partial f_0 / \partial t| \ll \omega_k$ .

Учитывая также, что в согласии с замечанием, сделанным в § 1.12, резонансный знаменатель  $\omega_k - \omega$  в этой формуле следует понимать в смысле (1.136), получаем окончательно следующую формулу для  $\dot{f}_k$ :

$$\dot{f}_k = (e/m) E_k (\partial f_0 / \partial v) (\mathcal{P}(kv - \omega_k) + i\pi \delta(kv - \omega_k)). \quad (1.191)$$

Подставляя  $f_k$  в (1.190) и учитывая, что  $\mathcal{P}(1/x)$  — нечетная, а  $\delta(x)$  — четная функция аргумента, получаем следующее уравнение для  $\dot{f}_0$ :

$$\partial \dot{f}_0 / \partial t = (ke^2/m) (\partial / \partial v) \left[ \sum_k |E_k|^2 \delta(kv - \omega) \partial f_k / \partial v \right]. \quad (1.192)$$

В правой части уравнения (1.192) можно перейти от суммирования к интегрированию по волновым числам с помощью соотношения

$$\sum_k = (1/2\pi) \int dk = (1/\pi) \int_{k>0} dk.$$

В этой формуле учтено, что элементарный «интервал»  $k$ , приходящийся на одно колебание,  $\delta k = L/2\pi$  ( $L$  — линейный размер плазмы, вследуя для простоты полагается  $L=1$ ). Формулы для случая  $L \neq 1$  получаются с помощью очевидной замены  $|E_k|^2 \rightarrow L|E_k|^2$ . Выполнения в (1.192) интегрирование по  $k$  с помощью  $\delta$ -функции, можно записать это уравнение в виде квазилинейного уравнения диффузии по скорости

$$\partial \dot{f}_0 / \partial t = (\partial / \partial v) (D \partial f_0 / \partial v), \quad (1.193)$$

где коэффициент диффузии определяется спектральной плотностью плазменных шумов  $|E_k|^2$  в резонансной точке спектра  $k\nu=\omega_0$ :

$$D = (e^2/m^2) |E_k|^2 (k\nu=\omega_0) / [v - d\omega/dk]. \quad (1.194)$$

Разумеется, это уравнение диффузии следует дополнить уравнением для амплитуд волн, т. е. фактически для изменения со временем коэффициента диффузии. В квазилинейном приближении инкремент отдельной гармоники спектра совпадает с линейным (1.148), однако опять-таки под  $f_0$  в этой формуле следует понимать медленно меняющийся со временем «фон». В результате имеем

$$\left. \begin{aligned} (\partial/\partial t) |E_k|^2 &= 2f_k |E_k|^2; \\ f_k &= (\pi/2n_0) (\omega_k v^2) (\partial f_0 / \partial v) (v = \omega_k/k). \end{aligned} \right\} \quad (1.195)$$

Уравнения (1.193) — (1.195) и есть замкнутая система уравнений квазилинейного приближения. С помощью этих уравнений ниже рассмотрены две простые задачи — о релаксации электронного пучка в плазме и о поглощении пакета плазменных колебаний.

Начнем с задачи о релаксации электронного пучка. Начальная функция распределения по скоростям для такой задачи имеет вид, показанный на рис. 1.28. Максимум функции распределения при  $v=0$  соответствует тепловым частичкам плазмы, имеющим, например, максвелловское распределение, второй максимум соответствует пучку быстрых (над тепловых) частиц. Если разброс по скоростям в пучке достаточно велик  $\Delta v \gg (n_1/n_0)^{1/3} v$ , то инкремент неустойчивости плазменных волн определяется из уравнения (1.148), релаксацию такого пучка можно рассматривать в рамках квазилинейных уравнений.

Если же электронный пучок первоначально моноэнергетический  $[\Delta v \ll (n_1/n_0)^{1/3} v]$ , то на начальной стадии его релаксации происходит возбуждение монохроматической волны. Нелинейная теория возбуждения монохроматической волны рассматривалась в § 1.13 — волна нарастает до значения  $e\phi_0/mv^2/k^2 - c_0^2(n_1/n_0)^{2/3}$  и стабилизируется. При более детальном рассмотрении, однако, оказывается, что монохроматическая волна сама неустойчива. Рано или поздно она размывается в пакет волн. Здесь этот процесс не рассмотрен. Важно лишь, что в конце концов дальнейшую релаксацию пакета снова можно рассматривать в квазилинейном приближении.

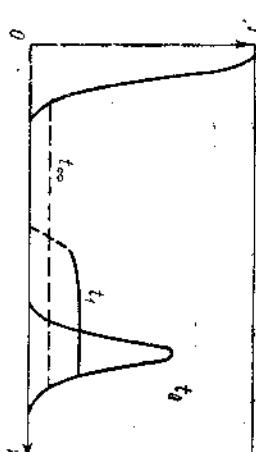


Рис. 1.28. Эволюция функции распределения электронного пучка в плазме при пучковой неустойчивости

Таким образом, будем считать разброс по скоростям в пучке достаточно большим, так что применимы квазилинейные уравнения. Тогда волны с фазовыми скоростями в некотором интервале, где  $df_0/dv > 0$ , оказываются неустойчивыми. Возбуждение волн сопровождается диффузийной частью пучка по скоростям, и в первоначальной области неустойчивости устанавливается «плато» на функции распределения (см. рис. 1.28). Однако такая функция распределения неустойчива, на ее переднем фронте производная  $df_0/dv$  положительна и происходит возбуждение волн. Область неустойчивости и соответственно область диффузии в пучке все время смещаются к меньшим скоростям. В результате на функции распределения возникает как бы волна релаксации, имеющая вид ступенек с крутым фронтом и распространяющейся в область малых скоростей. Перед фронтом шумы остаются на тепловом уровне, за фронтом возбуждены интенсивные плазменные шумы, и функция распределения близка к «плато». Процесс релаксации заканчивается, лишь когда частицы пучка продиффундируют до скоростей, сравнимых с тепловой скоростью плазмы. Окончательные границы «плато» определяются из следующих соотношений:

$$f_0^\infty = f_m(v_{min}), \quad f_0^\infty = f^*(v_{max}). \quad (1.196)$$

Здесь  $f_0^\infty$  — окончательная функция распределения в резонансной области, имеющая вид «плато»  $\partial f_0^\infty / \partial v = 0$ ;  $f_m(v)$  — максвелловская функция распределения тепловых частиц плазмы;  $f_0^\infty(v)$  — начальная функция распределения в пучке. Очевидно, что

$$v_{min} \approx v_T, \quad v_{max} \approx u_0. \quad (1.196a)$$

Высоту «плато» можно найти, воспользовавшись законом сохранения числа частиц в резонансной области:

$$f_0^\infty(v_{max} - v_{min}) = \int f_0^\infty dv \approx n_1, \quad (1.196b)$$

откуда имеем приближенно

$$f_0^\infty \approx n_1/u_0.$$

Спектральную плотность энергии плазменных шумов в резонансной области  $v_{min} < \omega/k < v_{max}$  найдем с помощью так называемого интеграла энергии квазилинейных уравнений. Для его получения подставим в правую часть квазилинейного уравнения диффузии  $|E_k|^2 (\partial f_0 / \partial v) (k\nu=\omega_0)$  из уравнения (1.195) для  $|E_k(t)|^2$ . В результате приходим к следующему соотношению:

$$\text{т.о. } \partial f_0 / \partial t = (e^2 n_0 / m^2) (\partial / \partial v) [(1/v^3) (\partial E_k^2 / \partial t)].$$

Пронтегрируем это уравнение по времени и пренебрежем вкладом тепловых шумов  $E_k^2(t=0)$ . Интегрируя получившееся соотношение по скорости в пределах от  $v_{min}$  до  $v$  с очевидным гра-

ничным условием — спектральная плотность шумов на границе резонансной области обращается в нуль  $|E_k|^2(v=v_{\min})=0$ , получаем искомый интеграл энергии — формулу, ссылающую спектральную плотность плазменных шумов и изменение функции распределения резонансных частиц:

$$|E_k|^*(v)=\pi(m_e^2/n_e e^2) \omega_p v^3 \int_{v_{\min}}^v (f_0(t, v) - f_0(v)) dv. \quad (1.197)$$

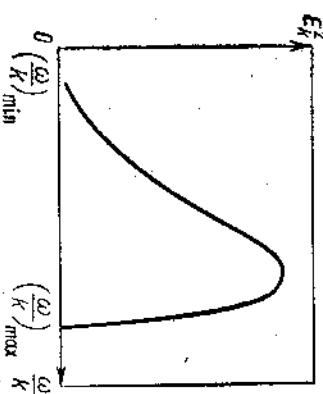


Рис. 1.29. Спектр плазменных колебаний, возбуждаемых при квазилинейной релаксации электронного пучка в плазме

Как следует из формулы (1.197), спектральная плотность плазменных шумов вначале растет с ростом фазовой скорости, достигает максимума при  $v \approx v_0$  и при больших скоростях быстро убывает, обращаясь в нуль при  $v = v_{\max}$  (рис. 1.29). В той области скоростей, где первоначально не было пучка  $v < v_0$  и  $f_0(v)=0$  (это и есть основная энергосодержащая область для спектра волн), из уравнения (1.197) имеем следующее соотношение для асимптотической формы спектра плазменных шумов, соответствующей «плато» на функции распределения по скоростям  $f_0^\infty$ :

$$|E_k|^* = 4\pi^2 n_e m_e (v^3/v_0) (v - v_{\min})|_{v=\omega/k}. \quad (1.198)$$

Полная энергия колебаний для такого спектра

$$W = (1/4\pi) \sum_k |E_k|^2 = (1/4\pi^2) \int dv |E_k|^* / |dv/dk| = (1/3) n_e m_e v^3. \quad (1.199)$$

Именно такую энергию теряет пучок при квазилинейной релаксации к состоянию с плато на функции распределения:

$$\Delta w_e = (1/2) n_e m_e v^3 - \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} f_0^\infty (mv^3/2) dv = (1/3) n_e m_e v^3. \quad (1.200)$$

Следует заметить, что спектр (1.197) — это еще не окончательно установленный спектр в системе плазма — пучок. Он может меняться в результате нелинейного взаимодействия волны. Однако для не слишком энергичного пучка, когда энергия плазменных колебаний также достаточно мала, процесс дальнейшей нелинейной эволюции спектра (1.197) существенно более медленный по сравнению со временем его установления в рамках квазилинейных уравнений. На рис. 1.30 и 1.31 приведены результаты численного моделирования и лабораторного эксперимента, иллюстрирующие образование плато на функции распределения.

Обратной по отношению к рассмотренной выше является задача о поглощении первоначально заданного пакета плазменных колебаний. Поглощение сопровождается лиффузией резонансных частиц к большим скоростям и установлением «плато» на функции распределения (рис. 1.32). Спектр колебаний, устанавливаю-

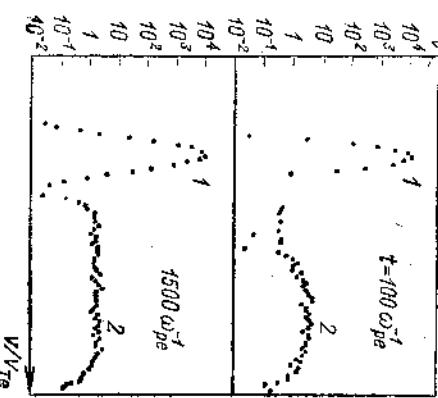
щийся в результате такого процесса, можно найти из квазилинейного интеграла энергии, при выводе которого, естественно, уже нельзя пренебречь начальными колебаниями, и поэтому в уравнении (1.197) следует заменить  $|E_k|^2 \rightarrow |E_k|^2 (t=0)$ . Доля энергии плазменных шумов, поглощаемых в плазме, легко можно оценить с помощью закона сохранения энергии:

$$W(t=0) - W(t=\infty) \approx - \int (f^* - f^\infty) (mv^3/2) dv \approx n_e^{\text{res}} m_e v_{\text{res}}^3. \quad (1.201)$$

При малом числе резонансных частиц  $n_e^{\text{res}}$  только малая часть энергии волнового пакета поглощается в плазме, поглощение практически прекращается после установления «плато» на функции распределения.

Рис. 1.31. Экспериментальное исследование релаксации электронного пучка в плазме (Левитский С. Л., Шашурин Н. М. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 52, с. 350).

Измерения проводились в лампе, наполненной водородом, в которой инжектором подавался электронный пучок, плавающий в плазме. Показано распределение по скоростям  $f = d/dv$  в зависимости от задерживающего потенциала на коллекторе,  $J$  — ток на коллектор. Функция распределения пучка изменилась при фиксированном расстоянии между катодом и коллектором (электродах), но при различных значениях тока в пучке (кривые 1—4). В режиме со слабым током пучок имеет монодромический, при увеличении силы тока (кривая 1) происходит «размытие» кривой распределения. При еще больших токах возникает характерная для квазилинейных уравнений «волна релаксации» на функции распределения, распространяющаяся в сторону малых энергий. При максимальных токах (кривая 4) на функции распределения образуется «плато».



$f$

распределения резонансных частиц.

В этих условиях дальнейшее поглощение плазменных колебаний возможно только при учете обычной столкновительной диффузии, рас-

смотренной в § 1.9. Дело в том, что если квазилинейная диффузия приводит к установлению «плато» на функции распределения,  $\partial f_0 / \partial v \approx 0$ , то столкновения стремятся вернуть наклон функции распределения к равновесному значению. В результате возникает конкуренция между влиянием волн и влиянием столкновений, при достаточно частых столкновениях функция распределения сильно отличается от вида «плато» и затухание Ландау сохраняется.

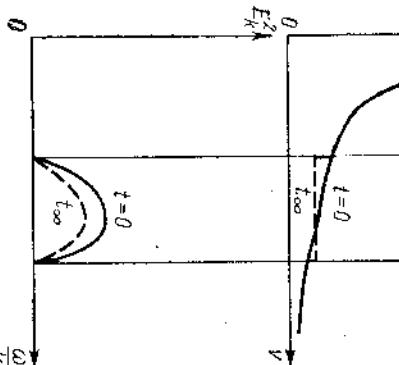


Рис. 1.32. Поглощение пакета ленгмировских колебаний

Чтобы продемонстрировать это, введем в квазилинейное уравнение диффузии также и диффузионный член, соответствующий парным столкновениям. Для рассматриваемой задачи, в которой функция распределения существенно меняется лишь в узкой резонансной области, достаточно удерживать только член со старшей производной  $(\partial/\partial v)v(T/m)(\partial f/\partial v)$ , не учитывая динамического трения.

В результате колокционии между квазилинейным воздействием волн на частицы и столкновениями в резонансной области должно установиться некоторое квазистационарное распределение  $(\partial f_0 / \partial t = 0)$ , подчиняющееся уравнению

$$\partial / \partial v [D(v) \partial f_0 / \partial v] \approx -v(\omega^2 / k^2) (\partial^2 / \partial v^2) f_0. \quad (1.202)$$

Интегрируя уравнение (1.202) один раз, находим \*

$$\partial f_0 / \partial v \approx (\partial f_0 / \partial v) / [1 + D(v) / v(\omega / k)^2]. \quad (1.203)$$

$D(v) \approx (e^2 / m^2) (|E_k|^2 / v) (kv = \omega)$  — коэффициент диффузии в резонансной области. Полученный наклон функции распределения подставим в формулу для дехремента затухания  $y = (\pi/2) \times X(\omega^3 / k^2) (\partial f / \partial v)$ . В результате

$$y \approx y_L / [1 + e^2 \langle E^2 \rangle / m^2 v(\omega / k)^3 \Delta k]. \quad (1.204)$$

В этой формуле  $y_L$  — дехремент затухания Ландау, рассчитанный по Максвелловской функции распределения. Для достаточно узко-

го пакета можно записать  $E_k^2 \Delta k \approx \langle E^2 \rangle$ , что и было сделано при выводе формулы (1.204).

Формулу (1.204) можно интерпретировать следующим образом.

Запишем ее в виде

$$y \approx y_L / (1 + \tau_1 / \tau_2), \quad (1.205)$$

где  $\tau_1$  — характерное время установления локального Максвелловского распределения в резонансной области  $\Delta v$ ,  $\tau_2 = (I/v)(v/\Delta v)^2$ ;  $t_2$  — характерное время квазилинейной диффузии под действием волнового пакета. Если  $\tau_1 \ll \tau_2$ , то столкновения успевают восстановить Максвелловскую функцию распределения, и мы получим обычное затухание Ландау. В случае  $\tau_2 \gg \tau_1$  функция распределения близка к «плато», и затухание стремится к нулю. На рис. 1.33 показаны результаты исследования аналогичного эффекта зависимости коэффициента усиления звука в решетке от амплитуды.

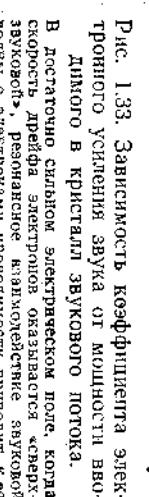


Рис. 1.33. Зависимость коэффициента электротоного усиления звука от мощности вводимого в кристалл звукового потока.

В достаточно сильном электрическом поле, когда скорость дрейфа электронов оказывается «сверхзвуковой», разогнанное звуковое поле, электронами приводимое в движение, «захватывает» кристаллическую решетку кристалла. Следовательно, в этом параграфе (см. формулу (1.204)) (Гальтьери Ю. М., Киган В. Д. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1970, т. 59, с. 1057; Ильин С. Н., Кореянский И. М., Мансуров Г. Д., Хазанов Е. И. «Письма ЖЭТФ», 1971, т. 13, с. 283)

Отметим, что формула (1.205) применима и в случае поглощения монохроматической волны. В этом случае (см. § 1.2) при выполнении условия  $Y_L \ll 1$  фазовое размешивание резонансных частиц, захваченных в потенциальную яму, быстро «выключает» поглощение. Столкновения, также как и в случае пакета волны, восстанавливают максвелловское распределение резонансных частиц и затухание плазменной волны. Одновременный учет обоих факторов вновь приводит к формуле (1.205), где в данном случае  $T_2 = 1 / k (e \rho_0 / m)^{1/2}$  — период фазовых колебаний захваченных частиц, определяющий время фазового размешивания,  $\tau_1 = (1/v) \times X(\omega / k)^2 [1 / (e \rho_0 / m)]$  — характеристическое время установления Максвелловского распределения в области захвата  $\Delta v \sim (e \rho_0 / m)^{1/2}$ .

### § 1.17. Резонансное взаимодействие волн и частиц (ионизированное рассеяние)

В квазилинейных уравнениях учитывается только обычное резонансное взаимодействие волн с частицами (резонанс Ландау  $\omega - kv = 0$ ). Среди большого количества, вообще говоря, более слабых нелинейных эффектов высокого порядка (возникающих в более высоких порядках разложения по амплитуде волн) важную

\* При этом интегрировании учитываем, что вне резонансной зоны скоростей наклон функции распределения — максвелловский  $\partial f / \partial v$ .

роль может играть появление биений на разностных частотах между двумя любыми парами волн в спектре слабой турбулентности. Если рассматривать такие биения как новые волны, то условие их резонанса Ландау с частичками имело бы вид

$$\omega_{k_0} - \omega_{k_1} = (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v}. \quad (1.206)$$

Очень часто из-за условия  $\omega_k/k \gg v_r$  обычный резонанс Ландау  $\omega - kv = 0$  выполняется только для наименее тепловых частиц, и из-за малого числа резонансных частей обычные квазилинейные эффекты излучения и поглощения волн слишком малы. В этих условиях важную роль может играть резонанс на биениях, поскольку условие (1.206) может выполняться для основной массы тепловых частиц. Например, для ленгмюровских колебаний соответствующая скорость биений  $(\omega_{k_0} - \omega_{k_1})/(k_0 - k_1) = 3(k_0 + k_1)/v_{DTe}/2$  всегда существенно меньше тепловой скорости электронов. Поэтому хотя резонанс (1.206) и возникает в старших порядках по амплитуде поля, в него вовлекается большее число частиц, и он может ока- заться весьма существенным в динамике спектра волн.

Резонансные условия (1.182) и (1.206), также как и распадные условия (1.164), допускают наглядную квантовую интерпретацию. Мы знаем, что колебания, возбужденные в плазме, можно рассматривать как газ «квазичастиц» — элементарных «квантов» колебаний с энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\hbar\mathbf{k}$ . В § 1.15 было показано, что распадные условия (1.164) соответствуют законам сохранения энергии и импульса в процессах распада (слияния) квантов. Законы сохранения энергии и импульса при излучении (потеряении) кванта резонансной частицы записываются в виде

$$\hbar\omega_{\mathbf{k}} = \Delta\omega_e, \quad \hbar\mathbf{k} = \Delta\mathbf{p},$$

где  $\Delta\omega_e$ ,  $\Delta\mathbf{p}$  соответствуют изменению энергии и импульса при излучении (потерии) кванта. Определим  $\Delta\mathbf{p}$  из второго условия и подставляя в первое, сокращая на постоянную Планка (если фактически рассматривается чисто классический случай!), приходим к резонансному условию (1.182). Аналогичным образом резонансное условие (1.206) вытекает из законов сохранения энергии и импульса при неупругом рассеянии частицы кванта  $(\omega_{k_0}, \mathbf{k}_0)$  с превращением в квант  $(\omega_{k_1}, \mathbf{k}_1)$ .

В задачах турбулентной плазмы «число заполнения» для квантов плазменных колебаний велики, поэтому процессы рассеяния также становятся индуцированными, как и излучение и поглощение волн при обычном резонансе Ландау (1.182).

Рассмотрим более детально этот процесс индуцированного рассеяния для случая плазменных колебаний. Оказывается, такой процесс можно интерпретировать как параметрическую неустойчивость плазменных и ионно-звуковых колебаний в изотермической плазме  $T_e = T_i$ . В этом случае затухание низкочастотной моды (биения), обусловленное резонансным взаимодействием с ионами,

настолько велико, что декремент затухания может иметь порядок частоты, и в этом случае вообще не имеет смысла говорить об ионном звуке. Таким образом, если в обычной параметрической неустойчивости рост пробных плазменной и ионно-звуковой волн возникает в результате их параметрической связи на «фоне» пла- менной накачки, то в механизме индуцированного рассеяния рост пробной плазменной волны из волны накачки обусловлен излучением и поглощением резонансными частицами (в данном случае ионами) «квантов» биений на разностной частоте. Чтобы описать этот эффект, движение ионов в низкочастотной моде биений следует рассматривать в кинетическом приближении. В этом приближении линейное уравнение для возмущения плотности плазмы совпадает с уравнением (1.174). Для учета связи низкочастотных движений с высокочастотными ленгмюровскими в это уравнение нужно добавить слагаемое, возникающее при учете высокочастотного «давления». Как было показано в § 1.15, это означает замену

$$k^2 r^2 \delta n \rightarrow k^2 r^2 \delta n + (k^2 / 16 \pi m_e \omega_p^2) \langle E^2 \rangle.$$

Выделяя в высокочастотном давлении двух ленгмюровских волн — основной волны  $E_0$  (накачки) и пробной  $E_1$ , получаем следующее уравнение для возмущения плотности плазмы в биениях:

$$\delta n [\epsilon_1^{-1} (\omega, \mathbf{k}) + k^2 r^2] = - (k^2 / 8 \pi m_e \omega_p^2) E_0 E_1^*. \quad (1.207)$$

Здесь мы использовали обозначения  $\omega = \omega_0 - \omega_1$ ,  $k = k_0 - k_1$ ;  $\omega_0$  и  $\omega_1$ ,  $k_0$  и  $k_1$  — частоты и волновые векторы двух ленгмюровских волн (основной и пробной) соответственно.

Уравнение (1.207) следует дополнить уравнением для амплитуды пробной ленгмюровской волны  $E_1$ . Это уравнение было получено в § 1.15 [см. (1.178)]:

$$[(\omega_0 - \omega)^2 - \omega_{k_1}^2] E_1^* = (\omega_p^2 / 2 \pi n_e) \delta n E_0^*. \quad (1.208)$$

Связь пробной ленгмюровской волны  $E_1$  с волной накачки  $E_0$  осуществляется через биения, естественно приводит к нелинейному свидetu частоты  $\omega_1$  по сравнению с ленгмюровской:  $\omega_1 = \omega_0' (k_1) + \delta\omega$ ,  $\delta\omega \ll \omega'$ , мнимая часть  $\delta\omega$  определяет инкремент нарастания пробной амплитуды  $E_1$  при неустойчивости индуцированного рассеяния. Уравнение для  $\delta\omega$ , как обычно, получается из условия разрешимости уравнений (1.207) и (1.208). Определим  $E_1$  из (1.208):  $E_1^* \approx \omega \delta n E_0^* / 4 \pi n_0 \omega_0^2$  и подставим результат в (1.207). Преобразуем последнее уравнение. Разобъем диэлектрическую проницаемость ионов на действительную и мнимую части (см. § 1.12):  $\epsilon_i = \epsilon'_i + i \epsilon''_i$ . Будем для простоты считать, что  $\epsilon''_i \ll \epsilon'_i$  и  $\epsilon'_i$  определим из условия квазинейтральности:  $\epsilon'_i = \epsilon_e = 1/k^2 r^2$ . Тогда из уравнения (1.207) получим следующую формулу для инкремента нарастания пробной волны при индуцированном рас- сеянии:

$$\text{Im } \delta\omega = \omega_p^2 E_0^2 r^2 \epsilon'_1 (\omega, \mathbf{k}) / 128 \pi n_e T. \quad (1.209)$$

Как мы уже знаем, мнимая часть диэлектрической проницаемости связана с особынностью поглощательного выражения в формуле (1.128) при  $v=\omega/k$ , т. е. для скоростей, соответствующих резонансу Ландау между частицами и биением. Будем считать, что скорость резонансных ионов существенно меньше их тепловой скорости, а функция распределения ионов по скоростям совпадает с Максвелловской. Вычисляя при этих предположениях  $\epsilon''_i$  и подставляя результат в (1.209), приходим к окончательной формуле для инкремента индуцированного рассеяния:

$$\text{Im } \delta\omega = (\pi/8)^{1/2} \omega_p E_0^2 (k_0^2 - k_1^2) r_D (m_i/m_e)^{1/2} / 128 \pi n_0 T |k_0 - k_1|. \quad (1.210)$$

Неустойчивость на индуцированном рассеянии возникает в том случае, когда пробная волна имеет большую длину волны, чем накачка:  $k_0 > k_1$ .

Очевидно, что когда пробная плазменная волна возникает не из монохроматической накачки, а из пакета плазменных волн, то инкремент неустойчивости также можно получить из (1.210) с помощью очевидной замены  $|E_0|^2/4 \rightarrow \sum_{k_0} |E_{k_0}|^2$ . [Множитель  $1/4$

возникает из-за используемой здесь нормировки, см. (1.135)]. Тогда вместо (1.210) имеем

$$\begin{aligned} \text{Im } \delta\omega(k) = & 3\omega_p^2 D (m_i/8m_e)^{1/2} \times \\ & \times \sum_{k_0} |E_{k_0}|^2 (k_0^2 - k_1^2) / |k_0 - k_1| [32\pi n_0 T; \\ & d |E_{k_0}|^2 / dt = 2 \text{Im } \omega(k) |E_{k_0}|^2]. \end{aligned} \quad (1.211)$$

Остановимся на некоторых интересных следствиях этой формулы. Прежде всего видно, что при индуцированном рассеянии перекачка энергии происходит в длинноволновую часть спектра [инкремент в (1.211) положителен при  $k_0 > k_1$ ]. Это достаточно очевидный результат — при рассеянии на плазме с равновесной максвелловской функцией распределения преобладают процессы поглощения виртуальных квантов, поэтому часть энергии рассеивающегося плазмона поглощается частичей и рассеянный плазмон должен иметь меньшую частоту и, следовательно, меньшее волновое число. Число плазмонов  $N_k$  при рассеянии, естественно, сохраняется. Кроме того, поскольку энергию плазменных волн можно представить в виде  $N_k \hbar \omega_k = N_k \hbar \omega_p (1 + 3k^2 v^2/2)$ , а при рассеянии изменяется только небольшая тепловая поправка к частоте, то энергия плазменных волн в процессе рассеяния также остается примерно постоянной. Действительно, с помощью (1.211) нетрудно показать, что

$$(d/dt) \sum_{k_1} |E_{k_1}|^2 = 0.$$

Максимальную величину инкремента, характеризующего индуцированное рассеяние, легко можно получить из (1.210), а именно при  $(\omega_0 - \omega_1) / |k_0 - k_1| \approx \omega_T$  имеем

$$\text{Умакс} \approx \omega_p (E_0^2 / 64\pi n_0 T). \quad (1.212)$$

Изменение волнового числа плазмона в отдельном акте  $\Delta k$  рассеяния определяется соотношением  $\omega_0 - \omega_1 \approx 3\Delta k \omega_p^2 D \omega_T^2 / k^2 v^2$ . Отсюда  $\Delta k \sim (m_e/m_i)^{1/2} / 3v^2$ . Таким образом, в области не очень малых волновых чисел  $k_D > (m_e/m_i)^{1/2}$  перекачка по спектруносит дифференциальный характер. Так же, как и при параметрической неустойчивости с рождением ионно-звуковых волн в этом случае в процессе индуцированного рассеяния оказываются связанными друг с другом две распространяющиеся навстречу плазменные волны  $k_0 \approx -k_1$ . Изменение волнового числа при рассеянии  $k_0 + k_1 \approx \Delta k$  мало по сравнению с шириной спектра. Из уравнения (1.211) в этом случае нетрудно показать, что характерный инкремент, определяющий скорость нелинейного изменения всего спектра, уменьшается по сравнению с (1.212) в  $(k/\Delta k)^2$  раз:

$$Y_{\text{нестаб}} = Y_{\text{макс}} (\Delta k/k)^2 \approx \omega_p \sum_{k_0} |E_{k_0}|^2 m_e / 16\pi n_0 T m_i k^2 r^2 D. \quad (1.213)$$

Экспериментальный результат, иллюстрирующий явление индуцированного рассеяния плазменных колебаний, приведен на рис. 1.34.

Рис. 1.34. Экспериментальное исследование неустойчивости монохроматической волны, обусловленной индуцированным рассеянием на частичах плазмы (Измайлов А. Н. и др. «Письма ЖЭТФ», 1970, т. 12, с. 73).

Эксперимент проводился в плазме с температурой  $\sim 2000$  К. Возбуждалась две лептотропические волны — основная и пробная, частоты которых удовлетворяли условию  $\sim k_D v$ . Показано распределение амплитуды пробной волны по длине плазменного пучка в отсутствие основной волны (кривая 1) и при наличии основной волны (2), частота которой больше, чем у пробной. Рост амплитуды связан с неустойчивостью индуцированного рассеяния. Увеличение амплитуды при больших  $x$  связано с затуханием основной волны до звукового уровня. Инкремент индуцированного рассеяния становится меньше декремента затухания при которых инкремент индуцированного рассеяния становится меньше декремента затухания. Вид Ландау

Инкремент определяет, в частности, скорость длинноволновой перекачки энергии в спектре колебаний (1.197), возбуждаемых при релаксации электронного пучка в плазме. Поэтому квазилинейная теория процесса релаксации, изложенная в первой части данного параграфа, применима, если при максимальном уровне энергии колебаний  $W$ , определяемом формулой (1.199), инкремент нелинейной перекачки энергии по спектру остается меньше инкремента пучковой неустойчивости. В этом случае вначале происходит квазилинейная релаксация пучка, а затем возбужденный пучком спектр колебаний постепенно трансформируется в резуль-

тате индуцированного рассеяния. Для сильно размытого пучка  $\Delta v \sim v$  согласно (1.154) инкремент пучковой неустойчивости  $\Upsilon_{\text{лип}} \omega_p n_i / n_0$ . Волновое число неустойчивых колебаний  $k \sim \omega_p / v_0$ , поэтому параметр  $k^2 r^2 T / m_e u_0^2$  и сформулированное выше условие применимости квазилинейной теории можно записать в виде

$$\frac{e = \Upsilon_{\text{лип}} / \Upsilon_{\text{нейл}}}{(m_e u_0^2 / T)} \left( \frac{n_i}{n_0} \right) / \left[ \frac{n_1 m_e u_0^2 / n_0 T}{(T / m_e u_0^2)^2 m_e} \gg 1 \right]. \quad (1.214)$$

Для энергичных пучков, когда параметр  $e \ll 1$ , имеет место так называемый эффект нелинейной стабилизации пучковой неустойчивости. Энергия плаズменных колебаний, возбуждаемых пучком,растет до значения  $eW$ . В дальнейшем отката колебаний из резонансной для пучка области спектра, связанная с индуцированным рассеянием, стабилизирует пучковую неустойчивость, и колебания все время поддерживаются на уровне  $eW$ . Поскольку коэффициент диффузии частиц пучка по скоростям пропорционален плотности энергии колебаний в резонансной области, то время диффузии, т. е. время релаксации пучка, возрастает в  $1/e$  раз по сравнению с квазилинейным. Происходит как бы просветление плаэмы для электронного пучка — явление, часто наблюдавшееся в космической плаэме (плаэма солнечного ветра, магнитосферная плаэма), где лучок проходит огромные расстояния, без существенной потери энергии.

### § 1.18. Нелинейное взаимодействие волн в слабой турбулентности

До сих пор мы исследовали взаимодействие в слаботурбулентной плаэме между газом частиц — электронов либо ионов и газом квазичастиц — элементарных волновых движений. В данном параграфе рассмотрена слабая турбулентность и проанализировано взаимодействие между волнами, т. е. внутри газа квазичастиц. Физический механизм, лежащий в основе такого взаимодействия, связан с исследованной в § 1.14 параметрической неустойчивостью и проявляется в процессах распада и слияния элементарных волновых квантов. Газ элементарных волновых движений можно задавать функцией распределения квантов определенного типа (лениг-морских, звуковых) по волновым числам  $N_a(t, k)$ , подобно тому как электроны и ионы плаэмы характеризуются функцией распределения по скоростям  $f_a(t, v)$ . Выше мы вводили спектральное распределение энергии колебаний по волновым числам  $W_k = |E_k|^2 / 8\pi$  (либо  $\varepsilon_k = (|E_k|^2 + |H_k|^2) / 8\pi$  для электромагнитных колебаний). Поскольку энергия отдельного кванта равна  $\hbar \omega_k$ , то имеем очевидное соотношение

$$N_k = W_k / \hbar \omega_k \quad (1.215)$$

(рассмотрение удобно проводить в системе единиц с  $\hbar = 1$  — так как рассматриваются чисто классические эффекты, то постоянная Планка из окончательных формул должна выпасть).

В предыдущих параграфах были выведены кинетические уравнения для функции распределения частиц, учитывающие столкновения частиц с частицами и частицами с волнами. Теперь мы можем ввести в рассмотрение кинетическое уравнение для числа квантов. Схематически такое кинетическое уравнение можно записать в виде

$$\partial N_k / \partial t = S_t \{N_k\} + 2\gamma_k N_k. \quad (1.216)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения — так называемый интеграл столкновений волны с волнами. Под таким столкновением условно понимается результат нелинейного взаимодействия волн друг с другом. Кроме того, в нелинейной задаче обязательно должны присутствовать источник и сток энергии, как, например, накачка энергии в турбулентность за счет какого-либо механизма неустойчивости и повторение волн частичками. Эти процессы схематически описываются в уравнении (1.216) вторым слагаемым в правой части. Достаточно очевидно, что конкретная структура интеграла столкновений зависит от типа волнового взаимодействия. В простейшем случае, если закон дисперсии взаимодействующих волн  $\omega(\mathbf{k})$  допускает трехвольновое взаимодействие, описываемое распадными условиями (1.164), то интеграл столкновений будет квадратичен по числу квантов:

$$S_t \{N_k\} \rightarrow \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}_2}. \quad (1.217)$$

Мы ограничимся такой символической записью интеграла столкновений. Для получения его конкретного вида следовало бы использовать динамические уравнения параметрической неустойчивости в форме, аналогичной (1.178), перейти в них к числам заполнения  $N_k$ , использовав предположения о случайных фазах взаимодействующих волн и о медленности изменения их амплитуд  $|Im \omega_k / \omega_k| \ll 1$ . Вся эта процедура достаточно громоздка, и ее детальное описание выходит за рамки настоящей книги. Напомним только, что волновые векторы в интеграле столкновений  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}$  и соответствующие им частоты  $\omega_{\mathbf{k}_1}, \omega_{\mathbf{k}_2}, \omega_{\mathbf{k}}$  должны быть связаны распадными условиями  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ .

Естественно, что при всяком спектре волн выполняются эти соотношения. На рис. 1.35 показаны различные формы возможных спектров волн. Используя векторное неравенство  $|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| < |\mathbf{k}_1| + |\mathbf{k}_2|$ , нетрудно показать, что приведенные выше распадные условия могут быть выполнены для волн со спектрами  $H$ , и наоборот,

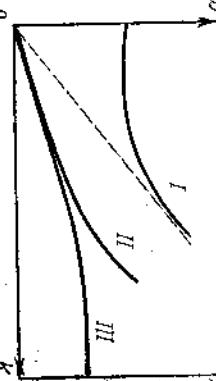


Рис. 1.35. Распадные и нераспадные спектры плаэменных колебаний

для волн со спектрами типа I, III (см. рис. 1.35) это невозможно (нераспадные спектры). Если линейное соотношение имеет более чем одну ветвь, то распадные условия могут быть выполнены для волн, принадлежащих к различным ветвям. Так, для лентоморовских колебаний (спектр нераспадный), распадные условия могут выполняться при распаде на лентоморовскую и ионно-звуковую ветви колебаний. В общем случае распадным условиям удается уловить в тех случаях, когда через три точки, соответствующие колебаниям  $(\omega, k)$ ,  $(\omega_1, k_1)$ ,  $(\omega_2, k_2)$  (эти точки могут лежать на различных ветвях), можно провести кривую, аналогичную кривой II.

$$W_k k / \tau_k = \text{const.} \quad (1.219)$$

(закон Колмогорова — Обухова). Эти соображения основаны на предположении о постоянстве потока энергии по спектру в инерционном интервале. Компактно это условие записывается в виде

$$W_{hk}/\tau_h = \text{const.} \quad (1.219)$$

В тех случаях, когда распадные условия для трех волн не выполнены, в элементарный акт взаимодействия включается четыре  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$  и соответственно этому интеграл  $\text{столкновений}$  становится кубическим по числу квантов:

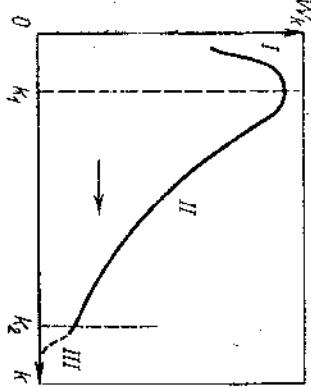
лучаях, когда распадные условия для трех волн не вы-  
з элементарный акт взаимодействия включается четыре  
как  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$  и соответственно этому интеграл  
ний становится кубическим по числу квантов:

$$St\{N_k\} \rightarrow \int dk_1 dk_2 dk_3 V(k, k_1, k_2, k_3) N_{k_1} N_{k_2} N_{k_3}. \quad (1.220)$$

The graph illustrates the relationship between the ratio  $W_k$  and the Reynolds number  $Re$ . The vertical axis represents  $W_k$ , and the horizontal axis represents  $Re$ . The curve starts at point III (0,0), rises to point II, and then falls to point I. A horizontal dashed line connects point II to the vertical axis.

**Рис. 1.36.** Спектры турбулентности в случае постоянства потока энергии по спектру в интервале равнотеских ( $H$ ) между областями раскачки ( $I$ ) и затухания ( $II$ )

наиболее точные оценки основывались на со-  
общениях размерности. Представим себе ситуацию, когда источник крупномасштабного (малые  $k$ ) тур-  
булентного движения (рис. 1.36, область источника  $I$ ) отделен от областей, где турбулентное дви-  
жение быстро затухает из-за увели-  
чения вязкой диссипации в мелких масштабах (область погло-  
щения  $II$ ). Тогда энергия турбулентных движений перекачивается от больших масштабов к меньшим из-за процесса нелинейного дробления масштабов вихрей, проходя последовательно все уменьшающиеся масштабы инерционного интервала (область  $II$ ). Хорошо известные размерностные соображения приводят к следую-  
щему спектру турбулентности в инерционном интервале:



которая вместе с условием (1.219) дает закон турбулентности Колмогорова — Обухова. Интересно пытаться аналог колмогоровского спектра в слабой турбулентности плазмы, когда такой спектр может быть получен не только из размерностных оценок, но и из точного решения кинетического уравнения. Однако сложность плазменной задачи состоит в том, что даже в изотропной плазме существуют различные взаимодействующие между собой ветви колебаний: плазменные, звуковые, электромагнитные, так что некоегда универсального спектра с простой степенной зависимостью не существует. Поэтому искать такой спектр имеет смысл лишь в некоторых случаях, когда возбужден определенный тип волн. Примером наилучшего простого решения вопроса о спектре ионно-звукового турбулентности является источник такой турбулентности находится в области до

стально длинных масштабов. Спектр ионно-звуковых колебаний в области больших длин волн, когда несущественна дисперсия фазовой скорости, — распадный, причем во взаимодействии вовлекаются колебания с коллинеарными (или, точнее, почти коллинеарными) волновыми векторами. Процесс коротковолновой перекачки энергии связан тогда со слиянием ионно-звуковых квантов, которое описывается уравнением (1.217). Из этого уравнения имеем следующую оценку  $\tau_K$  (с учетом соображений размерности)

$$1/\tau_k \sim \omega_{k\perp} k \lambda / m_0 f_c$$

Вследствие распадности спектра ионо-звуковых колебаний энергия турбулентных пульсаций  $kW_k$  входит в формулу для  $\tau_k$  в первой степени. Эта энергия нормируется на тепловую энергию в плазме  $n_0 m_e \theta^2 / k^2 = n_0 T_e$ . Величина  $\omega_k = k(T_e/m_i)^{1/2}$  — единственная в рассматриваемой задаче имеющая размерность частоты.

Используя условие постоянства потока энергии в инерциональном интервале — (1.219) и оценку (1.221) для  $T_k$ , получаем следующий спектр ионно-звуковой турбулентности:

$$W_k \sim 1/k^{3/2}$$

$$(1.222)$$

Эта формула определяет спектр турбулентности в масштабах инерционального интервала, отделяющего область источника от коротковолновой области поглощения звуковых колебаний ионами плазмы. Тот же степенной спектр ионно-звуковой турбулентности был получен путем строгого решения кинетического уравнения для волн.

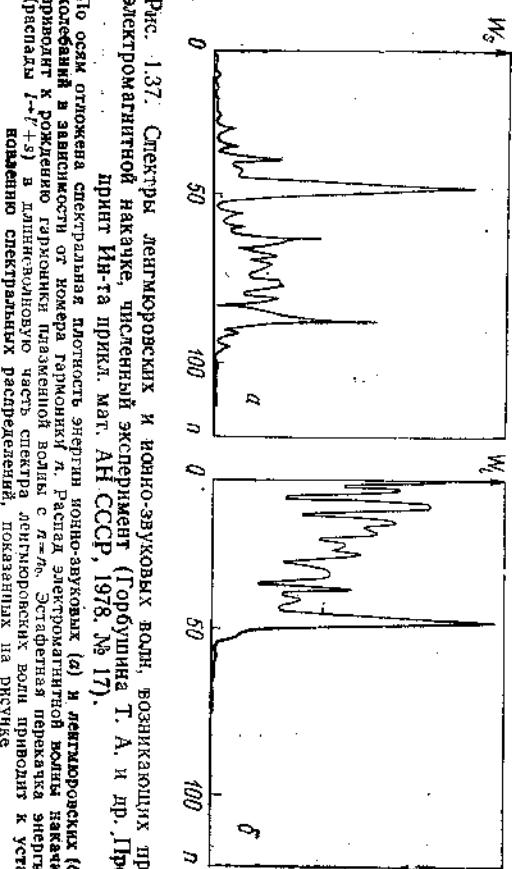


Рис. 1.37. Спектры лентмюровских и ионно-звуковых волн, возникающих при электромагнитной накачке, численный эксперимент (Горбунова Т. А. и др. Принт Ин-та прикл. мат. АН СССР, 1978, № 17).

По оси отложена спектральная плотность энергии ионно-звуковых (a) и лентмюровских (b) колебаний в зависимости от момента гармоники накачки времени с  $t=0$ . Эстрапонная перекадка энергии (распады  $J \rightarrow J+9$ ) в длинноволновую часть спектра лентмюровских волн приведена к усилению спектральных распределений, показанных на рисунке.

Значительно сложнее решается задача о турбулентности лентмюровских колебаний. Дело в том, что спектр лентмюровских колебаний — нераспадный и основные нелинейные процессы в сложной лентмюровской турбулентности — распад с рождением ионно-звуковых колебаний, а в изотермической плазме  $T_e = T_i$  — индуцированное рассеяние на ионах плазмы. В элементарных актах, соответствующих каждому из этих процессов, часть энергии лентмюровского кванта передается ионно-звуковому кванту либо рассеивающей частице. Поэтому нелинейное взаимодействие в лентмюровской турбулентности сопровождается «покраснением» лентмюровских квантов, т. е. перекачкой лентмюровской энергии в область длинных масштабов и больших фазовых скоростей, где вообще невозможно резонансное поглощение энергии волн частичками. Так, в лентмюровской турбулентности возникает проблема аккумуляции энергии при  $k \rightarrow 0$  и образования (наподобие «Бозе-конденсата»). Тенденция к образованию конден-

сата в процессе нелинейного взаимодействия плазмонов хорошо видна в численном эксперименте (рис. 1.37). Разгадка парадокса «конденсации» плазменных колебаний имеет важное значение в физике нелинейных колебаний и турбулентности плазмы. Эта проблема подробно обсуждается в следующем параграфе.

### § 1.19. Модуляционная неустойчивость и коллапс лентмюровских волн

Оказывается, что «конденсат» — достаточно интенсивный газ длинноволновых плазмонов — неустойчив относительно процесса модуляции его плотности и образования каверн — областей локализации более высокой концентрации волновой энергии, из которых под действием силы высокочастотного давления вытеснена плазма. Физический смысл неустойчивости можно разъяснить достаточно наглядно. Представим себе, что на первоначально однородном фоне лентмюровских волн хотя бы в результате флукутаций возникла область, где амплитуда колебаний электрического поля несколько превышает средний уровень. В результате в этой области возрастает и высокочастотное давление, так что электроны из нее вытесняются. Возникающее при поляризации плазмы квазистатическое электрическое поле вытягивает ионы вслед за электронами, образуется квазистатальный профиль пониженной плотности. Как движутся плазмоны на таком профиле плотности? Мы знаем, что каждый плазмопартион — это квазичастица с энергией  $\Phi(\mathbf{r}) \approx \omega_{pe} (1 + \delta n(\mathbf{r}) / 2n_0) + (3/2) k_T^2 \Phi(\mathbf{r})$  и импульсом  $\mathbf{k}$  (здесь  $n = n_0 + \delta n$  — плотность плазмы;  $\omega_{pe}$  — плазменная частота, соответствующая невозмущенной плотности). Поэтому уравнения движения плазмона, записанные в гамильтоновой форме, имеют вид

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} = -\omega_{pe} \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.223)$$

Из этих уравнений очевидно, что профиль с пониженной плотностью играет роль потенциальной ямы для плазмона. Действительно, в этом случае сила  $\mathbf{F} = -\partial \Phi / \partial \mathbf{r}$  ускоряет те плазмоны, которые движутся на дно ямы, и тормозит движущиеся в обратном направлении. В результате достаточно медленные плазмоны захватываются в потенциальную яму, возрастают высокочастотное давление и, следовательно, деформация профиля плотности, потенциальная яма становится глубже, что приводит к дальнейшему росту локальной интенсивности лентмюровских волн и высокочастотного давления. Таким образом, развивается неустойчивость автомодуляции пространственного распределения плазмонов — стягивание их в ступки-каверны.

Из проведенного анализа ясно, что при неустойчивости изменяется характер траекторий плазмонов. Если в отсутствие взаимодействия плазмоны двигались по пролетным траекториям с по-

стоянной скоростью  $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$ , то при развитой модуляционной неустойчивости они оказываются запертыми в кавернах, аналогично тому как достаточно сильная волна захватывала резонансные частицы плазмы в потенциальную яму. Так же как эффект захвата резонансных частиц волной не описывается квазилинейными уравнениями, захват плазмонов в каверны и развитие модуляционной неустойчивости нельзя описать в рамках слабой турбулентности. Возникающая в результате модуляционной неустойчивости турбулентность лентгировских волн является сильной — волновые движения, из которых она слагается, существенно отличаются от линейных мод колебаний. Ниже проведен качественный анализ этой проблемы.

Начнем с простого эвристического рассмотрения модуляционной неустойчивости, использующего аналогию между распределением плазмонов в неоднородной плазме  $\delta n(\mathbf{r})$  и большинством распределением заряженных частиц в потенциальном поле  $\Phi(\mathbf{r})$ . Хорошо известно, что функция распределения электронов в таком поле имеет вид

$$f(\mathbf{v}) = n_0(m/2\pi T)^{3/2} \exp\{-mv^2/2T + e\Phi/T\}. \quad (1.224)$$

Интегрирование по скоростям в этой формуле приводит к распределению Больцмана для плотности распределения электронов в потенциальном поле.

По аналогии с максвелловским распределением равновесную функцию распределения плазмонов в отсутствие деформаций плотности условно представим в виде

$$N_{\mathbf{k}} = N_0 \exp\{-k^2/\bar{k}^2\}/\pi^{3/2}\bar{k}^3. \quad (1.225)$$

Из закона дисперсии лентгировских волн имеем  $k^2/\bar{k}^2 = -2(\omega - \omega_{pe})/3\omega_{pe}\bar{k}^2 r_D^2$ , поэтому равновесное распределение можно представить следующим образом:

$$N_{\mathbf{k}} = N_0 \exp\{-2(\omega - \omega_{pe})/3\omega_{pe}\bar{k}^2 r_D^2\}/\pi^{3/2}\bar{k}^3.$$

При наличии деформаций плотности плазмы  $\delta n(\mathbf{r})$  величина  $\omega - \omega_{pe} = (\bar{k}^2 r_D^2/2 + \delta n/2m_0)\omega_{pe}$  (первое слагаемое — кинетическая энергия плазmons, второе — его потенциальная энергия). В этом случае равновесное распределение плазмонов (1.225) трансформируется в следующее:

$$N_{\mathbf{k}} = N_0 \exp\{-\bar{k}^2/\bar{k}^2 - \delta n/3\bar{k}^2 r_D^2 m_0\}/\pi^{3/2}\bar{k}^3. \quad (1.226)$$

Если равновесное распределение (1.225) — аналог максвелловского распределения для частиц, то распределение (1.226) — аналог большинством распределения в потенциальном поле  $\Phi(\mathbf{r})$ . Интегрируя по  $\mathbf{k}$ , находим полную плотность плазмонов

$$\int d\mathbf{k} N_{\mathbf{k}} = N_0 \exp\{-\delta n/3\bar{k}^2 r_D^2 m_0\}. \quad (1.227)$$

Из этой формулы действительно следует, что плазmons имеют тенденцию скалываться в местах проявления плотности плазмы. Возмущение плотности плазмонов определяется формулой

$$\delta N = -N_0 \delta n / 3\bar{k}^2 r_D^2 m_0$$

в полной аналогии с возмущением электронной плотности  $\delta n = -n_{deff}/T_0$ . Соответствующее возмущение высокочастотного давления

$$\delta p_{vc} = -p_0 \delta n / 3\bar{k}^2 r_D^2 m_0 \quad (1.228)$$

( $p_0 = \langle E^2 \rangle / 8\pi$  — равновесное давление плазмонов) по знаку обратно возмущению плотности, что, собственно говоря, и приводит к неустойчивости.

Для получения количественной формулы напомним, что линеаризованные уравнения медленных квазинейтральных движений плазмы имеют вид [ср. с (1.118)]

$$-n_0 m_t i \omega = -i \bar{k} s p; \quad -i \omega n + i \bar{k} n_0 v = 0, \quad (1.229)$$

где  $\delta p$  — суммарная вариация давления в плазме, слагающаяся из вариаций высокочастотного и газокинетического давлений:

$$\delta p = T \delta n + \delta p_{vc}$$

Подставляя в (1.229)  $\delta p_{vc}$  из формулы (1.228), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = \bar{k}^2 T [1 - \langle E^2 \rangle / \bar{k}^2 r_D^2 16\pi n_0 T] / m_i. \quad (1.230)$$

Условие неустойчивости  $\omega^2 < 0$ , т. е.

$$\langle E^2 \rangle / 16\pi n_0 T > \bar{k}^2 r_D^2, \quad (1.230a)$$

и в процессе накопления длинноволновых ( $\mathbf{k} \rightarrow 0$ ) плазмонов по каналам слабой турбулентности обязательна возникнута модуляционная неустойчивость. При  $\langle E^2 \rangle / 16\pi n_0 T \gg \bar{k}^2 r_D^2$  имеем из (1.230) следующую оценку для инкремента модуляционной неустойчивости:

$$\text{Im } \omega \approx (\langle E^2 \rangle / 16\pi n_0 m_i r_D^2)^{1/2} \approx$$

$$\approx \omega_0 (m_i \langle E^2 \rangle / m_i 16\pi n_0 T)^{1/2}, \quad (1.231)$$

Весьма важным является вопрос о дальнейшей динамике образующихся в результате модуляционной неустойчивости каверн. Для запертых в каверне плазмонов кинетическая энергия порядка потенциальной, т. е.

$$\bar{k}^2 r_D^2 \sim |\delta n| / n_0. \quad (1.232)$$

Длина волны запертого плазmons определяет одновременно характерный размер каверны  $l \sim 1/\bar{k}$ . Под действием силы высокоча-

стотного давления плазма вытесняется из каверны. Рост  $|\delta n|$  сопровождается склоныванием каверны, так как  $\tilde{l} \sim 1/(\delta n)^{1/2}$ . При этом плотность энергии колебаний возрастает и происходит ускорение процесса выталкивания плазмы и склонивания каверны, который, таким образом, носит взрывной характер. Естественно возникает вопрос о том, что останавливает склонивание. Ограничимся качественным анализом этого вопроса, основываясь на соотношении (1.232) между длиной волны запертых плазмонов и глубиной модуляции плотности, а также на условии постоянства числа запертых в каверне плазмонов. Так как глубина модуляции плотности в каверне обычно невелика  $|\delta n|/n_0 < 1$  и соответственно, мало изменение частоты плазмона  $\omega \ll \omega_0$ , то последнее условие означает, что

$$\int d\mathbf{r} |E|^2 = \text{const}, \quad (1.233)$$

и, таким образом, высокочастотное давление в каверне возрастает при склонивании обратно пропорционально ее объему  $|E|^{2-\alpha}/l^\alpha$  ( $\alpha$  принимает значения 1, 2, 3 в зависимости от размерности каверны). В то же время для склонивания необходимо преодолеть давление вытесняемой плазмы  $\delta n T$ , которое согласно (1.232) возрастает как  $l^{-2}$ . Отсюда следует, что динамика каверны существенно зависит от ее размерности. В одномерной каверне (локализация ленгмировской энергии только по одному измерению) газокинетическое давление при склонивании возрастает быстрее высокочастотного. В результате при некотором  $l$  устанавливается баланс давлений и образуется «олигон — ленгмировский ступок» конечного размера, который, однако, неустойчив относительно модуляции в двух других измерениях.

В двумерном случае ( $\alpha=2$ ) если только в начальный момент времени высокочастотное давление в камере превышало газокинетическое, то в дальнейшем склонивание каверны не остановить. Наконец, в трехмерном случае высокочастотное давление при склонивании возрастает быстрее газокинетического и процесс склонивания идет с нарастающей скоростью. В каждом из двух случаев склонивание каверны с запертными в ней плазмонами приводит до столь малых размеров, что длина волны плазмона становится сравнимой с лебаевской длиной (а фазовая скорость сравнимой с тепловой скоростью) и «вклинивается» резонансное поглощение плазмонов частицами плазмы — затухание Ландау. Явление склонивания об разующихся при модуляции неустойчивости каверн с плазмонами, которое имеет характер взрыва и ограничено только затуханием Ландау, получило название коллапса ленгмировских волн. Коллапс ленгмировских волн описывается полученным в параграфе о параметрической неустойчивости уравнениями (1.173) и (1.176) для электрического поля и вариаций плотности. Особенность рассматриваемого случая по сравнению с решениями, полученными в § 1.14, связана с тем, что из-за наличия сильного взаимодействия моли колебаний, описываемые уравнениями (1.230), (1.231), существенно отличаются от линейных.

Связь между варяцией плотности в каверне и высокочастотным давлением определяется уравнением (1.176), в котором в многомерном случае следует заменить оператор дифференцирования  $\partial^2/\partial x^2$  на оператор Лапласа  $\Delta$ .

Из этого уравнения следует, что склонивание каверны с плазмонами постепенно меняет характер «взрыва», когда сколь угодно большие размеры каверны и сколь угодно большие значения плотности энергии в ней достигаются за конечное время. Действительно, полагая, что скорость склонивания каверны превышает скорость звука, сохраняясь в левой части уравнения (1.176) только первое слагаемое. Кроме того, из условия захвата плазмонов каверной (1.232) находим, что

$$\delta n/n_0 \sim r_D^2/l^2 \sim r_D^2 \Delta. \quad (1.234)$$

Таким образом, получим вместо уравнения (1.176) следующую однокаченную формулу:

$$\partial^2 \delta n / \partial t^2 \approx \delta n |E|^2 / (16 \pi n_0 m r_D^2). \quad (1.235)$$

Из этой формулы следует, что рост  $\delta n$  и  $|E|^2$  происходит быстрее, чем по экспоненте, т. е. по закону «взрыва»  $1/(t_0 - t)^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $t_0$  — время «взрыва», т. е. время достижения особенности. Из уравнения (1.235) следует, что

$$|E|^2 \approx 1/(t_0 - t)^2, \quad (1.236)$$

а законы изменения  $\delta n$  и  $l$  со временем находим из условия (1.233) постоянства числа запертых в каверне плазмонов. В случае трехмерных каверн имеем

$$\begin{aligned} l &\sim |E|^{2/3} \sim (t_0 - t)^{2/3}; \\ \delta n &\sim 1/l^2 \sim 1/(t_0 - t)^{4/3}. \end{aligned} \quad (1.237)$$

Более точно динамику ленгмировского коллапса рассчитывали численными методами (рис. 1.38) и подтвердили взрывной характер склонивания, описаный формулами (1.236) и (1.237).

Видим теперь, как выглядят картина ленгмировской турбулентности при наличии коллапса каверн. Вначале энергия ленгмировских волн по каналам слабой турбулентности перекачивается в длинноволновую область модуляционной неустойчивости. Из-за этой неустойчивости энергия ленгмировских волн локализуется в большом числе случайно расположенных каверн, коротковолновая перекачка запертых в кавернах ленгмировских колебаний осуществляется в процессе коллапса.

Междудлинноволновыми масштабами модуляционной неустойчивости  $l_0 \sim 2\pi r_D (16 \pi n_0 T / |E|^2)^{1/2}$  (см. рис. 1.36, область I) и коротковолновыми масштабами области поглощения  $l_{\text{пог}} \sim 2\pi r_D$  (область II) лежит инерционный интервал. Через масштабы инерционного интервала ленгмировская энергия проносится склоняющимися кавернами. Спектр турбулентности в инерционном интер-

вале, как обычно, можно найти из условия постоянства потока энергии — условия (1.219). В рассматриваемом случае это условие имеет следующий вид:

$$|E_k|^2 \sim W_k \sim dt(k) / dk. \quad (1.238)$$

Здесь  $dt(k)$  — время прохождения кавернами через интервал  $[k, k+dk]$  обратных масштабов турбулентности. Закон схлопывания, т. е. зависимость  $k \sim 1/l$  от  $t$ , определяется формулой (1.237), откуда вместе с условием (1.238) имеем следующую формулу для

$$k_* \approx (1/3 \div 1/4) r_D^{-1}. \quad (1.240)$$

Это и есть обратные масштабы длин волн в области поглощения ленгмировской турбулентности.

### § 1.20. Стационарные нелинейные волны

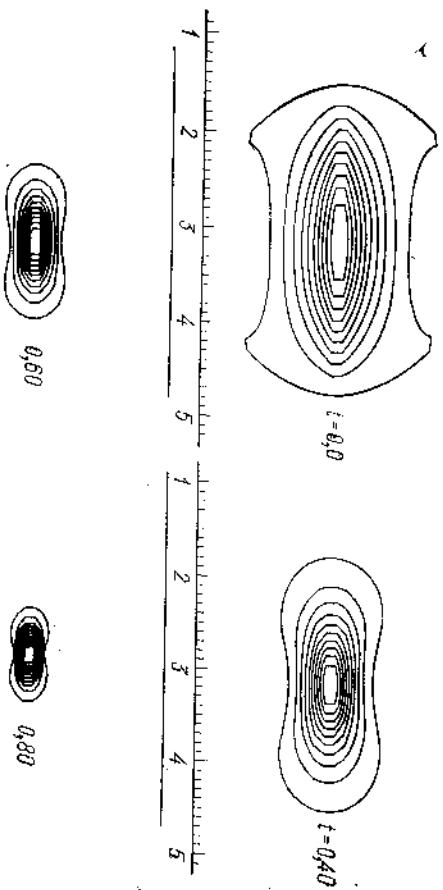


Рис. 1.38. Численный эксперимент, иллюстрирующий динамику сжатия каверн при коллапсе ленгмировских волн (Детярев Л. М., Захаров В. Е., Руда. Показаны линии уровня амплитуды электрического поля в двумерной каверне в различные моменты времени  $t$ . Законы роста электрического поля в центре каверн и уменьшения ее размеров с большой точностью определяются автомодельными зависимостями для данного случая

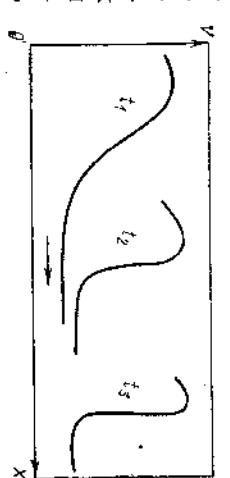


Рис. 1.39. Нелинейное укрупнение фронта.

Не следует думать, что волны в плазме можно «ловить» до нелинейного уровня только из-за наличия неустойчивостей. Большой раздел в физике плазмы составляет изучение регулярных нелинейных волн, возникающих в результате каких-либо упорядоченных механизмов, аналогичных, например, механизму генерации ударных волн в обычной газодинамике движущимся поршнем. Ведь так же, как и в газовой динамике, для волн с линейным законом дисперсии должны происходить перспективы известное укрупнение и хорошо известное укрупнение опрокидывание фронта. Эта опрокидывание фронта. Эта

нелинейная деформация профиля волны (рис. 1.39) за-

ключается в том, что участки профиля, которым соответствуют большие скорости, стремятся опередить участки с меньшей скоростью, и в конце концов образуется разрыв. Если в газовой динамике рост крутизны фронта ограничивался дисипативными эффектами, то в плазме главную роль могут играть эффекты дисперсии, т. е. зависимости фазовой скорости от длины волны. Роль дисперсии в ограничении нелинейного укрупнения профиля можно пояснить следующим образом. Увеличение крутизны переднего фронта означает рождение высших гармоник в волне под влиянием нелинейности. В первом (линейном) приближении по амплитуде всякая волна остается гармонической в форме  $\exp[ikx - i\omega t]$ . Во втором приближении тот же механизм, который был описан в § 1.14 и приводил к параметрической связи различных типов волн, в случае монохроматической волны приводит просто к рождению второй гармоники. Разлагая по амплитуде волны, получаем следующее уравнение для поправки второго при-

поглощению, соответствующий инкремент возрастает в  $t_0/t_0 - t$   $\sim (k_*/k_0)^{3/2}$  раз,  $k_*$  и  $k_0$  — волновые числа соответственно в области поглощения и в области источника, где образуются каверны. Таким путем из условия

$$\gamma_L/\omega_P \sim (k_*/k_0)^{3/2} [(m_e/m_i) \langle E^2 \rangle / 16\pi n T]^{1/4}$$

находим, что затухание Ландау становится существенным при волновых числах

Гораздо сложнее обстоит дело в случае поглощения. При больших  $k$  схлопывание каверн останавливается за счет затухания Ландау плавмених колебаний. Для определения граничного инерционного интервала сравним декремент затухания с инкрементом, определяющим скорость схлопывания каверн. На начальной стадии схлопывания этот инкремент совпадает с инкрементом (1.231) модуляционной неустойчивости. В дальнейшем схлопывание происходит, как мы уже знаем, с нарастающей скоростью, и к концу процесса схлопывания, когда может стать существенным

ближения:

$$(\partial^2/v^2 - v^2 \partial^2/\partial x^2) E_z + \hat{L} E_z = AE_z^2, \exp\{2i(kx - \omega t)\}. \quad (1.241)$$

Здесь  $E$  — электрическое поле волны, индексы 1 и 2 соответствуют амплитудам первой и второй гармоник, оператор  $\hat{L}$  описывает отклонение от линейного закона дисперсии волны  $\omega = v_F k$ . В известном смысле уравнение (1.241) имеет вид уравнения движения «осциллятора» под действием вынуждающей силы, пропорциональной  $E$ . Ясно, что вторая гармоника может эффективно возбуждаться только тогда, когда эта сила находится в резонансе с собственной частотой осциллятора, т. е. если удвоенное исходной частоте  $2\omega$  соответствует (в законе дисперсии) волновое число  $2k$ . Такой резонанс может осуществляться лишь для линейного закона дисперсии  $\omega = v_F k$ , дисперсия фазовой скорости означает, что вынуждающая сила сменяется из резонанса и перекачка во вторую гармонику становится менее эффективной.

Для того чтобы увидеть, как дисперсия остановит процесс нелинейного укручивания профиля, рассмотрим случай, когда фазовая скорость уменьшается с ростом волнового числа. Тогда нелинейная добавка к фазовой скорости и дисперсионная добавка, появляющиеся при укручении профиля, имеют разный знак и поэтому могут компенсировать друг друга. Такой закон дисперсии имеют ленгмюровские и коротковолновые ионо-звуковые колебания, и в этих случаях следует ожидать появления нелинейных стационарных волн. В таких волнах все величины зависят от комбинации  $x - v_F t$  ( $v_F$  — скорость распространения волны). Эти волны можно рассматривать как асимптотическое состояние исходного волнового пакета при достаточно больших временах, когда эффекты нелинейного укручения и дисперсии успевают стабилизироваться друг друга.

Рассмотрим сначала нелинейную ленгмюровскую волну. Напомним, что для волны достаточно большой амплитуды, когда выполнено условие  $\gamma L \tau_b < 1$  ( $\gamma L$  — линейный инкремент,  $\tau_b$  — период колебаний захваченных частиц), фазовое размешивание полностью «выключает» кинетический эффект взаимодействия резонансных частич с волной. Поэтому нелинейную волну можно исследовать с помощью более простых гидродинамических уравнений (1.100) и (1.102), дополненных уравнением Пуассона:

$$\left. \begin{aligned} \partial \phi / \partial t + i v \partial \phi / \partial x &= (e/m) (\partial \Phi / \partial x); \\ \partial n / \partial t + \partial (n v) / \partial x &= 0; \\ \partial^2 \Phi / \partial x^2 &= 4\pi e (n - n_0). \end{aligned} \right\} \quad (1.242)$$

Полагая, что  $n = n(\xi)$ ,  $v = v(\xi)$ ,  $\Phi = \Phi(\xi)$ ,  $\xi = x - v_F t$ , можно проинтегрировать первые два уравнения из приведенной системы:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= v_F - (v_F^2 + 2e\Phi/m)^{1/2}; \\ n &= -n_0 v_F / (v - v_F). \end{aligned} \right\} \quad (1.243)$$

Постоянные интегрирования в этих уравнениях выбраны из условия, что в невозмущенном состоянии, т. е. при  $\Phi = 0$ ,  $v = 0$ ,  $n = n_0$ . Используя эти соотношения, можно свести уравнение Пуассона к следующему уравнению для  $\Phi(\xi)$ :

$$d^2 \Phi / d\xi^2 = -\partial U / \partial \Phi, \quad (1.244)$$

$$\text{где } U(\Phi) = -4\pi e n_0 m v_F (v_F^2 + 2e\Phi/m)^{1/2} / e - \Phi - mv_F^2 \Phi / e.$$

При решении уравнения (1.244) оказывается удобным использовать формальную аналогию с аналитической механикой — это уравнение совпадает с уравнением движения частицы в потенциальной яме  $U(\Phi)$  (рис. 1.40) (эта аналогия становится очевидной при замене  $\xi \rightarrow t$ ,  $\Phi \rightarrow x$ ). Первый интеграл уравнения (1.244) совпадает с интегралом энергии частицы с единичной массой и полной энергией  $\mathcal{E}$ :

$$(1/2) (d\Phi / d\xi)^2 = \mathcal{E} - U(\Phi). \quad (1.245)$$

Уравнение энергии (1.245) просто интегрируется, и решение  $\Phi(\xi)$  выражается через эллиптические функции. Нет смысла приводить соответствующие формулы вследствие их громоздкости. Качественно характер решения нетрудно пояснить, используя вид эффективного «потенциала»  $U(\Phi)$ . При ма-

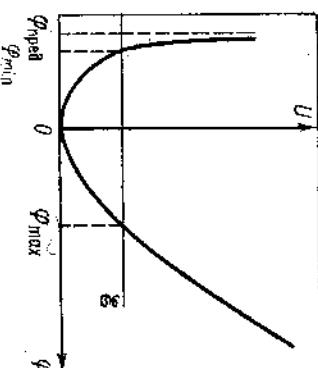


Рис. 1.40. График эффективной потенциальной энергии  $U(\Phi)$  в случае нелинейной ленгмюровской волны

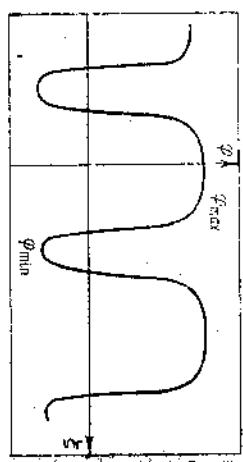


Рис. 1.41. Профиль потенциала электрического поля нелинейной ленгмюровской волны

лых амплитудах  $\Phi(\xi)$  — гармоническая функция, при больших амплитудах потенциал  $\Phi$  остается периодической функцией, изменяющейся от  $\Phi_{\text{max}}$  до  $\Phi_{\text{min}}$ , однако профиль волны искажается, как это показано на рис. 1.41. При  $\Phi < 0$  отрицательная сила  $-U'(\Phi)$ , действующая на «осциллятор» в потенциальной яме, велика, и эту область значений  $\Phi$  осциллятор проскаивает довольно быстро, существенно быстрее области положительных  $\Phi$ . В результате мы получаем так называемую кюндальную волну для потенциала (см. рис. 1.41), которой соответствует волна электрического поля  $E(\xi)$  с достаточно крутым передним фронтом.

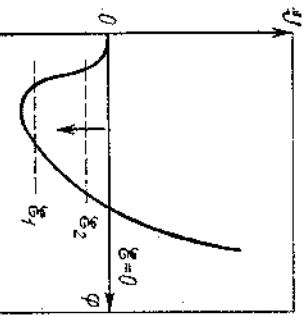


Рис. 1.42. График  $U(\Phi)$  для нелинейной ионно-звуковой волны

частицы плазмы не могут переваливать через него и останавливаются в системе отсчета волны. При еще больших амплитудах появляются отраженные электроны, возникает многопотоковое движение частиц, приводящее к опрокидыванию профиля волны. Таким образом, в плазменной волне дисперсионные эффекты останавливают процесс нелинейного укручивания и опрокидывания волнового профиля только для волны не слишком большой амплитуды:

$$|\Phi_{\text{вн}}| \leq m v_{\Phi}^2 / 2e.$$

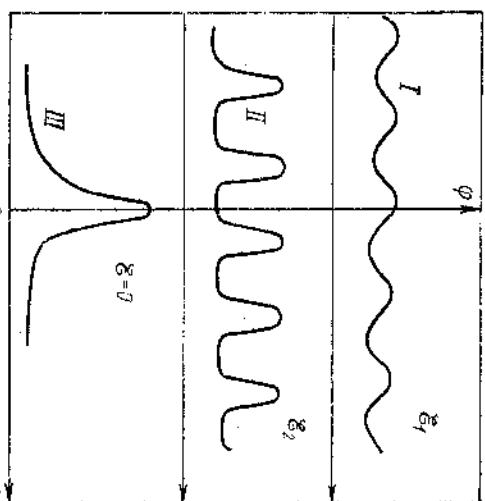
Рассмотрим теперь другой предельный случай — линейную ионно-звуковую волну. Фазовая скорость ионно-звуковой волны существенно больше тепловой скорости ионов, поэтому движение ионов в волне можно рассматривать с помощью гидродинамических уравнений. Скорость и плотность ионов определяются тогда формулами (1.243) с соответствующими заменами заряда и массы заряженной частицы  $e \rightarrow -e$ ,  $m_e \rightarrow m_i$ . Что же касается электронов, то, как уже отмечалось ранее (см. § 1.10), тепловая скорость электронов существенно больше фазовой скорости волны, и поэтому для них поле волны практически квазистационарно. В этом случае для электронов простейшей моделью является распределение Больцмана (1.16). Тогда уравнение Пуассона для потенциала ионно-звуковой волны вновь сводится к уравнению движения «линейного осциллятора»  $U(\Phi)$  в этом случае имеет вид

$$U(\Phi) = -4\pi n e f m_i v_{\Phi} (v_{\Phi}^2 - 2e\varphi/m_i)^{1/2} + T_e \exp(e\varphi/T_e) - mv_{\Phi}^2 - T_{\varphi}. \quad (1.246)$$

График функции  $U(\Phi)$  показан на рис. 1.42. Так же, как и в случае ленгмюровской волны, ограничимся качественным анализом решения, основывающимся на интегrale «энергии» (1.245). Из вида графика  $U(\Phi)$  следует, что в случае сверхзвуковой волны  $v_{\Phi} > (T_e/m_i)^{1/2}$  значениям  $\xi$  в интервале  $\xi_{\min} < \xi < 0$  соответствуют

периодические решении с  $\Phi > 0$ , т. е. являющиеся потенциальными горбами для ионов. При  $\xi = \xi_{\min}$  (т. е. вблизи дна «ямы») имеем гармонические колебания потенциала малой амплитуды относительно среднего значения  $\Phi^*$  (рис. 1.43). С ростом значения  $\xi$  происходит нелинейное искажение профиля волны. Вершины волны потенциала разносятся на все большее расстояние, поскольку при этом вблизи точки поворота  $\Phi = \Phi_{\text{转折}}$  сила, действующая на нелинейный «осциллятор» и пропорциональная  $\partial U(\Phi)/\partial\Phi$ , оказывает

Рис. 1.43. Профиль потенциала нелинейной ионно-звуковой волны при различных уровнях энергии осциллятора в эффективной потенциальной яме  $U$  (см. рис. 1.42): I — спускающаяся волна малой амплитуды; II — нелинейная ионная волна; III — удлиненная волна — солитон



ется малой. В результате получаем ионную волну (см. рис. 1.43). Наконец, при  $\xi \rightarrow 0$  вершины  $\Phi(\xi)$  разносятся на бесконечно большое расстояние, и мы имеем удлиненную волну, или солитон. В такой волне при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ ,  $\Phi \rightarrow 0$  и  $d\Phi/d\xi \rightarrow 0$  (см. рис. 1.43).

Полагая в интеграле «энергии»  $\xi = 0$  и  $d\Phi/d\xi = 0$  при  $\Phi = \Phi_{\text{max}}$ , что эквивалентно условию  $U(\Phi_{\text{max}}) = 0$ , получаем дисперсионное соотношение для солитона, устанавливающее связь между скоростью его распространения и амплитудой потенциала в нем:

$$\xi^2 = (T_e/2m_i) [\exp(e\Phi_{\text{max}}/T_e) - 1] / [\exp(e\Phi_{\text{max}}/T_e) - 1 - e\Phi_{\text{max}}/T_e]. \quad (1.247)$$

Так же, как и в ленгмюровской волне, в нелинейной звуковой волне существует предельное значение амплитуды потенциала, при превышении которого происходит отражение ионов от горба потенциала, приводящее к возникновению многопотокового движения ионов и к опрокидыванию волнового профиля. Из вида функции  $U(\Phi)$  в рассматриваемом случае [см. (1.246)] следует, что в ионно-звуковой волне предельное значение амплитуды лен-

$$e\Phi_{\text{peak}} \approx Mv_{\Phi}^2/2. \quad (1.248)$$

Воспользовавшись дисперсионным соотношением (1.247), не

трудно показать, что для солитона такая амплитуда соответствует критическому числу Маха  $M_{\text{крит}} = v_{\Phi}/(T_e/m_i)^{1/2} \approx 1.6$ . Стационарный ионо-звуковой солитон возможен только при числах Маха  $M < M_{\text{крит}}$ , при больших числах Маха дисперсия не останавливает нелинейное укручивание и опрокидывание волнового профиля.

Рассмотренная здесь уединенная волна — солитон представляет собой симметричный горб потенциала. Такая волна возможна только в отсутствие какой-либо диссипации, когда условия за фронтом волны повторяют условия перед ее фронтом, т. е. решение строго обратимо. Наличие диссипации приводит к нарушению симметрии и возникновению своеобразной ударной волны, связывающей два различных состояния плазмы: невозмущенное (перед фронтом) и модулированное интенсивными колебаниями (за фронтом). Структура ударной волны существенно зависит от конкретного механизма диссипации. Кроме чисто столкновительного застужания колебаний возможны также коллективные механизмы диссипации, связанная с ними ударная волна называется беспартийной.

Рассмотрим, как происходит формирование беспартийного горбовидной ударной волны. Ограничимся случаем достаточно малых амплитуд волн, когда удается построить ламинарную теорию. Будем считать, что обычная диссипация из-за парных столкновений частиц отсутствует, но примем во внимание эффект отражения ионов от переднего фронта, играющий роль беспартийной диссипации. В построенной выше гидродинамической теории такое отражение вообще отсутствовало, если только амплитуды были не слишком велики:  $\Phi < \Phi_{\text{крит}}$  ( $M < 1.6$ ). Однако в действительности ионы имеют распределение по скоростям, и для небольшой группы резонансных с волной ионов эффект отражения возможен и при малых амплитудах волны. Если число отраженных ионов невелико, то можно найти форму профиля устанавливающейся в этих условиях ударной волны.

При учете отраженных ионов уравнение для потенциала (1.246) модифицируется таким образом, что

$$n_i - n_i - n_{i0f}(\Phi_{\text{max}}) v_{\Phi} / (v_{\Phi}^2 - 2e\varphi/m_i)^{1/2} + 2n_{i0f}(\Phi). \quad (1.249)$$

В этой формуле  $n_i$  — плотность ионов, проходящих над потенциальным горбом, которая определяется ранее полученной гидродинамической формулой. Из добавленных слагаемых первое соответствует вычитанию отраженных ионов из полного числа ионов  $n_{i0}$ . Величина  $n_{i0f}(\Phi)$  есть полная плотность отраженных ионов в точке с потенциалом  $\Phi$ . Коэффициент 2 перед последним членом в (1.249) возникает из-за наличия двух групп движущихся на встречу друг другу частиц. Конкретный вид  $f_i(\Phi)$  легко найти, зная

невозмущенное распределение ионов по скоростям  $f_0(v)$ :

$$n_{i0f}(\Phi) = \int_0^{v_{\Phi} + (2e\varphi/m_i)^{1/2}} f_0(v) dv. \quad (1.250)$$

При добавлении в уравнение для потенциала слагаемого, пропорционального  $f_i(\Phi)$ , величина  $\mathcal{E}$  [«энергия» осциллятора в потенциальной яме  $U(\Phi)$ ] уже не является интегралом движения. Появление отраженных ионов приводит к уменьшению «энергии» осциллятора в эффективной яме, пропорциональному числу отраженных частиц:

$$\mathcal{E} = -8\pi e n_i \int_0^{\Phi} f_i(\Phi) d\Phi. \quad (1.251)$$

Теперь нетрудно понять, как можно сконструировать решение с профилем потенциала, показанным на рис. 1.44. Перед фронтом  $\mathcal{E} = 0$ , т. е. профиль потенциала

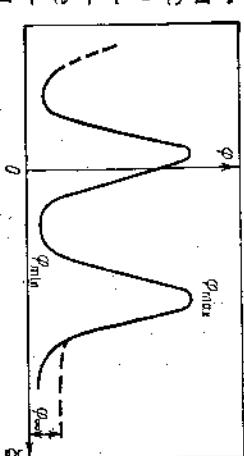


Рис. 1.44. Образование беспартийной ударной волны

такой же, как и в случае солитона. В результате отражения  $\mathcal{E}$  уменьшается (перемещение  $\mathcal{E}$  в потенциальной яме  $U(\Phi)$  показано на рис. 1.42 стрелками). Поэтому за фронтом волны имеют место интенсивные упорядоченные колебания. Решение такого типа, в котором состояние плазмы меняется от первоначально невозмущенного (до прихода солитона) к состоянию, модулированному интенсивными колебаниями, и есть беспартийная ударная волна. В отличие от обычной газовой динамики возмущенное состояние (за фронтом ударной волны) не является термодинамически равновесным, так как нет частотных столкновений, устанавливающих его. Однако к беспартийному ударному волнам можно применять соответствующие законы сохранения (а при переходе через фронт — соотношения Гюгонио), учитывая вклад колебательной структуры за фронтом.

Максимальное значение потенциала за фронтом волны  $\Phi_{\text{max}}$  (см. рис. 1.44) мало отличается от соответствующего значения в уединенной волне с тем же числом Маха. Минимальное значение потенциала  $\Phi_{\text{min}}$  («левая» точка поворота осциллятора на рис. 1.42) определяется условием  $\mathcal{E} - U(\Phi_{\text{min}}) = 0$ , и поскольку при малых  $\Phi$  потенциальная энергия  $U(\Phi)$  меняется квадратично, точка поворота  $\Phi_{\text{min}}$  оказывается пропорциональной корню квадратному из энергии  $\mathcal{E}$  за фронтом, т. е. из полного числа отраженных

частич:

$$\varphi_{\min} \sim (-\delta)^{1/2} \sim \left( \int_0^{\varphi_{\max}} f(\varphi) d\varphi \right)^{1/2}. \quad (1.252)$$

Период колебаний  $\Phi(\xi)$  за фронтом определяется интегралом

$$T \sim \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} d\varphi / (-U(\varphi) + \delta)^{1/2}.$$

Очевидно, что этот период конечен и логарифмически зависит от энергии.

$$\lambda \sim \ln(1 - \delta) \sim \ln(1/\varphi_{\min}). \quad (1.253)$$

Наконец, появление уходящих на бесконечность ионов приводит к скачку потенциала  $\Phi_\infty$ . Такой скачок пропорционален  $\delta$ , и при малом числе отраженных ионов  $\Phi_\infty \ll \Phi_{\min}$ .

При больших числах Маха, когда возникает многопотоковое движение ионов и опрокидывание волнового фронта, изложенная выше так называемая ламинарная теория бессстолкновения тельной ударной волны неприменима. В принципе может

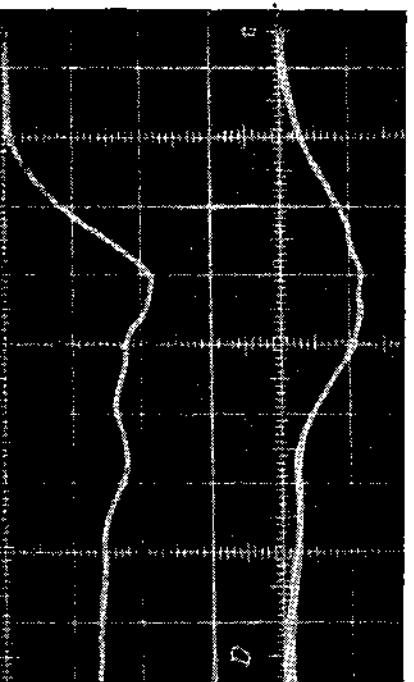


Рис. 1.46. Опрокидывание пеллинейной ионно-звуковой волны при больших числах Маха в численном эксперименте (Алиханов С. Г., Садеев Р. З., Чебагаев П. З. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1969, т. 57, с. 1565).

Показана фазовая плоскость (координаты  $(x, y)$ ) после опрокидывания цепочки волнистых волн. Видно появление всплесков фронта ионно-звуковой волны, убывающих вместе со скоростью  $\sim 2c$ . Наличие этих волн приводит к сорванию положения профиля потенциала (и плотности) волны.



возникнуть неустойчивость многопотокового движения ионов типа рассмотренной в § 1.14 пучковой неустойчивости электронов. Неустойчивость подобного типа, как известно, переводит энергию упорядоченного движения в энергию хаотических турбулентных пульсаций. Связанная с неустойчивостью аномальная диссиляция может в определенных условиях привести к формированию некоторого турбулентного слоя конечной толщины, играющего роль фронта турбулентной бесстолкновительной ударной волны.

Иллюстративные примеры генерации нелинейных ионно-звуковых волн приведены на рис. 1.45 (лабораторный эксперимент с плазмой низкой плотности) и на рис. 1.46 (одномерный численный эксперимент).

Рис. 1.45. Экспериментальное наблюдение укорочения нелинейной ионно-звуковой волны (Алиханов С. Г., Белан В. Г., Садеев Р. З. «Гипсма ЖЭТФ», 1968, т. 7, с. 405): первоначальное возмущение плотности (амплитуда  $A\eta/n \sim 1/5$ ) (a) и формирование нелинейной осцилляторной структуры по мере удаления от источника (b).

## 2

### ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

#### § 2.1. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Наиболее интересные и важные для различных приложений свойства плазмы обнаруживаются при анализе ее поведения в магнитном поле. Под действием магнитного поля плазма теряет изотропию и многие ее свойства радикально меняются. При наличии магнитного поля появляется возможность создать плазменные конфигурации, занимающие ограниченную часть пространства и, так сказать, подвешенные в вакуме. Это уже нечто совершенно не свойственное обычному газу. В этих условиях плазма приобретает некоторые новые свойства, отличающие ее от всех других состояний вещества.

Поскольку в конечном счете все характерные черты плазменных процессов обусловлены законами движения частиц, то прежде чем заняться магнитными свойствами плазмы как макроскопической субстанции, нужно проанализировать вопрос о влиянии магнитного поля на движение электронов и ионов.

Как известно, в однородном магнитном поле заряженная частица движется в общем случае по винтовой линии. Проекция траектории на плоскость, перпендикулярную к вектору магнитного поля  $\mathbf{H}$ , представляет собой окружность радиусом  $r_H = mv_{\perp}^2 c/eH$ , где  $v_{\perp}$  — поперечная составляющая скорости частицы. Это так называемая ларморовская окружность. Вращение по этой окружности происходит с ларморовской частотой  $\omega_H = eH/mc$ . Вдоль силовых линий частица движется с постоянной скоростью  $v_{||}$ .

Рассмотрим теперь движение частицы в неоднородном магнитном поле. В физике плазмы мы обычно встречаемся только с таким уровнем неоднородности, при котором на расстоянии порядка ларморового радиуса частиц вектор  $\mathbf{H}$  остается почти постоянным по величине и направлению: другими словами, в «микромасштабах» магнитное поле изменяется очень мелко. Выясним, какие изменения вносят слабая неоднородность поля в характер движения частиц. Допустим сначала, что напряженность магнитного поля изменяется вдоль силовой линии.

Наблюдая за траекторией частицы, которая нависает на эту силовую линию, можно установить, что форма траектории заметно меняется на протяжении отрезков, в пределах которых проходит существенное увеличение или уменьшение напряженности магнитного поля  $H$ . При движении в сторону возрастания поля траектория становится более крутой и она похожа на сжимающуюся пружину. Если же частица движется в сторону ослабевающего поля, то ее траектория становится более пологой.

Причины этого эффекта нетрудно обнаружить. Заряженная частица, вращающаяся по ларморовской окружности, создает количественный ток  $i$ , следовательно, эквивалентна элементарному диполику с магнитным моментом  $\mu = w_{\perp} H$ , где  $w_{\perp}$  — кинетическая энергия попутного движения. Действительно, согласно теореме Ампера магнитный момент кольцевого тока  $\mu = (i/c)\pi r^2 H$ ; величина  $i$  — электрический ток, соответствующая ларморовскому вращению,  $j = e\omega_{\perp}/2\pi$ . Теперь, подставляя записанные выше выражения для  $\mathbf{H}$  и  $r_H$ , получаем

$$\mu = mv_{\perp}^2 / 2H = w_{\perp} / H, \quad (2.1)$$

где дифференцирование проводится вдоль направления поля. Под действием указанной силы скорость продольного движения изменяется по закону

$$mdv_{||}/dt = - (w_{\perp}/H) (dH/dt), \quad (2.3)$$

Умножая обе части последнего равенства на  $v_{||}$ , получаем

$$d\omega_{||}/dt = - (w_{\perp}/H) (dH/dt) (dv_{||}/dt) = - (w_{\perp}/H) (dH/dt). \quad (2.4)$$

При движении в постоянном магнитном поле  $w_{\perp} + w_{||} = \text{const}$ . Поэтому (2.4) можно преобразовать к виду

$$d\omega_{||}/dt = (w_{\perp}/H) (dH/dt). \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что

$$d\omega_{||}/\omega_{\perp} = dH/H; \quad \omega_{\perp}/H = \text{const}. \quad (2.6)$$

Таким образом, при движении заряженной частицы в магнитном поле, напряженность которого достаточно плавно изменяется вдоль силовых линий, отношение  $w_{\perp}/H$  не меняется, а следовательно, остается постоянным и магнитный момент, связанный с ларморовским вращением. Сохранение величины  $w_{\perp}/H$  имеет более общий и глубокий смысл — оно представляет собой проявление принципа алибатической инвариантности при квазипериодическом движении. Связь с этим принципом разобрана в § 2.3.

Рассмотрим теперь движение частиц в неоднородном поле, напряженность которого изменяется в направлении, перпендикулярном к силовым линиям.

Остановимся сначала на прошлом случае, когда скорость перпендикулярна к магнитному полю.

Траектория частицы изображена на рис. 2.1. Магнитное поле направлено перпендикулярно к плоскости чертежа. Напряженность поля увеличивается в сторону взаимодействия координаты  $x$ . В этом случае траектория частицы в плоскости  $xy$  уже не будет представлять собой окружность, так как

величина ларморовского радиуса спраивается после одного полного оборота. При каждом обороте частица описывает петлю и передвигается на некоторое расстояние  $\Delta y$  вдоль оси  $y$ , т. е. перпендикулярно к градиенту магнитного поля.

После нескольких оборотов траектория обрисуется достаточно ясно. Она будет представлять собой дорожку, сплетенную из петель, по которой частица движется вдоль направления параллельной оси  $y$ . Такое движение называется магнитным дрейфом. Скорость дрейфового движения частицы движется вдоль дорожки мала по сравнению со скоростью ее ларморовского вращения (по условию предполагается, что напряженность поля слабо изменяется на расстояния масштаба ларморовского радиуса).

Обратим внимание на одну особенность дрейфового движения в неоднородном магнитном поле. Совершая его, частица не уходит в область более сильного или более слабого поля. Напротив, частица движется по узкой дорожке таким образом, что в пределах ее траектории напряженность поля сохраняет одно и то же значение. Это означает, что адиабатическая инвариантность  $H$  имеет место также и при магнитном дрейфе. В неоднородном магнитном поле дрейфовое движение может быть связано также с наличием у частицы продольной скорости  $v_{||}$ .

Механизм возникновения такого дрейфа можно понять, рассмотрев рис. 2.2. На этом рисунке жирными линиями показаны силовые линии неоднородного магнитного поля. В общем случае они являются криволинейными. В точке  $M_1$ , где скорость частицы параллельна вектору  $\mathbf{H}$ , сила Лоренца равна нулю. Однако при дальнейшем движении частица под действием сопротивления с силовой линией, и это приведет к тому, что в точке  $M_2$  у частицы появится небольшая слагающая скорость, перпендикулярная к магнитному полю. С появлением перечной скорости будет автоматически связано появление силы Лоренца. Под действием этой силы частица приобретает дрейф-

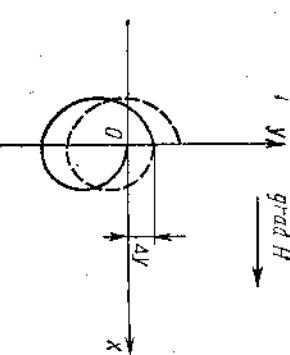


Рис. 2.1. Дрейф частиц в неоднородном магнитном поле

ую скорость, которая направлена перпендикулярно к плоскости рисунка.

Рассматривая частные случаи (например, движение частиц в магнитном поле, создаваемом прямолинейным проводником с током), несложно убедиться, что дрейф частицы, связанный с продольной скоростью  $v_{||}$ , происходит в том же направлении, в котором совершается дрейфовое движение, обусловленное наличием

у частицы поперечной скорости  $v_{\perp}$ .

Дрейфовое движение возникает не только при неоднородности магнитного поля, но также и тогда, когда на заряженную частицу в однородном магнитном поле действует дополнительная сила

некоторого или гравитационного поля), направленная перпендикулярно к вектору  $\mathbf{H}$ .

Для выяснения основных закономерностей дрейфового движения рассмотрим следующую задачу. Частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется в однородном магнитном поле, направленном по оси  $z$ , при наличии дополнительной силы  $F$ , направленной вдоль оси  $y$ .

Величину  $E$  будем считать медленно изменяющейся функцией времени (ее можно рассматривать так же, как функцию  $z$ , поскольку слагающая скорость частицы вдоль линий магнитного поля остается постоянной и поэтому  $z = z(t)$ ). Условие медленности изменения означает, что  $F$  остается почти постоянной за время одного ларморовского оборота частицы, т. е.  $(2\pi/\omega_H)|F/F| \ll 1$ .

Запишем уравнения движения частицы:

$$\ddot{x} = \omega_H y; \quad (2.7)$$

$$y'' = -\omega_H \dot{x} + F(t)/m. \quad (2.8)$$

Выберем следующие начальные условия:  $x(0) = 0$ ;  $y(0) = 0$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ ;  $\dot{y}(0) = v_0$ . При указанных условиях

$$x = \omega_H y, \quad (2.9)$$

$$y = -\omega_H^2 y + F(t)/m. \quad (2.10)$$

Общее решение уравнения (2.10) имеет вид

$$y = A \sin \omega_H t + B \cos \omega_H t + \frac{1}{\omega_H} \int (F(u)/m) \sin [\omega_H(t-u)] du, \quad (2.11)$$

где  $A$  и  $B$  — константы интегрирования. Поскольку  $y(0)=0$ , нужно положить  $B=0$ . Преобразуя интеграл, получаем

$$y = A \sin \omega_H t + \frac{1}{m\omega_H^2} [F(t) - F(0) \cos \omega_H t] -$$

$$-\frac{1}{m\omega_H^2} \int_0^t \dot{F}(u) \cos \omega_H(t-u) du. \quad (2.12)$$

Дифференцируя (2.12), находим

$$y = A \omega_H \cos \omega_H t + (F(0)/m\omega_H) \sin \omega_H t + \\ + (1/m\omega_H) \int_0^t \dot{F}(u) \sin \omega_H(t-u) du. \quad (2.13)$$

При принятом предположении о мелком изменении  $F$  последний член выражения (2.12) пренебрежимо мал по сравнению со вторым. Действительно,

$$\left| \int_0^t \dot{F}(u) \cos \omega_H(t-u) du \right| \sim (1/\omega_H) |\dot{F}|,$$

и, следовательно, отношение третьего члена ко второму порядка  $(1/\omega_H) |\dot{F}|/F$ . Точно так же можно пренебречь последним членом в выражении для  $y$ . Принимая во внимание начальные условия, из (2.9) и (2.12) получаем следующие соотношения:

$$x = \omega_H \int_0^t y dt = \frac{\omega_0}{\omega_H} (1 - \cos \omega_H t) - (F(0)/m\omega_H^2) \sin \omega_H t +$$

$$+ (1/m\omega_H) \int_0^t F(t) dt; \quad (2.14)$$

$$y = (\omega_0/\omega_H) \sin \omega_H t - (F(0)/m\omega_H^2) \cos \omega_H t + F(0)/m\omega_H. \quad (2.15)$$

Выражения для компонент скорости частицы имеют вид

$$\dot{x} = \omega_0 \sin \omega_H t - (F(0)/m\omega_H) \cos \omega_H t + F(0)/m\omega_H; \quad (2.16)$$

$$\dot{y} = \omega_0 \cos \omega_H t + (F(0)/m\omega_H) \sin \omega_H t. \quad (2.17)$$

Малые члены в (2.14) — (2.17) отброшены.

Полученные формулы нетрудно интерпретировать. Мы видим, что движение частицы в однородном магнитном поле при наличии медленно меняющейся дополнительной силы  $\mathbf{F} \perp \mathbf{H}$  представляет собой суперпозицию равномерного вращательного движения с угловой скоростью  $\omega_0$  и перемещения в направлении, параллельном  $[\mathbf{F} \times \mathbf{H}]$ , с дрейфовой скоростью

$$u_d = F(0)/m\omega_H = cF(0)/eH. \quad (2.18)$$

Линейная скорость вращательного движения остается в этом случае неизменной. При заданных начальных условиях

$$v_{\perp} = \sqrt{v_{\parallel}^2 + F^2(0)/m^2\omega_H^2}. \quad (2.19)$$

Постоянство  $v_{\perp}$  связано с адиабатической инвариантностью отношения  $v_{\perp}^2/H$ . Центр ларморовской окружности перемещается с дрейфовой скоростью вдоль оси  $x$ . При этом его координата медленно изменяется:

$$y_c = F(0)/m\omega_H^2. \quad (2.20)$$

Перейдем к анализу конкретных случаев дрейфового движения. Если частица движется перпендикулярно к силовым линиям неоднородного магнитного поля, то влияние неоднородности можно заменить действием дополнительной силы:

$$\mathbf{F} = -\mu \operatorname{grad} H = (-\omega_0/H) \operatorname{grad} H. \quad (2.21)$$

Дрейфовое движение будет связано с компонентой  $\mathbf{F}$  в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{H}$ . Из (2.18) и (2.21) находим дрейфовую скорость для рассматриваемого случая:

$$u_d = (mv_{\perp}^2 c / 2eH^2) \operatorname{grad}_{\perp} H, \quad (2.22)$$

где  $\operatorname{grad}_{\perp} H$  обозначает компоненту  $\operatorname{grad} H$  по направлению, перпендикулярному к  $\mathbf{H}$ . Дрейфовая скорость направлена параллельно  $[\mathbf{H} \times \operatorname{grad} H]$ . Если движение происходит в области, где  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ , то формулу (2.22) можно привести к более простому виду. При наличии компоненты  $\operatorname{grad} H$  в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{H}$ , силовые линии безвихревого магнитного поля должны быть криволинейными. Для того чтобы связать величину  $\operatorname{grad}_{\perp} H$  с геометрией силовых линий,



Рис. 2.3. Связь между кривизной силовых линий и неоднородностью магнитного поля

рассмотрим рис. 2.3, на котором изображены два небольших участка силовых линий в плоскости кривизны (для простоты предполагаем, что мы имеем дело с семейством плоских кривых). Точка  $O$  — центр кривизны для силовой линии  $l$ . Интеграл по контуру  $abcd$  равен  $H_2 d\ell_2 - H_1 d\ell_1$ , где  $d\ell_1$  и  $d\ell_2$  — длина отрезков силовых линий. В безвихревом случае этот интеграл обращается в нуль. Следовательно,

$$H_2 d\ell_2 = H_1 d\ell_1,$$

но

$$d\ell_2 = d\ell_1 \left[ \frac{(R+\delta r)}{R} \right] = d\ell_1 [1 + (\delta r/R)] \quad (2.24)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{dH}{dt} dE/dt \quad (2.25)$$

При движении частицы в поле  $H$  с постоянной скоростью  $v_0$  и постоянной траекторией  $R$  из (2.25) получаем

$$v^* dH/dt = 1/R \quad (2.26)$$

Видим, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt = 0 \quad (2.27)$$

При этом из (2.26) получаем  $v^* = 1/R$ . Но это означает, что

$$v^* = R \quad (2.28)$$

т. е. движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt \neq 0 \quad (2.29)$$

Итак, движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt \neq 0 \quad (2.30)$$

Напомним, что вектор  $\mathbf{H}$  имеет единичную величину, т. е.  $H = 1$ , поэтому из (2.28) получаем

$$v^* = R \quad (2.31)$$

Было получено, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt \neq 0 \quad (2.32)$$

Было получено, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt \neq 0 \quad (2.33)$$

Заметим, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt \neq 0 \quad (2.34)$$

Из (2.32) и (2.33) получаем, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt \neq 0 \quad (2.35)$$

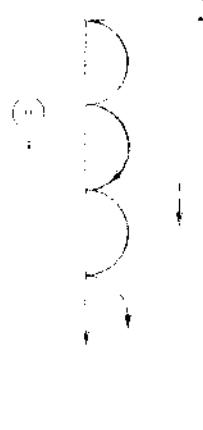
Из (2.34) получаем, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt \neq 0 \quad (2.36)$$

Согласно утверждению математического метода, движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  невозможно.

Но это противоречит тому, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно.

Наша логика привела к парадоксу.



$$V_t = (eB_0m\omega_0^2t) [E(t_0) - E(t_1)]$$

Было получено, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt \neq 0 \quad (2.37)$$

Из (2.32) и (2.33) получаем, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt \neq 0 \quad (2.38)$$

Из (2.34) получаем, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt \neq 0 \quad (2.39)$$

Из (2.32) и (2.33) получаем, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt \neq 0 \quad (2.40)$$

Из (2.34) получаем, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно только в случае отсутствия

$$dH/dt \neq 0 \quad (2.41)$$

Но это противоречит тому, что движение в поле  $H$  с постоянной скоростью и постоянной траекторией  $R$  возможно.

Наша логика привела к парадоксу.

$$H_2 = H_1 + (dH/dn) \delta n. \quad (2.25)$$

Представляя выражение для  $d^2_2$  и  $H_2$  в (2.22), получаем следующее соотношение, связывающее проекцию  $\text{grad } H$  на направление нормали к силовой линии с величиной  $R$ :

$$-(1/H)(dH/dn) = 1/R. \quad (2.26)$$

В рассматриваемом частном случае (плоские силовые линии) очевидно, что  $\text{grad}_\perp H = dH/dn$ . Поэтому формулу (2.26) можно записать в виде

$$(1/H)\text{grad}_\perp H = 1/R. \quad (2.27)$$

Для вычисления  $u_d$  можно теперь использовать следующую формулу:

$$u_d = v_\perp^2 / (2\omega_H R). \quad (2.28)$$

Строгий расчет показывает, что она остается справедливой в самом общем случае, если только неоднородность поля достаточно мала (в смысле, указанном ранее). Как уже говорилось выше, при движении вдоль кривой силовой линии возникает дрейф, причиной которого служит инерционный эффект. Если от криволинейного движения перейти к движению в системе координат, в которой продольная скорость равна нулю, то необходимо учесть действие центробежной силы

$$F = mv_\parallel^2 / R, \quad (2.29)$$

направленной перпендикулярно к силовой линии. Согласно (2.18) эта сила вызывает дрейфовое движение со скоростью

$$u_d = v_\parallel^2 / \omega_H R, \quad (2.30)$$

направленной параллельно вектору  $[\mathbf{H} \times \text{grad } H]$ . В общем случае дрейфовая скорость частицы в неоднородном магнитном поле равна сумме выражений (2.28) и (2.30):

$$u_d = \frac{1}{\omega_H R} \left( \frac{v_\perp^2}{2} + v_\parallel^2 \right). \quad (2.31)$$

Заметим, что положительно и отрицательно заряженные частицы дрейфуют в противоположных направлениях.

В общем случае движение заряженной частицы в неоднородном поле можно представить как суперпозицию следующих движений:

1. Вращения по ларморовской окружности со скоростью  $v_\perp$ , которая изменяется пропорционально  $\sqrt{H}$ .
2. Движения центра ларморовской окружности вдоль силовой линии со скоростью  $v_\parallel$  (при этом  $v_\perp^2 + v_\parallel^2 = \text{const}$ ).
3. Дрейфового движения центра ларморовской окружности со скоростью  $u_d$ , определяемой уравнением (2.31).

Соединяя мгновенные положения центров ларморовского вращения, находим осевую линию траекторий, которую можно рассматривать как усредненный путь частицы.

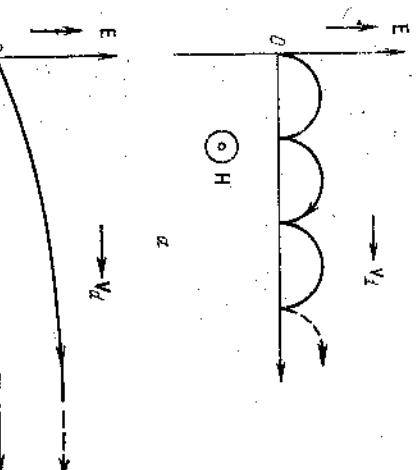
Выясним теперь, как происходит дрейф при наличии электрического поля. Если на частицу, находящуюся в однородном магнитном поле, действует также электрическое поле  $\mathbf{E}$ , направленное перпендикулярно к  $\mathbf{H}$  (скрещенные поля), то  $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$  и, следовательно,  $u_d = cE/H$ . В этом случае дрейфовая скорость не зависит ни от заряда, ни от массы частицы. Она направлена параллельно  $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ . Центр ларморовской окружности, по которой вращается частица, смещается в сторону электрического поля. В интервале времени от  $t=t_1$  до  $t=t_2$  это смещение согласно (2.20) составляет

$$\Delta y = (e/m\omega_H^2) [E(t_2) - E(t_1)].$$

Воспользуемся этой формулой в дальнейшем при анализе диэлектрических свойств плазмы в магнитных полях.

На примере движения частицы в скрещенных полях наглядно иллюстрируются различия в характере движения при быстрых и медленных изменениях силы, вызывающей дрейф. Пусть в момент времени  $t=0$  частица поконится в начале координат (оси  $x$  и  $y$  выбираются, как и ранее, рис. 2.4). Допустим, что  $E(0)=0$  и напряженность электрического поля очень медленно нарастает от 0 до  $eE/m\omega_H^2$ . Если же при  $t=0$  напряженность электрического поля скачком ( $\omega_H t \ll 1$ ) нарастает до предельного значения  $E$ , то с помощью общих формулы (2.14) и (2.15) нетрудно установить, что траектория частицы будет представлять собой цикloidу (рис. 2.4, а). Дрейфовые скорости в обоих случаях при больших  $t$  оказываются одинаковыми, однако во

\* За исключением очень небольших первоначальных в начальной части кривой, вызванных присутствием малых членов, которые не учтены в формулах (2.12) и (2.13).



втором случае частица будет испытывать также ларморовское вращение с линейной скоростью, равной скорости дрейфа.

Если напряженность поперечного электрического поля изменяется с частотой  $\omega = \omega_H$ , то мы имеем дело с так называемым и к л о т р о н ы м р е з о н а с о м . При прежних начальных условиях (равенство нулю начальных координат и скорости) и  $F = eE_0 \sin \omega_H t$  из (2.11) и (2.14) следует:

$$\left. \begin{aligned} y &= c(E_0/H) \int_0^t \sin \omega_H t \sin \omega_H (t-u) du = \\ &= (cE_0/2\omega_H H) (\sin \omega_H t \cos \omega_H t); \\ x &= \omega_H \int_0^t y dt = (cE_0/2\omega_H H) \{2(1 - \cos \omega_H t) - \omega_H t \sin \omega_H t\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

При  $\omega_H t \gg 1$

$$\left. \begin{aligned} x &\approx -(cE_0/2H) t \sin \omega_H t; \\ y &\approx -(cE_0/2H) t \cos \omega_H t, \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

т. е. траектория образует спираль, радиус которой растет пропорционально времени. При этом энергия частицы увеличивается пропорционально  $t^2$ .

### § 2.2. Примеры движения частиц в магнитном поле

Общие законы кинематики заряженных частиц в сильных магнитных полях можно проиллюстрировать на конкретных примерах. Укажем сначала на один важный результат, вытекающий из закона сохранения отношения  $\omega_L/H$ . Энергия поперечного ларморовского вращения  $w_{\perp} = w_0 \sin^2 \alpha$ , где  $w_0$  — полная кинетическая энергия частицы, а  $\alpha$  — угол между векторами  $v$  и  $H$ . При движении в постоянном во времени магнитном поле  $w_0$  не изменяется. Поэтому постоянство  $w_{\perp}/H$  означает, что сохраняется отношение  $\sin^2 \alpha / H$ .

Пусть в некоторой точке траектории  $\alpha = \alpha_1$  и  $H = H_1$ . При таких начальных условиях угол  $\alpha$  в любой точке траектории можно найти с помощью равенства  $\sin^2 \alpha / H = \sin^2 \alpha_1 / H_1$ , откуда

$$\sin \alpha = \sin \alpha_1 \sqrt{H_1 / H}. \quad (2.34)$$

Если частица движется вдоль силовой линии в сторону возвращающего поля и достигает точки, в которой  $W_{\perp} = W_0$ , то угол  $\alpha$  становится равным  $\pi/2$  и, следовательно, продольная скорость

обращается в нуль. Это означает, что в указанной точке направление прямолинейного движения изменяется. Отразившись от области сильного магнитного поля, частица уходит обратно в сторону более слабого поля. Таким образом, области сильного поля при некоторых условиях могут играть для заряженных частиц роль своеобразных магнитных зеркал. Через такие зеркала могут проходить только частицы с малым начальным углом наклона  $\alpha_1$ . Физический механизм, вызывающий отражение частиц от областей сильным магнитным полем, достаточно ясен. Здесь проявляется действие диамагнитной силы  $\mu g \hat{a}$  град  $H$ , которая направлена в сторону слабого поля.

Движение заряженных частиц в магнитных полях при определенных условиях может оказаться финитным, т. е. будет происходить в ограниченной области пространства. Это, в частности, может иметь место из-за отражения частицы от магнитных зеркал.

Пусть напряженность поля направлена вдоль силовых линий в обе стороны от некоторой средней области, где  $H \approx H_1$  (рис. 2.5). Частица, находящаяся в этой области, будет заперта в пространстве между магнитными зеркалами (зонами сущения силовых линий), если угол наклона ее траектории  $\alpha_1$  превосходит некоторое минимальное значение, и будет колебаться вдоль ограниченных участков силовых линий. Магнитное поле, в котором можно организовать «длительное хранение» заряженных частиц, используя эффект отражения от магнитных зеркал (или пробок), можно создать, например, с помощью длинного прямого соленоида, плотность намотки в котором увеличивается при приближении к торам. Роль гигантской магнитной ловушки в природе выполняет магнитное поле Земли, удерживающее заряженные частицы в районе так называемых радиационных поясов.

Частицы, оказавшиеся в ловушке с магнитными зеркалами, совершают не только колебательные движения вдоль силовых линий. В поле с искривленными силовыми линиями они будут также дрейфовать перпендикулярно к  $H$  (см. рис. 2.5). Однако такой дрейф не приведет к уходу частиц из ловушки, так как инвариантность  $\sin^2 \alpha$  при наличии дрейфа не нарушается. В отсутствие электрического поля и при постоянном во времени магнитном поле частица может ускользнуть из ловушки только в результате удачного для нее столкновения с какой-либо другой частицей.

В качестве другого примера рассмотрим траектории заряженных частиц в винтовом торoidalном поле. Такое поле создается в системах для получения высокотемпературной плазмы, используемых в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу. В этом случае магнитное поле есть суперпозиция двух полей:



Рис. 2.5. Осевая линия траектории частицы в поле с магнитными пробками

магнитного поля  $H_\phi$ , создаваемого током, текущим вдоль кольцевого плазменного витка, и продольного магнитного поля  $H_\theta$  вспененного происхождения, замкнутые силовые линии которого параллельны току (рис. 2.6). При этом  $H_\theta \gg H_\phi$  и радиус поперечного сечения плазменного витка, в котором происходит движение частиц, мал по сравнению с радиусом кольца  $R$ . Предполагается, что имеет место симметрия по отношению к главной оси тороидальной системы.

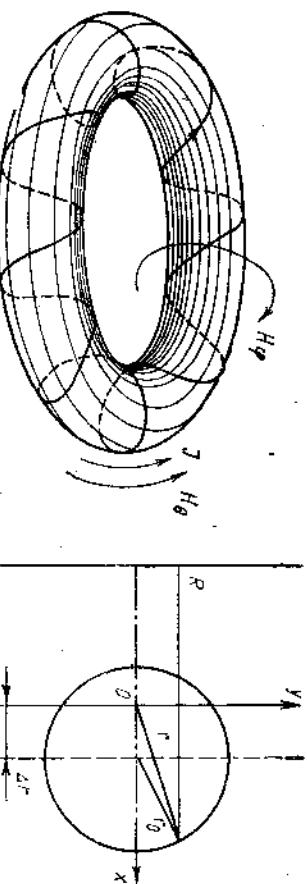


Рис. 2.6. Тороидальное винтовое магнитное поле

Рис. 2.7. Проекция траектории частицы в тороидальном поле на плоскость  $x, y$

Для описания траектории частицы в винтовом магнитном поле введем координаты  $x, y$  и  $\theta$  (рис. 2.7). Осевая линия кольцевого тока пересекает плоскость чертежа в точке  $O$ , где  $x=y=0$ . Координата  $\theta$  определяет угол поворота вокруг главной оси торOIDА. Предположим далее, что  $H_\phi$  зависит только от  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Продольное магнитное поле  $H_\theta$  обратно пропорционально расстоянию до главной оси тороидальной системы и при  $r/R \ll 1$  определяется равенством

$$H_\theta = H_\theta R_0 / (R_0 + r) \approx H_\theta [1 - (x/R_0)], \quad (2.35)$$

где  $H_\theta$  — напряженность продольного поля в точке  $O$ .

В рассматриваемой магнитной системе движение центра ларморской окружности частицы будет складываться из перемещения вдоль силовой линии со скоростью  $v_{||}$  и магнитного дрейфа со скоростью  $u_d$ . Нетрудно показать, что если соблюдается условие  $H_\phi / H_\theta \ll r/R$ , то влиянием  $H_\theta$  на дрейфовую слагающую скорости можно пренебречь. В этом случае дрейфовая скорость направлена по оси  $y$  и равна

$$u_d \approx [v_{||}^2 + (1/2)v_{\perp}^2]^{1/2} / \omega_H R_0 \approx [v_{||}^2 - (1/2)v_{\perp}^2]^{1/2} / \omega_H R_0, \quad (2.36)$$

где  $v_0$  — неизменная величина вектора скорости частицы. Поскольку  $H \approx H_\theta$  а  $H_\theta$  согласно (2.35) мало изменяется вдоль силовой линии, то  $v_{||}$  также испытывает лишь небольшое изменение при движении частицы и, следовательно,  $u_d$  можно считать в первом приближении постоянной величиной. Слагающие результирующей скорости движения по осям  $x$  и  $y$  определяются выражениями

$$\frac{dx}{dt} = -v_{||}(H_\phi/H)(y/r) + u_d, \quad (2.37)$$

где  $H = \sqrt{H_\theta^2 + H_\phi^2} \approx H_\theta$ . Уравнение траектории в плоскости  $xy$  имеет вид

$$\frac{H_\phi}{H_\theta} \frac{1}{r} (xdx + ydy) = (H_\phi/H_\theta) dr = -(u_d/v_{||}) dx \quad (2.38)$$

или

$$dr/dx = -(u_d/v_{||})(H_\theta/H_\phi). \quad (2.39)$$

Следует различать два разных класса траекторий. К первому из них принадлежат траектории так называемых пролетных частиц, у которых вектор скорости составляет не слишком большой угол с силовыми линиями. Ко второму классу относятся траектории так называемых запертых частиц. У таких частиц угол наклона скорости к направлению магнитного поля относительно велик, и поэтому они колеблются вдоль ограниченных участков силовой линии между областями с более сильным полем. Поскольку напряженность магнитного поля вдоль силовой линии изменяется относительно мало, то в силу адиабатического постоянства отношения  $v_{\perp}^2/H$  ларморская скорость  $v_{\perp}$  любой частицы испытывает зацепление, близкое к результатирующему скорости  $v_0$ . Определим с помощью уравнения (2.39) форму траектории для пролетных и запертых частиц.

Для того чтобы не усложнять вычислений, рассмотрим траектории таких пролетных частиц, у которых продольная скорость  $v_{||}$  в любой точке траектории не слишком мала по сравнению с  $v_0$ , т. е. движение частицы не очень сильно замедляется в областях с максимальным значением  $H_\theta$  (при  $x$ , близких к  $r$ ). При указанном условии ввиду практической неизменности  $v_{\perp}$  значение  $v_{||}$  относительно слабо изменяется при движении частицы. Следовательно, правую часть уравнения (2.39) можно в первом приближе-

ни считать величиной постоянной. Обозначим ее  $C$ . Нетрудно убедиться, что  $|C| \ll 1$ . Действительно,

$$|C| = \frac{u_0}{v_{\parallel}} \frac{H_0}{H_{\varphi}} \sim \frac{v^2}{\omega R} \frac{1}{v} \frac{H_0}{H_{\varphi}} \sim \frac{mv^2}{eH_{\varphi}} \frac{1}{R} \sim \frac{r_0}{R},$$

где  $r_0$  — ларморовский радиус частицы в поле тока — величина, по общему условию достаточно мала. Заметим, что  $C \sim 1/H_{\varphi}$  и практически не зависит от  $H_0$ . Из (2.39) следует, что  $r = r_0 - Cx$ . Если пренебречь членами второго порядка малости относительно  $C$ , то (2.39) можно привести к виду  $(x - Cr_0)^2 + y^2 = r_0^2$ . Это уравнение окружности, центр которой смешен на расстояние  $Cr_0$  относитель-

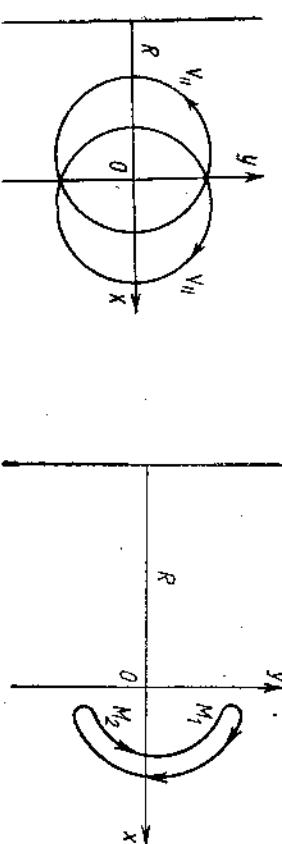
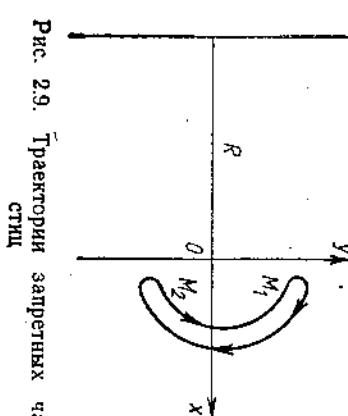


Рис. 2.8. Траектории пролетных частиц



но осевой линии винтового магнитного поля (рис. 2.8). При своем движении частица отклоняется от силовой линии на расстояние

$$Cr_0 \sim r_0 (H_0/H_{\varphi}) (r/R),$$

где  $r_0$  — ларморовский радиус в результате магнитного поля. При соблюдении условия  $H_{\varphi}/H_0 \ll r_0/R$  это отклонение может в несколько раз превысить ларморовский радиус, но оно остается малым по сравнению с  $r_0$ . Следовательно, пролетные частицы с не слишком малой  $v_{\parallel}$  хорошо удерживаются в винтовом поле. Более детальный анализ показывает, что это имеет место для любых пролетных частиц.

Выясним теперь поведение запретных частиц. В этом случае  $v_{\parallel} < v_{\perp}$  и продольная скорость  $v_{\parallel}$  сильно изменяется вдоль траектории, обращаясь в нуль в точках отражения от области с более сильным полем (рис. 2.9), между которыми происходит колебание частиц. (В плоскости  $xy$  частица колеблется между точками  $M_1$  и  $M_2$ ). В данном случае в уравнении (2.39) правая часть уже не

$$v_{\parallel} = \pm v_{\perp} \sqrt{x - x_m / R},$$

где  $x_m$  — абсцисса точки отражения\*. Дрейфовую скорость  $v_d$  в этом случае также можно считать практической постоянной. Интегрируя (2.39) с учетом указанной зависимости для  $v_{\parallel}$ , получаем

$$\Delta r = r - r_0 = \frac{2u_0}{v_{\parallel}} \frac{H_0}{H_{\varphi}} \sqrt{rR_0(1 - \cos \varphi_m)}.$$

Здесь  $\varphi_m$  — значение угла  $\Phi$  в точке отражения. На рис. 2.9 изображена форма траектории в проекции, напоминающая банан. Как нетрудно убедиться, смещение для пролетных частиц значительно превосходит смещение для запретных частиц (в отношении  $\sqrt{2R/r}$  для двух противоположных предельных случаев). Следует отметить, что компенсация дрейфа при движении запретных частиц происходит в результате того, что точки поворота траектории  $M_1$  и  $M_2$  расположены симметрично относительно экваториальной плоскости плазменного витка. Такое расположение точек поворота будет иметь место только при наличии аксиальной симметрии по углу  $\theta$ . В противном случае траектории могут стать незамкнутыми, что должно ухудшать удержание частиц в магнитной системе рассматриваемого типа, которая может служить простейшим примером «замкнутой магнитной ловушки».

В идеальном случае частицы могут уходить из такой ловушки только в результате кулоновских столкновений друг с другом. Вопрос о влиянии кулоновских столкновений на время удержания частиц и сохранение тепловой энергии в замкнутых ловушках будет обсуждаться ниже (см. § 2.17). Здесь мы ограничимся только одним замечанием по указанному поводу. Поскольку при своем движении в магнитном поле запретные частицы сильно отклоняются от линий поля, то кулоновские столкновения быстрее выбрасывают их из магнитной ловушки. Для иллюстрации сравним рис. 2.10, а и б. На рис. 2.10, а показана проекция траектории частицы в однородном магнитном поле до и после столкновения с другой частицей, сопровождающегося относительно небольшим изменением вектора  $v$ . Смещение происходит на расстояние порядка доли ларморовского радиуса.

На рис. 2.10, б показано, как изменяется форма траектории запретной частицы при столкновении в точке  $M_0$ , которое приводит к небольшому повороту вектора скорости с изменением знака:

\* Строго говоря, это справедливо только в области, где  $|v_{\parallel}| < v_{\perp}$ . Поэтому дальнейшие вычисления сохраняют силу лишь при не слишком малых значениях угла  $\Phi$ .

$v_{\parallel} (v_{\parallel} \ll v_{\perp})$ . В этом случае траектория смещается по радиусу  $r$  на расстояние

$$\sim 2\Delta r_m \sim 2r_H (H_0/H_p) (r/R) \sqrt{R/r}.$$

Поскольку  $(H_0/H_p)(r/R) \gg 1$  и  $R/r \gg 1$ , то смещение запертым частицы при столкновении в винтовом поле во много раз превосходит смещение частицы при столкновении в неискривленном магнитном поле и одинаковых значениях импульса и напряженности магнитного поля.

### § 2.3. Адиабатические инварианты движения частиц

#### в магнитном поле

Вернемся к выводу о сохранении магнитного момента  $\mu$  заряженной частицы при движении в слабо меняющемся в пространстве магнитном поле. К этому вопросу можно подойти с более общей точки зрения. В классической механике при описании почти периодического (квазипериодического) движения консервативной системы говорят о некоторых приближенно сохраняющихся величинах — адиабатических инвариантах. Так, например, если у маятника с медленно (адиабатически) меняющейся во времени длиной подвеса  $L$  (простейший случай квазипериодического движения) это изменение за период колебаний невелико, то справедлив закон сохранения адиабатического инварианта:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} v dx, \quad (2.40)$$

где  $v$  — скорость осциллятора;  $x$  — координата, характеризующая его смещение от положения равновесия. Интеграл берется между двумя крайними точками траектории.

В общем случае произвольной консервативной системы, описываемой  $i$  обобщенными координатами  $q_i$  и соответствующими

обобщенными импульсами  $p_i$ , выражение для адиабатического инварианта имеет следующий вид:

$$I_i = \oint p_i dq_i, \quad (2.41)$$

где предполагается, что по координате  $q_i$  имеет место квазипериодическое движение. Таким образом, если система обладает  $N$  степенями свободы и по каждой степени свободы совершается квазипериодическое движение (с медленно по сравнению с периодом меняющимися параметрами), то существуют  $N$  адиабатических инвариантов.

Ларморовское вращение заряженной частицы вокруг силовых линий магнитного поля можно трактовать с этих позиций. В определение адиабатического инварианта (2.41) в случае ларморовского вращения частицы нужно подставить  $p = mv_{\perp}$  и  $dq = r_H d\phi$ , где  $r_H$  — ларморовский радиус частицы, а  $\phi$  — фаза вращения. Тогда  $I_1 = m \int_0^{2\pi} v_{\perp} r_H d\phi = 2\pi m^2 v_{\perp}^2 c/eH = (4\pi/e) mc^2$ , где  $c$  — ларморовский радиус частицы, а  $\phi$  — фаза вращения. Тогда  $\mu = \text{const}$ . Таким образом, видим, что сохранение магнитного момента  $\mu$  заряженной частицы есть следствие общего принципа адиабатической инвариантности.

Первый адиабатический инвариант  $\mu$  можно записать и по-другому:

$$\mu = \pi r_H^2 H (1/2\pi) (e^2/mc^2) = \text{const}, \quad (2.43)$$

что означает сохранение магнитного потока через площадку, ограниченную ларморовской окружностью при вращении частицы в магнитном поле.

Применим к общему случаю движения заряженной частицы в магнитном поле, изменяющемся во времени и пространстве, условию сохранения адиабатической инвариантности магнитного момента  $\mu$  имеют следующий вид:

$$|H/H| \ll \omega_H; |1/H| \text{grad } H | \ll 1/r_H. \quad (2.44)$$

Если заряженная частица заперта между двумя магнитными зеркалами (колеблется вдоль силовых линий, не выходя за пределы ограниченной области пространства), то такому движению также можно сопоставить соответствующий адиабатический инвариант  $I_2 = \int p_{\parallel} v_{\parallel} dl$ . Здесь интеграл берется вдоль силовой линии между двумя точками отражения частицы (где  $v_{\parallel}$  обращается в нуль), причем  $v_{\parallel}$  можно выразить с помощью следующих соотношений:

$$\omega_0 = mv_{\parallel}^2/2 + \omega_{\perp}^2; \omega_{\perp} = \mu H.$$

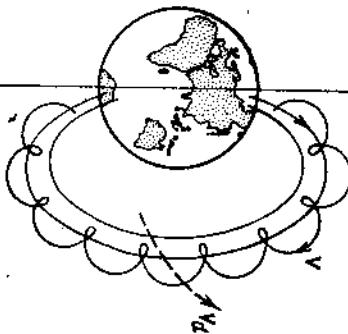
Отсюда находим  $v_{\parallel}$  и, подставляя в формулу для адиабатического инварианта  $I_2$  (назовем его вторым, в отличие от  $\mu$  — первого адиабатического инварианта), получаем

$$I_2 = \oint \sqrt{w_0 - \mu H} dl. \quad (2.45)$$

Рис. 2.10. Изменение траектории частицы при столкновении в однородном (а) и торOIDальном (б) полях

Для выполнения условий сохранения второго адиабатического инварианта движения частицы нужно, чтобы за период одного喬 лебания частицы между магнитными зеркалами магнитное поле вдоль силовой линии изменилось мало. Изменение поля вдоль силовой линии, по которой движется частица, может быть вызвано двумя причинами: 1) пространственной неоднородностью магнитного поля, приводящей к дрейфу частицы попек (при таком дрейфе частица все время переходит с одной силовой линии на другую — с отличающимися, вообще говоря, магнитным полем); 2) изменением общей картины силовых линий из-за нестационарности магнитного поля. В этом последнем случае энергия частицы уже не является интегралом движения, но адиабатический инвариант  $I_2$  сохраняется в обычном смысле.

Рис.



2.11. Движение заряженной частицы в магнитном поле Земли.

Иногда можно говорить и о третьем адиабатическом инварианте движения заряженной частицы в магнитном поле. Такой инвариант соответствует дрейфовому движению частицы поперек силовой линии магнитного поля, если оно носит циклический характер. Так, движение заряженной частицы в изображенном на рис. 2.5 магнитном поле может быть периодическим для дрейфа. Вращаясь вокруг силовой линии и совершая продольные колебания вдоль силовой линии между областями с большим магнитным полем, частица медленно [с дрейфовой скоростью, описываемой выражением (2.22)] обходит сплошную трубку по некоторой поверхности, изображенной на рис. 2.5.

Третий инвариант движения частицы используется в физике плазмы значительно реже первого и второго, поэтому мы не будем здесь вдаваться в детали. Укажем лишь, что роль  $I_3$  играет магнитный поток внутри силовой трубы, охватываемой дрейфовой траекторией частицы (см. рис. 2.5). Магнитный поток в такой силовой трубке сохраняется, если за период обращения частицы со скоростью дрейфа вокруг силовой трубы магнитное поле изменяется мало. Всеми описанными свойствами может обладать движение электронов и протонов в радиационных поясах Земли (рис. 2.11).

Первый адиабатический инвариант — это, естественно, магнитный момент. Второй адиабатический инвариант соответствует движению запертых частиц между магнитными зеркалами, расположенным у полюсов. Третий инвариант соответствует дрейфовому движению частиц в неоднородном магнитном поле Земли. Электроны согласно формуле (2.36), примененной к случаю магнитного поля Земли, дрейфуют с запада на восток, а ионы — в обратном

направлении. Время полного обхода вокруг земного шара при таком дрейфе для частиц, движущихся по силовым линиям с максимальным удалением от центра Земли  $R$ , имеет порядок  $2\pi eR^2/\mu c$ . Это значит, что третий адиабатический инвариант (магнитный поток через поверхность, охватываемую дрейфовой траекторией точки отражения частицы от магнитного зеркала) сохраняется, если магнитное поле мало меняется за время порядка  $2\pi eR^2/\mu c$ .

Большое принципиальное значение в динамике движения заряженных частиц имеет вопрос о точности сохранения адиабатического инварианта. Разберем этот вопрос на примере ю. В этом случае точность сохранения адиабатического инварианта  $\mu$  определяла бы длительность запертого движения частицы между магнитными зеркалами. Как уже говорилось, понятие об адиабатической инвариантности  $\mu$  имеет смысл при условиях (2.44). Естественно было бы ожидать, что сохранение инварианта является результатом разложения по малому параметру  $e^{-|\vec{H}|/\omega_H|H|}$  или  $(r_H/|H|)\text{grad } H$ . Тогда следовало бы ожидать нарушения адиабатической инвариантности с так называемой экспоненциальной точностью  $|\Delta\mu/\mu| \sim \exp(-1/e)$ . Математический аппарат, используемый для доказательства этого утверждения, требует лишь, чтобы функции, описывающие поведение полей, в которых движется частица, были достаточно гладкими по отношению к изменению аргументов  $r$  и  $t$ .

Для иллюстрации обратимся к рассмотренному в § 2.2 движению частицы в однородном магнитном поле и поперечном электрическом поле, включенных при  $t=0$ . Скорость ларморовского вращения частицы в этом случае согласно выражениям (2.9), (2.12), (2.13) равна

$$v_x = \omega_H A \sin \phi_H t - \frac{1}{m\omega_H} \int_0^t \vec{F}(u) \cos \phi_H (t-u) du;$$

$$v_y = \omega_H A \cos \phi_H t + \frac{1}{m\omega_H} \int_0^t \vec{F}(u) \sin \phi_H (t-u) du.$$

Если электрическое поле возрастает по закону  $E(t) = E_0(1 - \exp(-\alpha t))$ , то изменение магнитного момента после включения поля (при  $t \gg 1/\alpha$ ) равно  $\Delta\mu \approx (eAE_0/H)(\alpha/\omega_H)$ . Низкая (порядка  $\alpha/\omega_H$ ) точность сохранения адиабатического инварианта объясняется тем, что изменение электрического поля не является достаточно гладким. Так, производная  $F(t) = eE(t)$  по  $t$  испытывает разрыв при  $t=0$ . Если включить электрическое поле достаточно плавно, ситуация изменится. Пусть, например, напряженность поля

зависит от времени по закону

$$E(t) = (\alpha E_0 / \sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^t \exp(-\alpha^2 \tau^2) d\tau.$$

Такая форма зависимости означает, что «включение» происходит при  $t = -\infty$ , а при  $t \rightarrow \infty$   $E \rightarrow E_0$ . Вычисля входящие в (2.46) интегралы, находим, что при  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \sin \omega_H t - \xi \cos \omega_H t; \\ v_y &= v_0 \cos \omega_H t + \xi \sin \omega_H t, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где  $\xi = (1/2)(eE_0/mv_0) \exp(-\omega_H^2 t^2)$ .

Отсюда  $v^2 = v_0^2 + \xi^2$  и, следовательно,  $\Delta \mu / \mu = \xi^2 / v_0^2 =$

$= (1/4)(e^2 E_0^2 / v_0^2 m^2 \omega_H^2) \exp(-2\omega_H^2 t^2)$ .

Таким образом, изменение адиабатического инварианта в рассмотренном примере с идеально плавным включением действительно оказывается экспоненциально малым.

## § 2.4. Кинетическая теория плазмы в магнитном поле

Поведение ансамбля большого числа заряженных частиц в магнитном поле можно описывать с помощью функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  (для каждого сорта зарядов), которая определяется так же, как и для плазмы в отсутствие магнитного поля. Но в кинетическом уравнении, которому подчиняется такая функция распределения, нужно добавить еще одно слагаемое, учитывающее действие силы Лоренца  $(e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$ . Такое кинетическое уравнение имеет вид

$$\partial f / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla f + (e/m)\{\mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]\}(\partial f / \partial \mathbf{v}) = S(f). \quad (2.48)$$

Это уравнение отличается от кинетического уравнения (1.83) слагаемым  $(e/m)\{\mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]\}(\partial f / \partial \mathbf{v})$  [вместо  $(e/m)\mathbf{E}(\partial f / \partial \mathbf{v})$ ].

Однако может возникнуть вопрос, не изменится ли также характер столкновений между заряженными частицами при наличии магнитного поля. Траектории частиц, пролетающих друг от друга на расстояниях, сравнимых со средним ларморовским радиусом или больших его, в процессе рассеяния будут испытывать также искривление из-за магнитного поля. В результате лебаевской экранировки поля каждого отдельного заряда практически нужно учитывать лишь парные взаимодействия между частицами на расстояниях, меньших лебаевского радиуса.

Отсюда сразу же следует первый вывод: влияние магнитного поля на процесс рассеяния несущественно, если лебаевский радиус  $r_F$  для плазмы меньше среднего ларморовского радиуса частиц  $r_H$

$= mv_T/eH$ , где  $v_T$  — средняя тепловая скорость. В применении к электронам, ларморовский радиус которых в  $\sqrt{m_e/m_i}$  раз меньше, чем у ионов при той же энергии, неравенство  $r_D < r_H$  можно привести к виду

$$\omega_H < \omega_p, \quad (2.49)$$

или

$$H^2/4\pi < nm_e c^2. \quad (2.50)$$

В конкретных условиях экспериментов с плазмой оно соблюдается только при не очень сильных магнитных полях. Однако поскольку более углубленный анализ показывает, что нарушение условия  $\omega_H < \omega_p$  еще не равнозначно сильному влиянию магнитного поля на элементарные акты столкновений. Это связано с тем, что сечение кулоновского рассеяния [см. формулу (1.10)] содержит так называемый кулоновский логарифм  $L_K$ , возникающий, грубо говоря, вследствие обрезания (отбрасывания) столкновений, происходящих на расстояниях, больших  $r_D$ . В силу логарифмической зависимости сечения рассеяния от расстояния, на котором происходит обрезание, величина сечения не слишком чувствительна к параметру обрезания. Следовательно, влиянием магнитного поля на процесс столкновений можно пренебречь, вплоть до таких параметров, при которых выполняется более мягкое условие

$$|\ln \omega_H / \omega_p| < L_K. \quad (2.51)$$

Оно неприменимо лишь для очень экзотических плазм (в чудовищно сильных магнитных полях).

Для теории плазмы выполнение неравенства (2.51) означает, что интеграл столкновений в правой части кинетического уравнения Больцмана сохраняет ту же форму, что и при отсутствии магнитного поля. Естественно, остаются прежними и формулы для длины свободного пробега заряженных частиц, времени между двумя столкновениями и все другие следствия в § 1.3.

Полное самосогласованного поля в общем случае нужно распространять и на магнитное поле. Это значит, что в уравнении Максвелла для магнитного поля

$$\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j} + (1/c)\partial \mathbf{E} / \partial t$$

следует учесть самосогласованный ток  $\mathbf{j}$ , переносимый зарядами плазмы. Поскольку по определению для любого сорта частиц  $n\mathbf{v} = \int v f dv$ , то вклад каждого сорта частиц в плотность тока есть  $n\mathbf{v} = e \int v f dv$  и в итоге  $\mathbf{j} = \sum n_e \int v f_e dv$ , где суммирование проводят по всем сортам частиц.

Для плазмы, состоящей из электронов и однозарядных ионов одного сорта, полная система уравнений кинетической теории с самосогласованным полем имеет вид:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} f_e - \frac{e}{m_e} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = \operatorname{St}(f_e);$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} f_i + \frac{e}{m_i} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = \operatorname{St}(f_i); \quad (2.52)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Эти уравнения, так же как и соответствующие уравнения (1.84), (1.85) для плазмы без магнитного поля, являются основой для исследования динамики и установления уравнений гидродинамического приближения пригодно для описания плазмы, которая простирается на расстояния, значительно превышающие длину свободного пробега  $l$ . Существование магнитного поля в такой плазме по-разному оказывается на ее свойствах в зависимости от соотношения между длиной свободного пробега  $l$  и средним ларморовским радиусом частиц  $r_H$ . Если  $l \ll r_H$  (плотная плазма с относительно низкой температурой, сравнимо небольшая напряженность магнитного поля  $H$ ), то влияние магнитного поля проявляется слабее. В противоположном случае, когда  $l \gg r_H$ , траектория частицы на длине свободного пробега успевает свернуться в винтовую линию. В этом случае можно пользоваться приближенной кинетической теорией плазмы в так называемом дрейфовом приближении. В дрейфовом кинетическом уравнении функция распределения частиц описывает плотность распределения центров лармировских кружков в фазовом пространстве. В данном случае фазовое пространство представляет собой обычное координатное пространство  $\Gamma$  ( $\Gamma$  — радиус-вектор центра лармировского кружка),  $v_{\parallel}$  — скорость движения заряда вдоль силовой линии магнитного поля;  $\mu$  — магнитный момент частицы.

Такое фазовое пространство описывается лишь пятью независимыми переменными вместо шести  $(\Gamma, \mathbf{v})$ . Левая часть дрейфового кинетического уравнения представляет собой уравнение непрерывности для функции  $f(\Gamma, v_{\parallel}, \mu)$  в этом упрощенном фазовом пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_{\Gamma} (\mathbf{u} df) + \frac{F_{\parallel}}{m} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = \operatorname{St}\{f\}. \quad (2.53)$$

Здесь скорость  $\mathbf{u}_d$  имеет компоненту  $v_{\parallel}$  вдоль силовой линии магнитного поля, а скорость движения попечь магнитного поля определяется уравнениями дрейфового движения с учетом всех возможных типов дрейфа. Составляющая силы  $F_{\parallel}$ , действующая вдоль магнитной силовой линии, задается уравнением (2.21). Интеграл столкновений при описании плазмы в дрейфовом приближении необходимо преобразовать к новым переменным  $v_{\parallel}, \mu$  вместо  $v$ .

При вычислении плотности тока в такой плазме нужно соблюдать некоторую осторожность. Дело в том, что ток  $\mathbf{j}_d = \eta \mathbf{u}_d$ , создаваемый перемещением центров лармировских кружков, не описывается полного переноса заряда. Существует еще дополнительный ток даже при покоящихся центрах лармировских кружков, обусловленный их диамагнитным моментом  $\mu$ . При равномерном распределении диамагнетиков со средним моментом  $\bar{\mu}$  и плотностью  $n$  в пространстве обтекающий ток возникает лишь на границе. Он приводит к ослаблению магнитного поля на величину  $\Delta H = 4\pi n \bar{\mu}$ . При неоднородном распределении в пространстве возникает и объемный ток. Его плотность  $j_0$  определяется из уравнения

$$\operatorname{rot} \Delta \mathbf{H} = \operatorname{rot} 4\pi n \bar{\mu} = 4\pi j_0 / c. \quad (2.54)$$

Это есть искомый дополнительный ток. С помощью функции распределения представим его в следующем виде:

$$\mathbf{j}_D = c \operatorname{rot} \int \mu f d\mathbf{v}, \quad \mu = -\mu \mathbf{H} / H. \quad (2.54a)$$

Единичный вектор  $-\mathbf{H} / H$  означает, что магнитные моменты частиц ориентированы против поля.

Вернемся к условию  $l \gg r_H$ , выделяющему область скольжения магнитного поля на траектории частиц в плазме и, следовательно, на всю кинетику плазмы в целом. Учитывая, что  $l = v_{\parallel} \tau$  и  $\tau = v_{\parallel} / \omega_H$ , где  $\tau$  — время свободного пробега, условие  $l \gg r_H$  можно представить в виде

$$\omega_H \tau \gg 1. \quad (2.55)$$

Неравенство (2.55) называют критерием замагниченности плазмы, а плазму, удовлетворяющую этому критерию, называют замагниченной. Оно требует дополнительной конкретизации для электронов и ионов. При одинаковых температурах и длинах свободного пробега имеем

$$\omega_H \tau_e = (m_i/m_e)^{1/2} \omega_H \tau_i.$$

Поэтому для одной и той же плазмы электроны могут быть «замагниченны», а ионы нет. Как раз такая ситуация часто осуществляется в низкотемпературных плазмах замагниченных ионами, а ионы нет. Как раз такая ситуация часто осуществляется в низкотемпературной плазме МГД-генераторов. В высокотемпературных или достаточно разреженных плазмах замагничены ионы, а ионы нет. Как раз такая ситуация часто осуществляется в плазме в магнитных термоядерных ловушках, в верхних слоях ионосферы, в магнитосфере Земли, солнечной короне, в газовых разрядах при низком давлении.

Во многих представляющих интерес случаях процессы, протекающие в плазме, охватывающие промежутки времени, меньше времени соударения, но значительно превышающие период лармировского оборота частиц в магнитном поле. При этом можно пре-

бречь парными соударениями частиц, т. е. опустить интеграл столкновений в правой части дрейфового кинетического уравнения (2.53). Тогда оно описывает поведение своеобразной бесстолкновительной плазмы в магнитном поле. Подобная модель часто используется для исследования колебаний и волн в плазме и для анализа некоторых важных неустойчивостей плазмы в магнитном поле.

### § 2.5. Гидродинамика плазмы в магнитном поле

Гидродинамическое приближение для плазмы в магнитном поле можно получить так же, как это было сделано в § 1.5 для плазмы без магнитного поля.

При рассмотрении плазмы, свойства которой меняются на расстояниях  $L_p$ , значительно больших длин свободного пробега  $l$  за промежутки времени  $\tau_p$ , большие времени свободного пробега, функции распределения ионов и электронов следует считать близкими к максвелловским. В такой плазме состояние каждой заряженной компоненты задается плотностью  $n(\mathbf{r}, t)$ , температурой  $T(\mathbf{r}, t)$  и средней макроскопической скоростью  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Уравнения для этих величин, т. е. уравнения гидродинамики, выводятся, как и в § 1.5, нахождением моментов от кинетического уравнения (2.52). Эти вычисления аналогичны вычислениям, проведенным в § 1.10, поэтому их не стоит повторять. Нужно лишь учесть, что кинетическое уравнение (2.52) содержит дополнительное слагаемое в правой части с силой Лоренца

$$(e/mc)[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] (\partial f / \partial \mathbf{v}). \quad (2.56)$$

Простое интегрирование по  $d\mathbf{v}$  (нулевой момент) этого слагаемого дает нуль. Это и не удивительно, так как сила Лоренца не может изменить баланс числа частиц, учитываемый уравнением непрерывности:  $\partial n / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{n} \mathbf{v} = 0$ .

В уравнении Эйлера, получающемся при вычислении момента первого порядка — умножении на  $\mathbf{v}$  и последующем интегрировании по  $d\mathbf{v}$  (по частям) член с силой Лоренца дает

$$\int \frac{\mathbf{v} \cdot e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = -\frac{e}{mc} \int [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] f d\mathbf{v} = -\frac{e}{mc} n [\mathbf{u} \times \mathbf{H}].$$

Это есть не что иное, как средняя сила Лоренца, действующая на все частицы одного сорта в единице объема. Итак, в старом уравнении Эйлера для плазмы без магнитного поля (1.102) добавляется слагаемое  $(e/c)n[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]$  в правой части:

$$nm_i(d\mathbf{u}_i/dt) = -\operatorname{grad} p_i + en\mathbf{E} + (e/c)n[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]. \quad (2.57)$$

Уравнение для температуры остается неизменным, если не учитывать возможного изменения теплопроводности. Таким образом, каждая заряженная компонента плазмы в гидродинамическом приближении описывается системой уравнений (1.100), (1.106) и (2.57). Учтем теперь столкновения между частицами разного сорта.

Так же как и в § 1.10, это дает силу взаимного трения между компонентами плазмы в уравнениях Эйлера. Тогда уравнения движений двухжидкостной гидродинамики для квазинейтральной плазмы, состоящей из электронов и такого же числа ионов одного сорта ( $n_i = n_e = n$ ), принимают вид

$$nm_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\nabla p_i + en\mathbf{E} + \frac{e}{c} n [\mathbf{u}_i \times \mathbf{H}] - m_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \mathbf{v}_{ei} \mathbf{B}. \quad (2.58)$$

По отношению к этим уравнениям справедливо замечание, сделанное в § 1.10 в связи с анализом гидродинамического приближения в теории плазмы. По существу для упрощенного вывода уравнений динамики плазмы в гидродинамическом приближении как в отсутствие, так и при наличии магнитного поля нет нужды в использовании аппарата кинетических уравнений, поскольку имеем здесь дело с простым применением самых общих законов динамики к движению микроскопических элементов обеих компонент плазменной субстанции.

Переход к описанию плазмы как единой жидкости можно провести, складывая уравнения (2.58) и (2.59). При этом обычно преобразуют инерциальную электропроводность, а суммарная электрическая сила, действующая на элемент объема плазмы, обращается в нуль из-за квазинейтральности. Также исчезает сумма противоположно направленных и равных по величине сил трения между ионами и электронами. Сумма сил Лоренца  $(en/c)[(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \times \mathbf{H}]$  приводится к виду  $(1/c)[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$  (сила Ампера), так как  $en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = \mathbf{j}$ .

В результате уравнение Эйлера одножидкостной гидродинамики плазмы в магнитном поле (если чаще называют магнитной гидродинамикой) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} nM\dot{\mathbf{d}\mathbf{u}}/dt &= (1/c)[\mathbf{j} \times \mathbf{H}] - \operatorname{grad}(p_i + p_e); \\ \mathbf{u} &= (m_i \mathbf{u}_i + m_e \mathbf{u}_e)/(m_i + m_e); \\ M &= m_i + m_e. \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Плотность тока  $\mathbf{j}$  можно выразить через  $\mathbf{H}$  из уравнения Максвелла  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}$ . Использив  $\mathbf{j}$ , силу Ампера можно представить в виде

$$(1/c)[\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = (1/4\pi)[\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}].$$

Векторное произведение в правой части удобно раскрыть с помощью известного векторного тождества

$$(1/2)\operatorname{grad} \mathbf{a}^2 = (\mathbf{a} \operatorname{grad})\mathbf{a} + [\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}].$$

В применении к рассматриваемому случаю это дает

$$(1/4\pi)[\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}] = -\operatorname{grad} H^2/8\pi + (1/4\pi)(\mathbf{H} \operatorname{grad})\mathbf{H}. \quad (2.61)$$

Первый член в правой части уравнения (2.61) можно интерпретировать как градиент магнитного давления  $H^2/8\pi$ . Второй член

называют силой натяжения силовых линий магнитного поля. Он отличен от нуля только для магнитного поля с кривыми силовыми линиями. Соответствующая ему сила всегда оказывается направлена в сторону, противоположную искривлению силовой линии.

В магнитной гидродинамике неизвестными величинами являются плотность  $n$ , скорость  $\mathbf{u}$ , давление  $p$  и магнитное поле  $\mathbf{H}$ . Число уравнений для определения этих величин должно соответствовать числу самих неизвестных функций. Три уравнения (для определения  $n$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ) у нас есть. Это уравнение непрерывности для  $n$ , уравнение Эйлера для  $\mathbf{u}$  (2.60) и уравнение состояния для давления.

Недостающее уравнение для магнитного поля выводится по следующей схеме. Нужно воспользоваться уравнением Максвелла tot  $\mathbf{E} = -(\mathbf{1}/c)(\partial \mathbf{H}/\partial t)$  и подставить в него электрическое поле  $E$ , выраженное через плотность тока с помощью закона Ома. Но при наличии магнитного поля связь между  $j$  и  $E$ , т. е. закон Ома, отличается от результата, полученного в ч. 1.

Для того чтобы выяснить характер связи в общем случае, обратимся снова к уравнениям, характеризующим поведение обеих компонент плазмы. Умножая уравнения (2.58) на  $m_e$  и (2.59) на  $m_i$  и вычитая одно из другого, получаем

$$-\frac{e}{c} n [(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \times \mathbf{H}] + \text{grad } p_e - \frac{en}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] = 0. \quad (2.62)$$

В правой части этого выражения отброшены члены порядка  $m_e/m_i$ , а в левой — инерционные члены, поскольку предполагается, что заметное изменение плотности тока может происходить лишь за времена  $t_p \gg t_e$  и на расстояниях  $L_p \gg l$ . Теперь удобно представить (2.62) в следующем виде:

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \left[ \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{H} \right] \right) - \frac{\sigma}{en} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] + \frac{\sigma}{en} \text{grad } p_e. \quad (2.63)$$

Это соотношение является обобщением закона Ома для плазмы, находящейся в магнитном поле. В частности, когда ток течет параллельно магнитному полю и плазма является однородной (т. е. градиент давления отсутствует), соотношение (2.63) совпадает с выведенным в предыдущей главе соотношением (1.21) с той лишь разницей, что  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]$ . Однако в общем случае уравнение для  $\mathbf{j}$  отличается от простого закона Ома дополнительными членами в правой части, из которых первый пропорционален градиенту электронного давления, а второй поддерживает векторное произведение  $[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ . Эти дополнительные члены имеют простое физическое истолкование. В выражении для  $\mathbf{j}$  появляется величина  $(e/m_e v_{te}) \nabla p_e$ , так как ток в ионизованном газе может быть вызван не только электрическим полем, но также и разностью электронных давлений в различных точках пространства. Член, содержащий  $[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ , свидетельствует о влиянии магнитного поля на движение электронов в плазме.

Из-за указанных дополнительных членов между плотностью тока и напряженностью электрического поля нет простой связи. При заданных значениях  $\mathbf{E}'$  плотность тока может иметь самые различные значения. Эта неопределенность существенно ослабляется в том случае, когда плазма находится в квазистационарном состоянии, т. е. при  $dn/dt = 0$ .

В квазистационарном состоянии основные уравнения (2.60) и (2.63) принимают вид

$$\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = \text{grad } p; \quad (2.64)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \frac{1}{ne} \text{grad } p_e \right). \quad (2.65)$$

Сделав естественное допущение о том, что  $\text{grad } p_e$  и  $\text{grad } p_i$  направлены параллельно друг другу, находим из (2.64), что  $\text{grad } p_i \perp \mathbf{j}$ . Обращаясь к (2.65), видим, что вектор  $\mathbf{E}'$  должен иметь две взаимно перпендикулярные компоненты  $E'_{\parallel}$  и  $E'_{\perp}$ , из которых

$$\mathbf{E}'_{\parallel} \parallel \mathbf{j}, \text{ а } \mathbf{E}'_{\perp} \parallel \text{grad } p_i.$$

Из (2.65) находим, что  $\mathbf{j}_{\parallel} = \sigma \mathbf{E}'_{\parallel}$ . Следовательно, для компоненты  $\mathbf{j}_{\parallel}$  справедлив закон Ома. Компонента  $\mathbf{E}'_{\perp}$  не создает тока. Она уравновешивает градиент ионного давления

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \text{grad } p_i/ne. \quad (2.66)$$

Неколлинеарность векторов  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{j}$  приводит к эффекту Холла — помыванию составляющей тока, перпендикулярной к электрическому полю.

Физический смысл этих результатов можно разъяснить на основе простых соображений. Ввиду того, что ток создается электронами, сила  $[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ , действующая на плазму со стороны магнитного поля, приложена к электронному газу. Эта сила, в частности, создает перепад электронного давления  $p_e$ . Из-за условия квазинейтральности  $p_i$  следует за изменением  $p_e$ . Однако градиент  $p_i$  может поддерживаться только в том случае, если существует сила, meshающая выравниванию ионных давлений. Она должна быть направлена так же, как  $\text{grad } p_i$ , т. е. перпендикулярно к  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{H}$ . Такой силой как раз и является компонента электрического поля  $\mathbf{E}'_{\perp}$ . Она обеспечивает сохранение квазинейтральности плазмы, не давая ионам оторваться от электронов. Для этой компоненты закон Ома, очевидно, не имеет смысла. Если плазма неподвижна (статический случай), то по отношению к компоненте электрического поля, параллельной току, справедлив закон Ома в обычной форме:  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'_{\parallel}$ .

Для того чтобы исключить электрическое поле из уравнений магнитной гидродинамики, возьмем от обеих частей уравнения

ния (2.63):

$$\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{1}{n} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] + \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{1}{n} \operatorname{grad} p_e. \quad (2.67)$$

Далее, используя  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -(1/c) (\partial \mathbf{H} / \partial t)$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j} / c$ , получаем недостающее уравнение для магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \frac{1}{n} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}] - \frac{c}{e\mu} [\operatorname{grad} n \times \operatorname{grad} T_e] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}. \quad (2.68)$$

Это уравнение можно привести к более симметричному виду, если с помощью уравнения Эйлера исключить второе слагаемое справа и учесть, что  $\operatorname{rot} d\mathbf{u} / dt = \partial \operatorname{rot} \mathbf{u} / \partial t - \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}]$ .

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{H} + \frac{Mc}{e} \operatorname{rot} \mathbf{u} \right) = \operatorname{rot} \left[ \mathbf{u} \times \left( \mathbf{H} + \frac{Mc}{e} \operatorname{rot} \mathbf{u} \right) \right] + \frac{c^2}{en} [\operatorname{grad} n \times \operatorname{grad} T_e] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}. \quad (2.69)$$

Член, содержащий  $[\operatorname{grad} n \times \operatorname{grad} T_e]$ , обычно не играет важной роли, за исключением тех случаев, когда плотность и температура зависят от координат совершенно по-разному. Для простоты не будем его учитывать. Последнее слагаемое в правой части этого уравнения описывает процесс своеобразной диффузии магнитного поля. Отложим на время обсуждение этого явления и рассмотрим случай, когда проводимость плазмы достаточно высока и этим членом можно пренебречь. Тогда уравнение (2.69) является обобщением известного уравнения переноса  $\operatorname{rot} \mathbf{u}$  из обычной гидродинамики — так называемого уравнения «прикрепленности» линий вихря скорости  $\mathbf{k}$  веществу. В достаточно большом магнитном поле  $eH/Mc \gg u/L_p$  уравнение упрощается:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}. \quad (2.70)$$

Именно это уравнение часто используется вместо четвертого, недостающего уравнения магнитной гидродинамики. В частном случае плоского движения, когда магнитное поле имеет лишь одну компоненту, например  $H_z$ , зависящую от двух координат  $x$  и  $y$ , а скорость  $\mathbf{u}$  имеет только компоненты  $u_x$  и  $u_y$ , уравнение (2.70) приобретает вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_x H_z) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y H_z) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) H_z, \quad (2.71)$$

запоминающий уравнение непрерывности для плотности при плоском движении (если отвлечься от правой части).

Уравнение (2.70) называют уравнением «вмороженности» для магнитного поля. Рассмотрим это явление подробнее. Плазма — хороший проводник. Поэтому если она быстро движется, пересекая силовые линии магнитного поля, то появляются индуцированные токи, которые изменяют распределение напряженности магнитного поля. Общий характер этого изменения таков, как будто при своем движении плазма увлекает вместе с собой линии поля. Линии поля ведут себя так, как будто они были «вморожены» в плазму (или склеены с ней).

Для того чтобы лучше понять, в чем состоит это явление, рассмотрим частный случай движения плазмы. Пусть плазма заполняет объем, в котором создано магнитное поле, направленное параллельно оси  $z$ . При этом напряженность поля изменяется по некоторому закону в плоскости, перпендикулярной к направлению  $z$ , т. е. в плоскости  $xy$ . Концентрация плазмы постоянна вдоль силовых линий, но также может быть функцией координат  $x$  и  $y$ .

Предположим, что плазма движется перпендикулярно к силовым линиям. Выделим мысленно в пространстве тонкий столбик плазмы, параллельный  $\mathbf{H}$ . Пусть площадь его сечения плоскостью  $xy$  равна  $dS$ . При движении плазмы выделенный столбик испытывает сжатие или расширение, в результате чего его поперечное сечение изменяется. Поскольку полное число частиц внутри столбика должно сохраняться, справедливо соотношение  $ndS = \text{const}$ . Кроме того, должно оставаться постоянным также значение магнитного потока, проходящего через сечение  $dS$ . В плазме с достаточно хорошей электропроводностью даже незначительное изменение магнитного потока, если оно происходит быстро, приведет к возникновению большого индукционного тока. Магнитное поле этого тока скомпенсирует изменение потока. Сохранение потока означает, что  $HdS = \text{const}$ .

Из сказанного выше следует, что в рассматриваемом случае при движении плазмы отношение  $H/n$  остается постоянным. Если плазма сжимается, то напряженность поля в ней возрастает, расширение плазмы влечет за собой ослабление магнитного поля. Переопределение плотности в результате быстрых деформаций приводит к соответствующему изменению распределения напряженности поля в пространстве. В этой связи между деформациями плазмы и поля, вытекающей из сохранения магнитного потока в движущемся материальном элементе объема, и заключается врожденность силовых линий.

Нужно, однако, отметить, что постоянство отношения  $H/n$  не является законом: оно имеет место только в том конкретном случае, о котором говорилось выше. При других геометрических условиях соотношение между напряженностью поля и конгруэнтной в быстро движущейся плазме может иметь иную форму. Так, например, в аксиально-симметричной плазменной струе, движущейся под действием электродинамических сил, обусловленных током, который проходит через плазму (рис. 2.12) в каждом элементе объема, который проходит через плазму (рис. 2.12) в каждом элементе объема,

ема во время его движения остается постоянным отношение  $H/nr$ , где  $r$  — расстояние от данного элемента объема до оси системы.

Еще одно замечание может оказаться полезным. В мороженность силовых линий не следует считать явлением, специфически связанным со свойствами плазмы. Аналогичный эффект будет наблюдаться в любом хорошем проводнике, движущемся в магнитном поле с достаточно высокой скоростью. Вообще уравнениям магнитной гидродинамики подчиняется не только движение плазмы в магнитном поле, но и движение любой другой газообразной или жидкой среды, обладающей способностью проводить электрический ток. Примером таких сред могут служить расплавленные металлы. Классические опыты Альвена по магнитной гидродинамике были проведены с жидким ртути.

Теперь вернемся к исходному уравнению (2.70) и разберемся в механизме «диффузии» магнитного поля, описываемой правой частью этого уравнения. Как мы уже отмечали, явление вмороженности магнитного поля связано с возникновением индукционных токов, сопровождающих движение плазмы. Сколько бы велика ни была проводимость плазмы, за достаточно большой промежуток времени должна проявиться диссилия (затухание) этих токов из-за конечного сопротивления. Это, разумеется, должно привести к изменению магнитного поля. Так, например, если из-за деформации сжатия в какой-либо силовой трубке внутри плазмы было создано стужение силовых линий магнитного поля, то в конце концов в результате затухания индукционных токов магнитное поле ослабляет. Можно сказать, часть силовых линий уйдет наружу. Этот процесс, как следует из уравнения (2.70), носит диффузионный характер. Соответствующий коэффициент диффузии магнитного поля пропорционален удельному электрическому сопротивлению плазмы  $D_M = c^2/4\pi\sigma$ \*. Часто этот коэффициент называют коэффициентом магнитной вязкости и обозначают символом  $\eta_m$ . Происхождение этого термина связано с аналогией между диффузией магнитного поля и вязким просачиванием гидроудинамики из-за обычной вязкости.

Помимо некоторых итогов анализа роли магнитного поля в гидродинамике плазмы. В уравнении движения появляются дополнительные силы, связанные с магнитным полем [см. уравнение

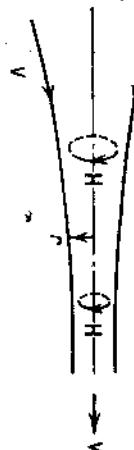


Рис. 2.12. Вмороженность магнитного поля в плазме аксиально-симметричной струи

(2.57)]. Видоизменяется закон Ома для плазмы в магнитном поле:

электропроводность плазмы остается неизмененной лишь для электрического тока, текущего вдоль силовых линий магнитного поля; попечевые же магнитному полю токи могут сильно изменяться (в частности, возникает эффект Холла), если выполнено условие  $\Phi_H \gg 1$ , иначе говоря, если плазма «замагничена».

Зависимость электропроводности плазмы от магнитного поля — это лишь частный случай влияния магнитного поля на коэффициенты переноса. Если средний ларморовский радиус частиц плазмы меньше длины свободного пробега, то все явления переноса в плазме попек магнитного поля заторможены. Это относится, например, к теплопроводности плазмы попек силовых линий магнитного поля. Области с различными температурами могут сосуществовать в такой плазме рядом друг с другом, поскольку частицы совершают ларморовское вращение вокруг силовых линий магнитного поля, перемещаясь в направлении градиента температуры на величину порядка  $r_H$  при редких соударениях (это свойство плазмы, поменянной в магнитное поле, используется в так называемой магнитной термозолии).

При некоторых условиях влияние магнитного поля оказывается еще более кардинальным. До сих пор мы считали, что гидродинамическое приближение (так же, как и в случаях без магнитного поля) справедливо лишь для плазмы с характерным масштабом пространственного изменения  $L_p$ , значительно превышающим длину свободного пробега:  $L_p \gg l$ . Представим себе теперь плазму с очень большой длиной свободного пробега  $l \gg L_p$ . Гидродинамическое описание такой плазмы в обычном смысле может показаться недопустимым. Действительно, в этом случае будет происходить свободный обмен частицами между областями с различными начальными концентрациями и температурами. В результате возникает состояние с функцией распределения, представляющей собой как бы случайную смесь различных максвелловских функций, и ни о какой температуре каждой локальной области говорить нельзя. Только в результате достаточно частых столкновений, которые мы учитывали при выводе гидродинамических уравнений, перемещение частиц затормаживается и восстанавливается локальное максвелловское распределение. Оказывается, с первой из этих задач с успехом может справиться также и сильное магнитное поле (даже когда нет столкновений). Конечно, это свойство магнитного поля относится только к движению частиц попек магнитных силовых линий.

Таким образом, магнитное поле при полном отсутствии соударений приводит к возможности реализации своеобразного гидродинамического приближения для плазмы при ее движении попек магнитных силовых линий. Условием применимости такой гидродинамики должно быть, как можно ожидать по аналогии с обычным случаем, следующее соотношение:

\* Основная связь между коэффициентом диффузии магнитного поля и известной формулой для глубины скин-слоя. Предположим, что на границе проводящей среды приложено переменное магнитное поле частоты  $\omega$ . Тогда за первый колебаний поле успеет прондиффундировать на глубину  $\delta \sim (D_M/\omega)^{1/2} = (c^2/4\pi\sigma)^{1/2}$ , т. е. на глубину скин-слоя.

(здесь роль длины свободного пробега играет средний лармовский радиус). В этой физической картине гидродинамические свойства плазмы не распространяются на ее движение вдоль силовых линий магнитного поля, так как частицы могут свободно перемещаться вдоль  $\mathbf{H}$ . Поэтому магнитная гидродинамика плазмы при условии  $L_p \gg r_{gi}$  (иногда ее называют бесстолкновительной гидродинамикой) имеет смысл лишь когда речь идет о движении плазмы попереck  $\mathbf{H}$ . Так же, как и в обычной магнитной гидродинамике, силовые линии магнитного поля при движении бесстолкновительной плазмы переносятся вместе с ней, изменение плотности  $r = r(r)$ .

Эту связь можно найти из следующих простых соображений. Рассмотрим плазму внутри элементарной силовой трубы. Пусть первоначально давление плазмы было равно  $p$ , температура  $T$ , плотность  $n$ , а магнитное поле внутри силовой трубы  $\mathbf{H}$ . Если в процессе эволюции состояния плазмы происходит сжатие (расширение) за время, значительно превышающее период обращения ионов в магнитном поле, то сохраняется магнитный момент  $\mu = \omega_1 H$  каждой частицы (вследствие адабатической инвариантности). Это автоматически означает, что остается неизменным также и средний магнитный момент  $\bar{\mu} = T_{\perp}/H$  (приходящий из одиу частицу плазмы). Иначе говоря, температура плазмы меняется пропорционально  $H$ . Из-за вмороженности магнитного поля  $H = \mu/n$ , поэтому для давления плазмы получаем  $nT_{\perp} = \mu^2$ , т. е. по-

казатель адабаты для плазмы в магнитном поле  $\gamma_{\perp} = 2$ , если в процессе изменения состояния плазмы совсем не происходит столкновений. При очень мелких процессах столкновения успевают погасить разность температур вдоль и попереck  $\mathbf{H}$ , вследствие чего показатель адабаты даже для очень разреженной высокотемпературной плазмы становится равным  $5/3$ .

С такой гидродинамикой (при условии  $r \gg L_p$ ) часто приходится иметь дело в физике высокотемпературной плазмы, в магнитосфере Земли и т. п.

## § 2.6. Колебания и волны в плазме

### с магнитным полем

Упругие свойства плазмы, помещенной в магнитном поле, во-обще говоря, существенно меняются. Это должно следовать из того, что изменяется характер движения частиц плазмы в поле волны, иначе говоря, отклик частичек плазмы на поле волны. С этой точки зрения удобно разделить все типы колебаний и волн плазмы на два класса: 1) волны, в которых частицы совершают колебания практически вдоль направления магнитного постоянного поля, т. е. волны с  $\mathbf{j} \parallel \mathbf{H}_0$ , и 2) волны, в которых главную роль играют токи,

текущие попереck направления внешнего магнитного поля  $\mathbf{j} \perp \mathbf{H}_0$ . Это условное деление само по себе означает, что волновые свойства плазмы в магнитном поле неизотропны.

Таким образом, в плазме, помещенной в магнитном поле, должна существовать электромагнитная волна с электрическим вектором вдоль  $\mathbf{H}_0$ , т. е. с  $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_0$ , имеющая тот же закон дисперсии (1.45), что и электромагнитные волны в изотропной плазме (обычновенная волна), а также электростатическая волна с  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$  и законом дисперсии (1.36).

Для волн, распространяющихся под углом к магнитному полю, деление на электростатические и электромагнитные, проведенное в первой части книги, уже не является строгим. Ниже показано, что волны являются электростатическими только в пределе больших показателей преломления  $N = kc/\omega \gg 1$ . Дисперсионные характеристики электростатических волн, вообще говоря, менее всего чувствительны к постоянному магнитному полю.

Если частота таких колебаний значительно превышает лармовскую частоту электронов  $\omega_e = eH_0/m_e c$ , то магнитное поле не успевает оказывать заметное воздействие на быстрое колебательное движение электронов. Условие пренебрежимой малости влияния магнитного поля в этом случае имеет, очевидно, вид  $\omega_e \gg \omega_m$ . Для большинства практических приложений это действительно так. Для ионно-звуковых колебаний из условия преобладания влиянием магнитного поля,казалось, бы, должно следовать, что  $\omega \gg \omega_m$ , очевидно. Это было бы очень жестким ограничением на величину магнитного поля. Однако в условии  $\omega \gg \omega_m$  под частотой  $\omega$  следует понимать истинную частоту ионно-звуковой волны в системе отсчета, движущейся вместе со «средним» электроном  $\omega + kv$ .

Второе слагаемое значительно больше первого, так как тепловая скорость электронов существенно превышает фазовую скорость ионно-звуковых колебаний. Отсюда можно заключить, что магнитное поле не влияет заметно на ионно-звуковые колебания, даже при попереckном распространении, если  $k_{te} \gg \omega_m$ . В противоположном предельном случае звуковые колебания могут существенно изменить свой характер в присутствии магнитного поля. Так, например, если звук малой частоты распространяется попереck магнитного поля, то каждое сжатие или разрежение плазмы должно приводить к сжатию или разрежению силовых трубок. Магнитное поле сообщает плазме дополнительную упругость, что приводит к увеличению скорости звука. Для частот, значительно меньших ионной лармовской частоты, скорости распространения этих волн (их принято называть магнитозвуковыми) можно найти, используя соотношение  $c_S = \sqrt{\rho_0 r_0 / \rho}$ , в котором, однако, для  $\rho$  нужно взять сумму давления плазмы и давления магнитного поля  $\rho_m = H^2/8\pi$ .

При дифференцировании надо учсть, что вследствие вмороженности магнитное поле  $H$  пропорционально  $\rho$ . Следовательно,  $dH/d\rho = H^2/4\pi\rho$  и

$$d\rho_m/d\rho = H^2/4\pi\rho.$$
(2.73)

Определение давление плазмы, следует учесть, что при медленных звуковых колебаниях ( $\omega \ll \omega_{\text{они}}$ ) в бесстолкновительной плазме

у каждой частицы относительное  $W_L/H$  сохраняется постоянным. Следовательно, «температура»  $T_\perp$ , определяющая среднее значение кинетической энергии для движения перпендикулярно к силовым линиям, должна при звуковых колебаниях изменяться пропорционально  $H$ . Пусть  $\rho$  обозначает давление плазмы. Оно равно  $n(T_i + T_e)$ . Эта величина пропорциональна  $\rho H$ , а так как  $H \sim \rho$ , то давление должно быть пропорционально  $\rho^2$ . Следовательно,

$$\partial p / \partial \rho = 2p/\rho = 2(T_i + T_e)/m_i. \quad (2.73a)$$

Пользуясь (2.73) и (2.73a), можно написать следующее выражение для скорости магнитозвуковых волн:

$$c_m^2 = 2(T_i + T_e)/m_i + H^2/4\pi\rho. \quad (2.74)$$

В тех случаях, когда газокинетическое давление плазмы значительно меньше магнитного давления (такую плазму иногда называют «холодной»), в выражении (2.74) можно пренебречь первым членом, и скорость звуковых волн оказывается совпадающей с так называемой альвеновской скоростью  $v_A = H/\sqrt{4\pi\rho}$ .

Разумеется, полученные из наглядных соображений свойства низкочастотных магнитозвуковых колебаний можно было бы доказать прямыми вычислениями, линеаризуя уравнения магнитной гидродинамики, подобно тому как это делалось при рассмотрении колебаний плазмы в гидродинамическом приближении. Такие выкладки оказываются необходимыми, если интересоваться свойствами магнитного звука при частотах, сравнимых или превышающих частоты физ. В приближении «холодной» плазмы, т. е. когда тепловое движение ионов и электронов в волне, распространяющейся под рабочим магнитным полем, не учитывается, выкладки оказываются неложными. Прежде всего запишем линеаризованные уравнения движения ионов и электронов в поле волны сжатия:

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 + H_z \exp(-i\omega t + ikx); \\ E &= (E_x, E_y, 0) \exp(-i\omega t + ikx); \\ -m_i \omega u_{xi} &= eE_x + (e/c) u_{yi} H_0; \\ u_{ys} &= -cE_x/H_0 + i(\omega/\omega_{He})(cE_y/H_0); \\ m_i \omega u_{yi} &= eE_y - (e/c) u_{xi} H_0; \\ u_{xe} &= cE_y/H_0 + (i\omega/\omega_{He})(cE_x/H_0). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Далее учтем уравнения Максвелла для компонент поля волны

$$\begin{cases} ikE_y = +i(\omega/c)H_z; \\ -ikH_z = (4\pi/c)n_e(u_{yi} - u_{xe}). \end{cases} \quad (2.76)$$

Считая плазму квазинейтральной ( $n_i = n_e = n$ ), нетрудно прийти к выводу, что  $u_{xi} = u_{xe} = u_x$ , а уравнение непрерывности принимает

вид

$$-\omega n + iku_x u_0 = 0. \quad (2.77)$$

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2/k^2 = (H_0^2/4\pi\rho)(\omega_{pe}^2/c^2)/(k^2 + \omega_{pe}^2/c^2).$$

(в пренебрежении поправками порядка  $m_e/m_i$ ).

Фазовая скорость от значения  $H/\sqrt{4\pi\rho}$  при малых частотах с ростом  $\omega$  уменьшается до нуля при частоте  $(\omega_{He}\omega_{Hi})^{1/2}$ . Дисперсионная кривая для этого типа колебаний для наглядности показана на рис. 2.13. Отклонения от линейного закона дисперсии начи-

наят сущесвенно проявляясь при  $k \rightarrow 0_{pe}/c$ . Закон дисперсии магнитного звука по форме напоминает зависимость  $\omega(k)$  для ионного звука. Но вместо дебаевского радиуса здесь присутствует характерная длина  $c/\omega_{pe}$ , предельно возможной являемся частота  $(\omega_{He}\omega_{Hi})^{1/2}$ .

Волновые процессы при частотах, близких к гибридной, вообще играют важную роль в физике плазмы. В частности, в магнитозвуковой волне при  $\omega \rightarrow (\omega_{He}\omega_{Hi})^{1/2}$  кинетическая энергия колебательного движения ионов (продольного, т. е. в направлении распространения звука) сравнивается по порядку величин с кинетической энергией электронов, которую они приобретают в результате электрического дрейфа  $v_d = -cE_x/H_0$  (вдоль оси  $y'$ ).

Все это справедливо для плазмы в не слишком сильном магнитном поле  $H^2/8\pi \gg n_0 m_e c^2$ . В такой плазме состояния в магнитозвуковой волне оказывается квазинейтральным. Однако при очень сильных магнитных полях

$$H^2/8\pi \gg n_0 m_e c^2 \quad (2.78)$$

для высоких частот становится существенным отступление от квазинейтральности. Закон дисперсии для таких колебаний имеет вид (пять-таки при пренебрежении тепловым движением)

$$\omega^2/k^2 = (H_0^2/4\pi\rho) \left( \frac{4\pi\rho}{H_0^2} \omega_{pe}^2 \right) / \left( k^2 + \frac{4\pi\rho}{H_0^2} \omega_{pe}^2 \right). \quad (2.79)$$

Фазовая скорость стремится к нулю при ионной лентморовской частоте ( $\omega \rightarrow \omega_{pi}$ ). Характерная длина, при которой становится существенным отклонение от линейного закона дисперсии, есть  $H_0 m_i / 4\pi\rho e$ .

Тепловое движение частиц, не учтенное в проведенном рассмотрении, сделало бы все вычисления весьма громоздкими, так как пришло бы заниматься кинетической теорией. Иногда учит теплового движения не только приводит к количественным поправкам, но и дает качественно новые физические результаты. Только так, например, можно получить характерные типы колебаний плазмы с частотами, распространяющиеся почти перек магнитного поля с частотами, близкими к целым кратным циклотронных частот ионов и электронов. Эти типы колебаний называют модами Бернштейна.

Новые типы колебаний могут возникать в плазме и при распространении вдоль магнитного поля. Наиболее важными среди них являются магнитогидродинамические альвеолы скис волны. Вывод свойств этих волн с помощью уравнений магнитной гидродинамики не представляет трудности.

Пусть направление оси  $z$  совпадает с направлением вектора постоянного магнитного поля  $H_0$ . Альвеоновские волны распространяются вдоль  $H_0$  и являются поперечными, т. е. соответствующие им компоненты скорости плазмы и колебаний магнитного поля перпендикулярны к  $H_0$ , а следовательно, и к направлению распространения волн. При таких поперечных смещениях плазмы, первонациально однородной, не возникает ни сжатий, ни разрежений, т. е. плотность плазмы, а также давление в процессе распространения альвеоновских волн остаются постоянными. В этом случае уравнение Эйлера магнитной гидродинамики (2.60) с учетом (2.61) принимает вид

$$\rho \partial \mathbf{u} / \partial t = -\operatorname{grad} H^2 / 8\pi + (1/4\pi) (\mathbf{H} \operatorname{grad}) \mathbf{H}. \quad (2.80)$$

Линеаризация означает, что нужно отбросить член с магнитным давлением (как квадратично малый). Второе слагаемое в правой части дает  $(1/4\pi) (H_0 \partial / \partial z) \mathbf{H}$ . Итак, линеаризованное уравнение движения имеет вид

$$\rho \partial \mathbf{u} / \partial t = (1/4\pi) (H_0 \partial / \partial z) \mathbf{H}. \quad (2.81)$$

**В качестве уравнения для магнитного поля** волны **возьмем** уравнение (2.70), в котором член  $\operatorname{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]$  для случая альвеоновских волн упрощается:

$$\operatorname{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0] = H_0 \partial u / \partial z,$$

а само уравнение принимает вид

$$\partial H / \partial t = H_0 \partial u / \partial z + (c^2 / 4\pi\sigma) (\partial^2 H / \partial z^2). \quad (2.82)$$

**В** **пренебрежении** магнитной вязкостью уравнения (2.81) и (2.82) легко объединить, исключив любую из переменных  $u$  или  $H$ . В итоге получается обычное волновое уравнение

$$1/c^2 A (\partial^2 u / \partial t^2) = \partial^2 u / \partial z^2 \quad (2.83)$$

с линейным законом дисперсии  $\omega = k_A u$ . Учет магнитной вязкости приводит, как нетрудно увидеть, к затуханию волны. Роль упругой возвращающей силы в магнитогидродинамических волнах играет

сила натяжения силовых линий. Поэтому удобно представить альвеоновские волны как колебания упругих нитей (силовых линий магнитного поля), нагруженных плазмой (из-за эффекта вмороженности).

Квадрат показателя преломления  $N^2 = k^2 c^2 / \omega^2$ , соответствующий альвеоновской волне, равен  $4\pi m_e c^2 / H^2$ . Ему можно дать наглядное толкование на языке дрейфового движения заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях (см. § 2.1). Движение со скоростью  $c[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] / H^2$  не приводит к электрическому току, так как и ионы, и электроны движутся вместе. Дрейфовое движение в следующем порядке приводят к смещению зарядов в направлении электрического поля [см. формулу (2.31)]:  $x = (e/m\omega_H^2) E_x$ .

Теперь диэлектрическую проницаемость можно выразить через электрический момент  $P$  единицы объема  $\epsilon = 1 + 4\pi P/E$ , где  $P = -ne\chi$ . Пренебрегая смещением электронов (они меньше ионного в  $m_i/m_e$  раз), получаем диэлектрическую проницаемость в области низких частот  $4\pi m_i c^2 / H^2$ . Соответствующий показатель преломления  $\sqrt{\epsilon}$  для полавляющего большинства плазм чрезвычайно велик. Таким образом, магнитогидродинамические волны представляют собой просто замедленные поперечные электромагнитные колебания. В очень разреженной плазме они плавно переходят в обычные электромагнитные волны в вакууме. Однако в нашей магнитогидродинамической модели не учтен ток смещения, и поэтому такой предельный переход невозможен.

Величина альвеоновской скорости не содержит характеристики теплового движения плазмы. С этим обстоятельством связана замечательная особенность магнитогидродинамических волн: их свойства универсальны, где бы они ни распространялись, в проводящей или жидкой, помешанной в магнитное поле (С. Лундквист в своих классических опытах генерировал волны в жидкой ртути), или в бесстолкновительной плазме. В последнем случае, разумеется, теряет смысл понятие магнитной вязкости и затухание может быть вызвано эффектами бесстолкновительного взаимодействия волна — частица, примером которого в отсутствие магнитного поля является резонанс Ландау.

В бесстолкновительной плазме появляется эффект аномальной дисперсии и двойного лучепреломления, когда частота волны подвергается увеличению становиться сравнимой с ларморовской частотой ионов.

Самое общее описание волн в такой неизотропной среде, как плазма в магнитном поле, основано на введении тензора диэлектрической проницаемости. Из уравнения Максвелла легко можно получить связь между тензорами диэлектрической проницаемости и проводимости:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik} + i(4\pi/\omega) \sigma_{ik}. \quad (2.84)$$

Это соотношение — тензорное обобщение рассмотренного в ч. 1 соотношения между диэлектрической проницаемостью и проводимостью:

мостью плазмы. Компоненты тензора проводимости  $\sigma_{ik}$  — коэффициенты в тензорном обобщении закона Ома:

$$j_i = \sigma_{ik} E_k. \quad (2.85)$$

Формула (2.84) получена для плоской волны, пропорциональной  $\exp(-i\omega t + ik\vec{r})$ .

В приближении «холодной плазмы» компоненты тензора диэлектрической проницаемости зависят только от частоты (времени дисперсии). Для получения их конкретного вида необходимо с помощью уравнений двухжидкостной гидродинамики (2.58) и (2.59) определить токи, которые индируются в плазме полем колебаний.

Пусть плазма помещена в однородное внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}_0 \parallel Oz$ , другие внешние поля отсутствуют. Плазму будем считать однородной и пренебрежем столкновениями и тепловым движением. Последнее означает, что в уравнениях (2.58) и (2.59) можно опустить слагаемые с компонентами тензора давления. Наконец, предположим, что в равновесии в плазме отсутствуют какие-либо потоки  $\mathbf{j}_0 = 0$ . В этом приближении уравнения двухжидкостной гидродинамики для электронов и ионов ( $e_a = e$ ,  $i$ ) имеют вид

$$-i\omega u_a = (e_a/m_a) \mathbf{E} + (e_a/m_a c) [\mathbf{u}_a \times \mathbf{H}_0]. \quad (2.86)$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} u_{xa} &= (e_a/m_a) (\omega^2 - \omega_{Ha}^2)^{-1} (i\omega E_x - \omega_{Ha} E_y); \\ u_{ya} &= (e_a/m_a) (\omega^2 - \omega_{Ha}^2)^{-1} (i\omega E_y + \omega_{Ha} E_x); \\ u_{za} &= -(e_a/i\omega m_a) E_z; \\ u_{ia} &= e_a H_0/m_a c. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Определим с помощью этих соотношений ток в плазме

$$\mathbf{j} = \sum_a e_a n_a \mathbf{u},$$

получаем с учетом (2.84) и (2.85) следующий тензор диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

$$\text{где } \epsilon_{11} = 1 - \sum_a \frac{\omega^2 \rho_a}{\omega^2 - \omega_{Ha}^2},$$

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = -i \sum_a \frac{\omega^2 \rho_a \omega_{Ha}}{\omega(\omega^2 - \omega_{Ha}^2)},$$

$$\epsilon_{33} = 1 - \sum_a \frac{\omega^2 \rho_a}{\omega^2}.$$

Таким образом, магнитное поле существенным образом влияет на диэлектрические свойства плазмы, приводя, во-первых, к появлению направлений волны и поперек поля ( $\epsilon_{11} \neq \epsilon_{33}$ ), а во-вторых, к проницаемости, соответствующей вращению вектора диэлектрического поля волны в перпендикулярной магнитному полю плоскости (эффект Фарадея).

Читатель уже знает, что в плазме без магнитного поля существует три ветви колебаний: высокочастотные колебания плотности заряда (ленгмюровские волны), электромагнитные волны и ионный звук. Очень важное свойство плазмы в магнитном поле состоит в том, что в ней, вообще говоря, уже не существуют независимые продольные и поперечные волны: колебания плотности заряда инициируют в плазме магнитное и вихревое электрическое поля.

Действительно, пусть в плазме под углом  $\kappa$  к магнитному полю распространяется продольная волна. В отличие от изотропного случайной анизотропия тензора диэлектрической проницаемости приводит к тому, что вектор тока не будет коллинеарен вектору электрического поля. Наличие перпендикулярной  $\kappa$  направлению распространения компоненты тока  $j_\kappa$  приводит, как следует из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = (1/c) (\partial \mathbf{E}^t / \partial t) + (4\pi/c) \mathbf{j}^t, \quad (2.89)$$

к возбуждению магнитного и вихревого электрического полей, а следовательно, к связи продольных колебаний плазмы с электромагнитными. Именно из-за этого обстоятельства исследование высокочастотных колебательных и волновых свойств плазмы в магнитном поле существенно усложняется. Однако в пределе очень больших показателей преломления плазмы  $N \gg 1$  можно приближенно рассматривать чисто продольные колебания в магнитном поле, поскольку связанные с ними вихревые электрические поля будут пренебрежимо малы.

Действительно, из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -(1/c) (\partial \mathbf{H} / \partial t) \quad (2.90)$$

имеем следующую оценку для вихревого электрического поля:

$$E^{t\sim} = (\omega/kc) H, \quad (2.91)$$

или с учетом уравнения  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi j^t/c$

$$E^{t\sim} = (4\pi\omega/k^2c^2) j^t. \quad (2.92)$$

Кроме того, используя уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^t = 4\pi\rho, \quad (2.93)$$

$$E^{t\sim} = (4\pi/\omega) j^t - (j^t/j^t) (k^2c^2/\omega^2) E^t. \quad (2.94)$$

Таким образом, даже при сильно выраженной анизотропии  $\frac{J_x}{J_y} \gg 1$  для плазмы с большим показателем преломления ( $N \equiv kc/\omega \gg 1$ )  $E^t \ll E^s$ .

Предполагая  $N \gg 1$ , рассмотрим чисто продольные (электростатические) колебания плазмы в магнитном поле. Введя, как обычно, электростатический потенциал колебаний  $E = -\nabla\Phi$ , запишем уравнение Пуассона в следующем виде:

$$(\partial^2\Phi/\partial x_i \partial x_j)_{ij} = 0. \quad (2.95)$$

Для плоской волны с учетом конкретного вида тензора  $\epsilon_{ij}$  из (2.95) имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega^2_{pe}} \cos^2 \theta - \frac{\omega^2_{pe}}{\omega^2 - \omega^2_{He}} \sin^2 \theta - \frac{\omega^2_{pi}}{\omega^2 - \omega^2_{Hi}} \sin^2 \theta = 0. \quad (2.96)$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлением волнового вектора и магнитным полем. В изотропной плазме дисперсия электростатических (ленгмюровских) колебаний была связана только с тепловым движением. Уже весьма слабое магнитное поле  $\omega_{He}/\omega_{pe} \gtrsim 3k^2/2$  меняет дисперсию электростатических колебаний и тем самым приводит к зависимости частоты этих колебаний от угла  $\theta$ . Чтобы не тратить лишних слов на описание дисперсионных характеристик, приведем результаты решения алгебраического уравнения (2.96) в виде графиков  $\omega = \omega(\theta)$  (рис. 2.14).

**В** плазме, помещенной в магнитное поле, существуют три ветви электростатических колебаний. Наиболее высокочастотная из них (при  $\omega_{pe} > \omega_{He}$ ) соответствует ленгмюровским колебаниям, при  $\theta = 0$  частота этой волны совпадает с плазменной  $\omega_{pe}$  с ростом  $\theta$  частота этой ветви растет вплоть до так называемой частоты верхнего гибридного резонанса:

$$\omega_{TH} = (\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2)^{1/2}. \quad (2.97)$$

Частота второй ветви с ростом  $\theta$  убывает от  $\omega_{He}$  при  $\theta = 0$  до ча-

$$\omega_{TH} = \omega_{pe}/(1 + \omega_{pe}^2/\omega_{He}^2)^{1/2}$$

$$(2.98)$$

при  $\theta = \pi/2$ . Наконец, частота третьей, самой низкочастотной ветви, для которой существенно движение ионов, совпадает с ионной  $\pi/2 - \theta \ll (m_e/m_i)^{1/2}$ .

Исследование дисперсионных свойств волн в плазме, помещенной в магнитное поле, при произвольных значениях показателя преломления — довольно громоздкая задача, выходящая за рамки настоящей книги. Ограничимся рассмотрением дисперсионных характеристик волн, распространяющихся вдоль или поперек магнитного поля.

При продольном распространении ( $k_z = 0$ ) в качестве элементарных мод колебаний естественно взять волны с круговой поляризацией. Это вызвано тем, что в волне, распространяющейся в такой плазме, яркости на всех частотах существует ток Холла, приходящий к повороту вектора электрического поля. В качестве двух линейно независимых мод колебаний с круговой поляризацией следует рассматривать волны, у которых электрический вектор вращается соответственно в сторону вращения электронов и ионов в магнитном поле. Для каждой из этих волн удобно ввести комбинацию компонент поля  $E_{\pm} = E_x \pm iE_y$  (такие же комбинации вводятся для других физических величин  $H_{\pm}$ ,  $j_{\pm}$  и т. п.). Поскольку  $E_{\pm} = \text{exp}(ikz - i\omega t)$ , то очевидно, что в волне  $E_+ = E_x \sim \cos(kz - \omega t)$ ,  $E_y \sim \sin(kz - \omega t)$  и электрический вектор вращается по часовой стрелке, т. е. в сторону вращения ионов (рис. 2.15). Аналогичным образом для волны  $E_- = E_x \sim \cos(kz + \omega t)$ ,  $E_y \sim \sin(kz + \omega t)$  и электрический вектор вращается в сторону вращения электронов.

$$H_{\pm} = \mp i(kc/\omega) E_{\pm} \quad (2.99)$$

Аналогично другие уравнения Максвелла  $\text{rot } H = (1/c) \times (\partial D / \partial t)$  с помощью тензора диэлектрической проницаемости (2.88) можно представить в виде

$$H_{\pm} = \pm i(\omega/kc) s_{\pm} E_{\pm} \quad (2.100)$$

где комбинации  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} - i\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{11} + i\varepsilon_{12}$  играют роль диэлектрической проницаемости для электромагнитных волн с различным направлением вращения вектора поляризации.

Используя формулу (2.88) для компонент тензора диэлектрической проницаемости, нетрудно записать дисперсионные уравнения для волн с круговой поляризацией в следующем виде:

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1 - \omega_{pe}^2/\omega(\omega \pm \omega_{ne}) - \omega_{pi}^2/\omega(\omega \mp \omega_{ni}) = 0 \quad (2.101)$$

На рис. 2.16 приведен график изменения с частотой показателя преломления  $N(\omega)$  для обеих волн с круговой поляризацией (индекс  $\alpha$  относится к обычной волне  $E_\alpha$ , индекс  $\beta$  — к необычайной  $E_\beta$ ). В области малых частот обе кривые сливаются, что соответствует переходу к уже изученным выше магнитогидродинамическим волнам (альвеновской и магнитовуковой) с фазовой скоростью  $c_A$ . Им соответствует показатель преломления

$$N = ck/\omega = c/v_A = (4\pi n m_e c^2 / H_0^2)^{1/2}$$

Характер волнового процесса изменяется при приближении  $\omega$  к  $\omega_{ni}$ . Не вдаваясь в детали, остановимся только на качественной стороне. Не вдаваясь в детали, остановимся только на качественной стороне. Не вдаваясь в детали, остановимся только на качественной стороне.

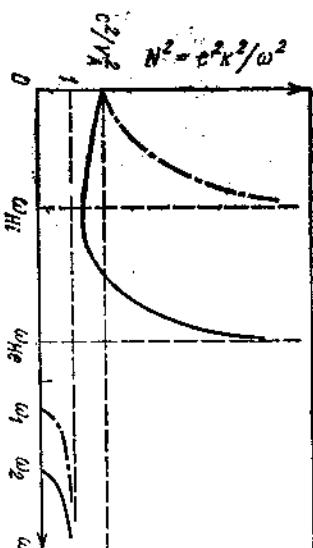


Рис. 2.16. Квадрат показателя преломления  $N^2 = c^2 k^2 / \omega^2$  как функция частоты для электромагнитных волн, распространяющихся вдоль магнитного поля:

- сплошная кривая — необычайная волна (электрический вектор поляризован в напрямленности электронов);
- пунктир — обычная волна (электрический вектор поляризован в направлении вращения ионов)

стороне явлений, которые определяют основные свойства попечечных электромагнитных волн в плазме при  $\omega \sim \omega_{ni}$ . Простейшую линейно поляризованную волну, распространяющуюся вдоль направления постоянного магнитного поля, можно представить в виде суперпозиции двух волн, поляризованных по кругу с противоположными направлениями вращения вектора поляризации. Если  $\omega \ll \omega_{ni}$ , то обе волны с противоположными направлениями круговой поляризации распространяются с одинаковой скоростью. Однако по Мере приближения к ларморовской частоте ионов положение меняется. Действительно, та из волн, электрический вектор которой вращается вокруг постоянного поля в направлении, совпадающем с направлением ларморовского вращения ионов, должна испытывать в области, где  $\omega \sim \omega_{ni}$ , явление аномальной дисперсии, возникающее вследствие циклотронного резонанса ионов. Фазовая скорость этой волны (ее аналог в оптике принято называть обычной, находящийся обласди непрозрачности, в которых распространение электромагнитной волны невозможно). При частотах отсечки  $k$

звуковая скорость так называемой необычайной волны, которой соответствует противоположное направление вращения электрического вектора, в области частот, близких к  $\omega_{ni}$ , растет при увеличении  $\omega$ . Поэтому в области значений  $\omega$ , близких к  $\omega_{ni}$ , в плазме должно наблюдаться «двойное лучепреломление». Волны такого типа играют важную роль в физике околоземной плазмы. Они легко генерируются в естественных условиях и распространяются в магнитосфере Земли на очень большие расстояния вдоль силовых линий геомагнитного поля. Их часто называют ионами (или электронами) с вистами — «свищущими атмосфериками».

При очень больших значениях частот, в области, где  $\omega$  становится сравнимой с ларморской частотой электронов  $\omega_{ne}$ , должна наблюдаваться аномальная дисперсия для необычайной волны, электрический вектор которой вращается вокруг магнитного поля в ту же сторону, что и электроны плазмы. При частотах  $\omega \gg \omega_{ne}$  ионы практически не участвуют в волновом движении, т. е. волна становится чисто электронной. В металлах и полупроводниках, помешанных в магнитное поле, такие волны называют геликонами.

Если частота этих волн мала по сравнению с  $\omega_{ne}$ , то закон их дисперсии имеет вид

$$\omega = (c^2 k^2 / \omega_{pe}^2) \omega_{ne} \quad (2.102)$$

В такой волне основное движение электронов — дрейф в скрещенных  $E$ - и  $H$ -полях, который приводит к возникновению холловского тока, перпендикулярного к электрическому полю. Затухание геликона в металлах и полупроводниках связано со столкновениями. Столкновения приводят к возникновению компонента тока вдоль электрического поля, которая мала по сравнению с холловской в отношении  $v_{ne}/\omega_{ne}$ . Соответственно этому столь же мало затухание геликона:  $\psi/\omega \sim v_{ne}/\omega_{ne}$ . Именно благодаря этому обстоятельству возможно распространение геликона в плотной металлической плазме с большими частотами столкновений  $\gamma \sim (10^9 - 10^{10}) \text{ с}^{-1}$  при использовании сильных магнитных полей  $H_0 \sim (1 \div 2) \cdot 10^4 \text{ Э}$ .

Аномальная дисперсия на резонансных частотах всегда сопровождается аномальным поглощением (т. е. резким увеличением затухания волны). Это поглощение обусловлено тем, что при приближении частоты обычной волны к  $\omega_{ni}$  ионы все время находятся в резонансе с электрическим полем волны и, ускоряясь под действием этого поля, непрерывно отбирают у него энергию. Это явление используется в так называемом циклотронном методе нагрева плазмы. С необычайной волной то же самое происходит при  $\omega \sim \omega_{ni}$ .

При частотах, больших резонансных, вплоть до так называемых частот отсечки,  $\omega_1$  — для обычной,  $\omega_2$  — для необычайной, находятся обласди непрозрачности, в которых распространение электромагнитной волны невозможно. При частотах отсечки  $k$

обращается в нуль, и эти частоты имеют смысл пороговых частот, выше которых вновь становится возможным распространение электромагнитных волн. В изотропной плазме пороговая частота  $\omega_{pe}$  впадает с плазменной  $\omega_{pe}$ . Из дисперсионного уравнения (2.101) нетрудно получить формулы для частот отсечек:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\omega_{pe}/2 + \sqrt{\frac{\omega_{pe}^2}{4} + \omega_{pe}^2}, \\ \omega_2 &= \omega_{pe}/2 + \sqrt{\frac{\omega_{pe}^2}{4} + \omega_{pe}^2}.\end{aligned}\quad (2.103)$$

Две линейные независимые волны — обыкновенную и необыкновенную — можно ввести и в случае поперечного распространения  $k_\perp \neq 0$ . Однако смысл этих волн уже иной. В обыкновенной волне электрический вектор параллелен внешнему магнитному полю, а магнитный вектор перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы  $k$  и  $H_0$ . Колебания заряженных частиц в такой волне происходят в направлении магнитного поля, следовательно, дисперсия волн не зависит от напряженности поля и определяется формулой (1.35).

Напротив, в необыкновенной волне вектор электрического поля лежит в плоскости, перпендикулярной к внешнему магнитному полю, а магнитное поле волны параллельно  $H_0$ . Направляя  $k$  вдоль оси  $x$ , а  $H_0$  по оси  $z$ , получаем с помощью уравнений Максвелла следующие уравнения для компонент  $E_x$ ,  $E_y$ :

$$\left. \begin{aligned}\epsilon_{11}E_x + i\epsilon_{12}E_y &= 0, \\ (c^2k^2/\omega^2)E_y &= \epsilon_{11}E_x - i\epsilon_{12}E_y.\end{aligned}\right\} \quad (2.104)$$

Отсюда находим дисперсионное уравнение для необыкновенной электромагнитной волны

$$c^2k^2/\omega^2 = (\epsilon_{11}^2 - \epsilon_{12}^2)/\epsilon_{11}. \quad (2.105)$$

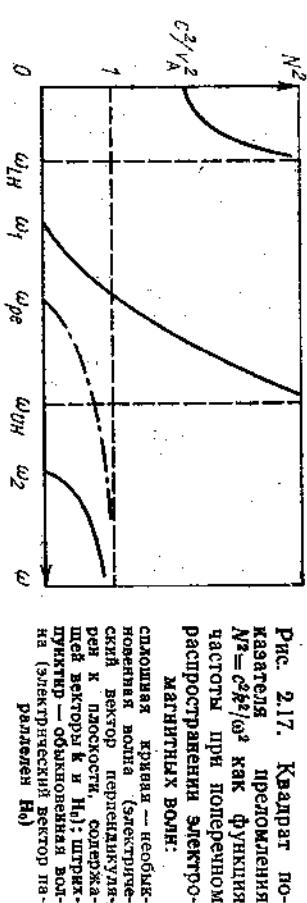


Рис. 2.17. Квадрат показателя преломления  $N^2 = c^2k^2/\omega^2$  как функция частоты при поперечном распространении электромагнитных волн.

Результаты решения дисперсионных уравнений для обыкновенной и необыкновенной волн при поперечном распространении приведены на рис. 2.17. Обыкновенная волна распространяется в плазме при частотах выше  $\omega_{pe}$ . Необыкновенная волна имеет две резонансные частоты, при которых  $N \rightarrow \infty$ . Это уже полученные ранее

в электростатическом приближении частоты верхнего (2.97) и нижнего (2.98) гибридных резонансов, т. е. собственные частоты электростатических колебаний при  $\theta = \pi/2$ . Для необыкновенной волны имеются, кроме того, две частоты отсечки ( $N \rightarrow 0$ ). Естественно, они оказываются такими же, как частоты отсечки  $\omega_1$  и  $\omega_2$  при продольном распространении.

### § 2.7. Кинетическая теория волн в плазме

Строгая теория волн в бесстоклоновительной плазме должна базироваться на решении линеаризованных кинетических уравнений для ионов и электронов совместно с уравнениями Максвелла, подобно тому как это показано в ч. 1 для более простого случая. Как уже известно читателю, кинетическое рассмотрение позволяет не только получить дисперсионные свойства колебаний и волн в плазме, но и исследовать их взаимодействие с резонансными частичами, т. е. процесса бесстолкновительного затухания и нарастания волн. Хотя магнитное поле и делает выкладки более громоздкими, мы приведем кинетическую теорию волн альвеновского типа для простейшего случая продольного распространения  $k = \{0, 0, k\}$ .

Ограничимся анализом колебаний достаточно высокой частоты, в которых принимают участие только электроны, и соответственно исследуем необыкновенную электромагнитную волну с электрическим вектором, врачающимся в направлении вращения электронов. После несложных стандартных вычислений получим следующее уравнение для электрического поля волны:

$$(c^2k^2/\omega^2 - 1)E = -i(4\pi/\omega)j. \quad (2.106)$$

В предыдущем параграфе мы описывали отклик плазмы на распространяющуюся в ней волну с помощью гидродинамического тензора диэлектрической проницаемости. В уравнении (2.106) вместо этого тензора введен ток  $j$ , инициированный волной в плазме, для вычисления которого обратимся к решению кинетического уравнения. Очевидно, что

$$j = -e \int v_\perp \exp(-i\varphi) f d\mathbf{v}. \quad (2.107)$$

Здесь  $f$  — возмущение равновесной функции распределения, вызванное распространяющейся в плазме волной;  $\varphi$  — азимутальный угол в пространстве скоростей (рис. 2.18).

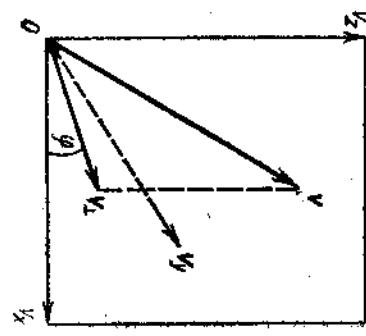


Рис. 2.18. Цилиндрические координаты в пространстве скоростей, используемые в кинетической теории уравнения (2.108)

Решим теперь кинетическое уравнение (2.48). Для этого представим функцию распределения в виде  $f = f_0 + f_1$ . Величина  $f_1$  пропорциональна  $\exp[i(kz - i\omega t)]$ , для нее линеаризованное кинетическое уравнение записывается в следующем виде:

$$-i(\omega - kv_z) f_1 - (e/m_e c) [v \times H] \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0. \quad (2.108)$$

Используя полярные координаты в пространстве скоростей с осью  $v$  вдоль постоянного магнитного поля  $v_x = v_{\perp} \cos \varphi$ ,  $v_y = v_{\perp} \sin \varphi$ , не трудно доказать, что слагаемое

$$-(e/m_e c) [v \times H_0] \frac{\partial f_1}{\partial v} = (eH_0/m_e c) (v_x \frac{\partial f_1}{\partial v_y} - v_y \frac{\partial f_1}{\partial v_x})$$

переходит в  $\omega n_0 \partial f_1 / \partial \varphi$ . Что касается двух последних слагаемых, то, используя вытекающее из уравнений Максвелла соотношение между амплитудой электрического и магнитного полей волны  $H = (c/\omega) [k \times E]$ , можно представить их в следующем виде:

$$- (e/m_e) (E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi) [(1 - kv_z/\omega) \frac{\partial f_1}{\partial v_x} + (kv_{\perp}/\omega) \frac{\partial f_1}{\partial v_z}]$$

Здесь учтено, что в стационарном состоянии равновесная функция распределения может зависеть только от  $v_{\perp}$ ,  $v_z$ . Поставляя  $E_x$ ,  $E_y$  в виде  $E_s = (E_+ + E_-)/2$ ,  $E_v = (E_+ - E_-)/2i$ , получаем кинетическое уравнение

$$-i(\omega - kv_z) f_1 + \omega_H \frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp}} = (e/2m_e) E_v \exp(i\varphi) [(1 - kv_z/\omega) \frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp}} + (kv_{\perp}/\omega) \frac{\partial f_1}{\partial v_z}]. \quad (2.109)$$

Отметим, что в вынуждающей силе сохраняется только слагающее, пропорциональное  $E_v \exp(i\varphi)$ , с которым связан ненулевой вклад в ток (2.107).

Решение кинетического уравнения (2.109) записывается в виде

$$\begin{aligned} f_1 = & -i(e/2m_e) E_v \exp(i\varphi) [(1 - kv_z/\omega) \frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp}} + \\ & + (kv_{\perp}/\omega) \frac{\partial f_1}{\partial v_z}] / (kv_z - \omega + \omega_H). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Вычисляя с помощью  $f_1$  ток (2.107), приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned} c^2 k^2 / \omega^2 - 1 = & - (2\pi e^2 / m_e \omega) \int dv v_{\perp} [(1 - kv_z/\omega) \frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp}} + \\ & + (kv_{\perp}/\omega) \frac{\partial f_1}{\partial v_z}] / (kv_z - \omega + \omega_H). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Для получения дисперсионных характеристик электромагнитной волны в холодной плазме и ее декремента затухания разобъем равновесную функцию распределения на две части — функцию

распределения основной массы частиц (тепловых), определяющих дисперсию волны, и функцию распределения небольшой группы резонансных частиц, взаимодействие которых с волной приводит к ее затуханию.

Для электрической волны круговой поляризации, электрический вектор которой вращается в ту же сторону, что и электроны, условие резонансного взаимодействия с электронами имеет вид

$$\omega - kv_z = \omega_H, \quad (2.112)$$

т. е. частота волны с учетом доплеровского свида совпадает с циклической частотой. При этом частицы долгое время находятся при одной и той же фазе поля и могут эффективно обмениваться энергией с волной. Условие резонанса (2.112) записано для необыкновенной волны. Для обыкновенной волны аналогичный резонанс имеет место с ионами

$$\omega - kv_z = \omega_{He}. \quad (2.113)$$

При распространении электромагнитной волны под углом к магнитному полю возможны и другие резонансы. Подробно этот вопрос рассматривается в следующем параграфе.

Пренебрегая вкладом теплового движения в дисперсию волн, интеграл в правой части уравнения (2.111) можно вычислить предельным переходом  $v_z \rightarrow 0$ ,  $v_{\perp} \rightarrow 0$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \int \frac{v_{\perp}}{kv_z - \omega + \omega_{He}} \left[ \left(1 - \frac{kv_z}{\omega}\right) \frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp}} + (kv_{\perp}/\omega) \frac{\partial f_1}{\partial v_z} \right] dv = \\ = - \frac{1}{\omega - \omega_{He}} \int v_{\perp} \frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp}} \frac{\partial v_{\perp}}{\partial v_z} dv = \frac{2n_0}{\omega - \omega_{He}}. \end{aligned}$$

Учитем теперь вклад резонансных частиц, используя символическую запись

$$1/(kv_z - \omega + \omega_H) = \mathcal{P}/(kv_z - \omega + \omega_H) + i\delta(kv_z - \omega + \omega_H),$$

смысл которой был разяснен ранее. Слагаемое с главным значением вещественно и поэтому приводит только к малой (пропорциональной плотности резонансных частиц) поправке к частоте. Пренебрегая этой поправкой, сохраним в интеграле лишь вклад от  $\delta$ -функции. Вычислив для резонансных частиц интеграл по  $v_z$ , при ведем дисперсионное уравнение к виду

$$\begin{aligned} c^2 k^2 - \omega^2 + \omega_H^2 / (\omega - \omega_{He}) = & - i\pi \frac{2\pi e^2}{m_e} \frac{\omega}{|k|} \int dv v_{\perp} \left[ \left(1 - \frac{kv_z}{\omega}\right) \frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp}} + \right. \\ & \left. + \frac{kv_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_1}{\partial v_z} \right] \Big|_{v_z = (\omega - \omega_{He})/k}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Если пренебречь правой частью, то это уравнение, естественно, содержит с дисперсионным уравнением для  $E_v$ -волн, полученным в § 2.6 из гидродинамических уравнений (напомним, что мы рассматриваем высокочастотную ветвь и не учтем движение ионов

нов). Но кроме частоты при кинетическом рассмотрении может быть получен также и декремент затухания волны.

Из уравнения (2.114) имеем следующую формулу для декремента затухания:

$$\gamma = \frac{2\pi e^2}{m_e} \frac{\omega}{|k|} \frac{1}{d\omega / (\omega^2 N(\omega))} \times$$

Для плазмы с Максвелловским распределением резонансных частиц по скоростям интеграл по  $v_{\perp}$  в (2.115) легко вычисляется; декремент циклотронного затухания необыкновенной волны в результате взаимодействия с резонансными электронами имеет вид:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2}{\omega_{pe}} \frac{\omega}{|k|} \frac{1}{d\omega / (\omega^2 N(\omega))} \left( \frac{m_e}{T} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{m_e}{2T} \frac{(\omega - \omega_{He})^2}{k^2} \right\}. \quad (2.115)$$

Как уже отмечалось выше, область аномального поглощения находится при частотах, близких к циклотронной:

$$|\omega - \omega_{He}| \sim k v T_e.$$

В этой области основная масса частиц плазмы попадает в резонанс с волной. С ростом расстройки  $|\omega - \omega_{He}|$  число резонансных частиц экспоненциально уменьшается.

Уже известно, что когда функция распределения резонансных частиц отличается от максвелловской (например, если резонансные частицы образуют пучок), их взаимодействие с волной может приводить к нарастанию ее амплитуды, т. е. к неустойчивости. Так же, как в случае ленгмюровской волны, пучковая неустойчивость циклотронной волны может быть двух типов — гидродинамической и кинетической.

Рассмотрим гидродинамическую неустойчивость циклотронной волны, возникающую при взаимодействии с плазмой монозергетического электронного пучка, все частицы которого имеют один и тот же продольный и поперечный импульс:

$$f_0^b = \frac{n_1}{2\pi p_{10}} \delta(p_z - p_{z0}) \delta(p_{\perp} - p_{\perp0}). \quad (2.117)$$

Такая функция распределения соответствует как бы пучку оцилляторов (назовем их ларморовскими), имеющих одну и ту же скорость движения вдоль магнитного поля, но равномерно размещанных в равновесном состоянии по фазам вращения в магнитном поле.

Для рассмотрения пучковой неустойчивости окажется важным учет релятивистской зависимости циклотронной частоты от энергии

электронов. В релятивистском случае формула для циклотронной частоты  $\omega_{He} = eH_0/m_ec$  переходит в следующую:

$$\omega_{He} = eH_0c/w, \quad (2.118)$$

где  $w = m_e c^2 \sqrt{1 + p^2/m_e^2}$  — энергия частицы. Переход к релятивистскому случаю очень прост. Для этого следует заменить  $1/m_e(\partial/\partial v)$  на  $\partial/\partial p$ . В результате вместо (2.111) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} - 1 = - \frac{2\pi e^2}{\omega} \int \frac{v_{\perp} dv}{kv_z - \omega + \omega_{He}} \left[ \left( 1 - \frac{kv_z}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + \frac{kv_z}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right]. \quad (2.119)$$

Разделим функцию распределения  $f_0$  на две — функцию для тепловых нерелятивистских частиц плазмы и функцию релятивистского пучка (2.117). Для частиц пучка интеграл по продольным и поперечным импульсам легко вычисляется интегрированием по частям. В результате приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$c^2 k^2 - \omega^2 + \omega_p^2 \delta(\omega - \omega_{He}) = - (1/2) [\omega_{He}^2 (k^2 C^2 - \omega^2)/(\omega - kv_z - \omega_{He})]^2 (v_{\perp 0}^2/c^2). \quad (2.120)$$

Здесь учтено, что для неустойчивой волны приближенно должно выполняться условие циклотронного резонанса (2.112), и поэтому в правой части дисперсионного уравнения сохранены только слагаемые со старшей степенью (квадрат) резонансного знаменателя. Подчеркнем, что при нерелятивистском рассмотрении частиц пучка вклад пучка содержит только первое слагаемое, пропорциональное  $k^2 C^2$ .

Таким образом, нерелятивистское рассмотрение применимо лишь для медленных волн с большим показателем преломления  $N \gg 1$ , в общем же случае нужно учитывать релятивистскую зависимость массы и циклотронной частоты частиц пучка от их энергии.

Решение дисперсионного уравнения можно получить аналогично тому, как это было сделано для пучковой неустойчивости в отсутствие магнитного поля. Частота наиболее неустойчивой волны определяется из условия

$$(ck/\omega^{(0)})^2 = 1, \quad (2.121)$$

т. е. дисперсионные свойства такой волны те же, что для исследовавшейся выше необыкновенной волны. Наличие пучка малой плотности приводит к возмущению ее частоты.

Полагая, что эта волна находится в циклотронном резонансе с электронным пучком

$$\omega^{(0)} = kv_0 + \omega_{He}; \quad (2.122)$$

для мнимой части добавки к частоте, т. е. для инкремента нарастания, получаем из дисперсионного уравнения следующее соотношение:

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}} \left[ \frac{\omega_b^2 (\sigma^2 k^2 - \omega^2)}{\partial \omega} \frac{v_{\perp 0}^2}{c^2} \right]^{1/3}. \quad (2.123)$$

Приведенная формула для инкремента нарастания содержит вклады от двух возможных механизмов неустойчивости электронного пучка в магнитном поле — циклотронного и мазерного. Остановимся на этом вопросе более подробно.

Так же, как и в отсутствие магнитного поля, в рассматриваемом случае для возникновения неустойчивости кроме резонансного условия (2.122) должно выполняться условие бunchedirkovki частиц пучка в тормозящих фазах поля волны.

Для электронного пучка в магнитном поле возможны два механизма бunchedirkovki. Один из них существенно связан с продольной неоднородностью поля волны — это бunchedirkovka электронного пучка по продольным фазам  $kz$ , при которой частицы пучкалагаются в ступеньки, локализованные в области тормозящих фаз. Такой механизм аналогичен бunchedirkovke электронного пучка в отсутствие магнитного поля, с той разницей, что в рассматриваемом случае электромагнитной волны бunchedirkovka осуществляется из-за наличия продольной компоненты силы Лоренца, (обусловленной магнитным полем волны)  $(e/c)[\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{H}]_z$ .

Можно воспользоваться условием (1.161), если под  $\omega$  понимать частоту волны в системе отсчета, врашающейся вместе с электронами. Таким образом, условие бunchedirkovki по продольной фазе имеет вид

$$(1) - \omega_H < \omega_{kz}. \quad (2.124)$$

И опять, как без магнитного поля, стабилизация неустойчивости происходит в результате захвата электронов пучка в эффективные потенциальные ямы. При колебаниях электронов в этих потенциальных ямах меняется продольная фаза. Период этих oscillаций определяется формулой (1.150) с заменой  $E$  на  $(v_{\perp}/c)H$ . Таким образом,

$$\tau_b \approx 1/\sqrt{k v_{\perp} (eH/m_e c)}. \quad (2.125)$$

Амплитуда поля, при которой происходит стабилизация неустойчивости, так же как и в изотропной плазме, определяется из условия  $\gamma \approx 1$ . Связанная с такой бunchedirkovкой неустойчивость называется циклотронной. Однако в магнитном поле возможен еще один механизм бunchedirkovki — группировка частиц пучка по фазам вращения в магнитном поле. В отличие от первого механизма этот механизм бunchedirkovki является чисто релятивистским. Поясним, как происходит группировка электронов по фазам вращения в магнитном поле (рис. 2.19).

В системе отсчета, врашающейся вместе с электроном, частота изменения действующего на электрон электрического поля  $\omega' - \omega_H$  ( $\omega'$  — частота поля с учетом доплеровского сдвига,  $\omega' = \omega - kzv_z$ ). Если циклотронная частота не зависит от энергии, то ускорение электрона на первом полупериоде изменения поля компенсируется торможением его на втором полупериоде и суммарное изменение энергии равняется нулю. Однако, поскольку с учетом релятивизма  $d\omega/dw < 0$ , то в области тормозящих фаз поля циклотронная частота возрастает. В этом случае при  $\omega' > \omega_H$  такое возрастание циклотронной частоты означает, что область тормозящих фаз поля проходит медленнее  $[\tau \sim 1/(\omega' - \omega_H)]$ , электроны здесь группируются и энергия передается от электронов пучка к волне.

Таким образом, при  $d\omega/dw < 0$  условие бunchedirkovki электронов в той области фаз, где они тормозятся волной, т. е. условие возникновения неустойчивости имеет вид

$$\omega - kzv_z > \omega_H. \quad (2.126)$$

Нерелятивистская группировка по продольной фазе существует на только для достаточно медленных электромагнитных волн  $\omega \ll kc$ , т. е.  $N(\omega) \gg 1$ . В этом случае в формуле для инкремента доминирует первое слагаемое и имеет место нерелятивистская циклотронная неустойчивость.

При раскачке быстрой электромагнитной волны  $\omega > kc$  существенным оказывается релятивистский эффект зависимости циклотронной частоты от энергии. Неустойчивость этого типа называют мазерной.

Как и следовало ожидать, вклады от обоих механизмов группировки [слагаемые в квадратных скобках в выражении (2.123) для инкремента] противоположны по знаку. Это объясняется тем, что условия группировки (2.124) и (2.126) противоположны. Интересно отметить, что при  $\omega = kc$ , т. е. для среды с показателем преломления  $N(\omega) \sim 1$ , соответствующие вклады компенсируют друг друга и неустойчивость отсутствует.

Происхождение самого термина «мазерная неустойчивость» связано с использованием квантовомеханической интерпретации. При такой интерпретации электронный пучок рассматривается как

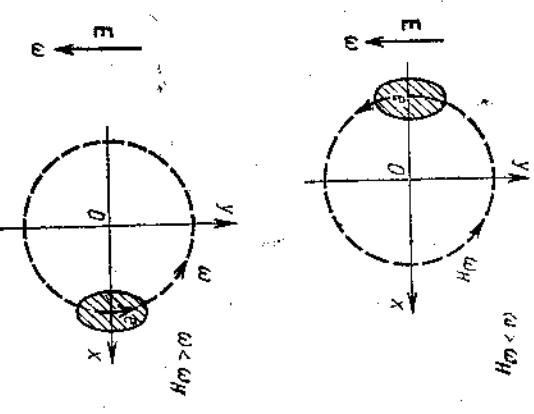


Рис. 2.19. Группировка частиц по фазам ларморовского вращения

газ осцилляторов с уровнями энергии  $w_n = \omega_{n\text{рез}}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ). Как и в обычном мазере, для неустойчивости необходима неизв-дистантность энергетических уровней, т. е. в данном случае завис-имость  $\omega_{n\text{рез}}$  от энергии. Тогда квант поля, излученный при пере-ходе осциллятора на более низкий энергетический уровень  $n \rightarrow n-1$ , не может поглотиться при переходе  $n \rightarrow n+1$ , и прои-ходит усиление поля излучения.

Уровень амплитуды поля, возбуждаемого при мазерной не-устойчивости, определяется из условия

$$\Delta\omega = (d\omega_n/dw) \Delta w \sim \gamma \quad (2.127)$$

Из (2.127) и (2.127a) получаем следующую оценку для макси-мальной амплитуды электрического поля волны:

$$(eE_{\max}/m)v_{\perp} \sim (\gamma^2/\omega_H)c^2. \quad (2.128)$$

Мазерная неустойчивость позволяет получать большие амплитуды электромагнитных волн в генераторах мощного электромагнитно-го излучения, основанных на использовании интенсивных пучков электронов (циклонные мазеры А. В. Галонова-Грекова).

Кроме резонансного взаимодействия частиц с волнами существует еще важный класс взаимодействий, при которых нельзя четко выделить группу частей, ответственную за затухание или не-устойчивость. Это так называемое нерезонансное или адиа-батическое взаимодействие. Одним из самых наглядных примеров могут служить неустойчивости плазмы, требующие для своего возникновения, как правило, еще более сильной анизотро-пии функции распределения  $f_0(v_{\perp}, v_{\parallel})$ .

Неустойчивость в рассматриваемом случае может возникать для волн, распространяющихся под произвольным углом к магнитному полю. Для простоты рассмотрим ставший уже традиционным предельный случай волны, распространяющейся вдоль маг-нитного поля, т. е. альвеновскую волну.

В действительности при выполнении приведенного ниже критерия неустойчивости возмущение не носит волнового характера (формально это проявляется в том, что  $\omega^2$  становится отрицатель-ным). Тем не менее будем говорить для краткости о «неустойчиво-сти на альвеновской волне», имея в виду, что при уменьшении ани-зотропии рассматриваемый тип возмущений переходит в альвенов-ские волны.

Так же как и рассмотренную выше гидродинамическую неустой-чивость резонансного типа нерезонансную неустойчивость можно

получить из общего дисперсионного уравнения кинетического при-ближения. Для возмущений альвеновского типа в дисперсионном уравнении следует учесть также вклад ионов.

Уравнение (2.111) нетрудно обобщить:

$$c^2 k^2 - \omega^2 = - \frac{2\pi e^2 \omega}{m_e} \int dV \frac{v_{\perp}}{kv_z - \omega + \omega_H} \left[ \left( 1 - \frac{kv_z}{\omega} \right) \frac{\partial f^*}{\partial v_{\perp}} + \frac{kv_1}{\omega} \frac{\partial f^*}{\partial v_z} \right] - \frac{2\pi e^2 \omega}{m_i} \int dV \frac{v_{\perp}}{kv_z - \omega - \omega_H} \left[ \left( 1 - \frac{kv_z}{\omega} \right) \frac{\partial f^*}{\partial v_{\perp}} + \frac{kv_1}{\omega} \frac{\partial f^*}{\partial v_z} \right]. \quad (2.129)$$

Рассмотрим возмущение с длиной волны  $\lambda$ , много большей сред-него ларморовского радиуса электронов и ионов (и характерным временем изменения амплитуды, значительно превышающим пери-оды обращения частиц в маг-нитном поле). Тогда интеграл для ионов легко вычисляется путем разложения по па-метрам:

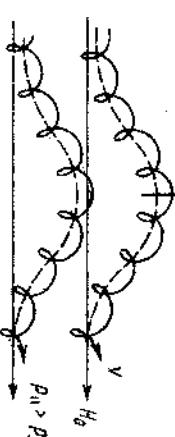
$$\omega/\omega_H \ll 1; kv_z/\omega_H \ll 1. \quad (2.130)$$

Для электронов вообще доста-точно ограничиться членом старшего порядка по  $1/\omega_H$ .

В результате получим следую-щее уравнение:

$$c^2 k^2 - \omega^2 = - \frac{2\pi e^2 \omega}{m_e \omega_H} \int dV v_{\perp} \frac{\partial f^*}{\partial v_{\perp}} + \frac{2\pi e^2 \omega}{m_i \omega_H} \int dV v_{\perp} \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial v_{\perp}} \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_H} \right) - \frac{\partial f^*}{\partial v_{\perp}} \frac{kv_z}{\omega_H} + \frac{\partial f^*}{\partial v_z} \frac{kv_1}{\omega_H} \right\}.$$

Рис. 2.20. «Шланговая» неустойчивость



Для плазмы с изотропным распределением частиц по скоростям отсюда следует дисперсионное уравнение альвеновской волны  $\omega = ck/v_A$ . При достаточно большой анизотропии

$$T_{\parallel} > T_{\perp} + H^2/4\pi n_0. \quad (2.131)$$

Рассматриваемая мода колебаний становится апериодически неус-тойчивой.

$$\omega^2 = -k^2(T_{\parallel} - T_{\perp} - H^2/4\pi n_0)/m_i. \quad (2.132)$$

Эта неустойчивость допускает наглядную физическую интерпрета-цию. Воспользуемся тем, что альвеновские волны можно наглядно представить как колебания «упругих нитей» — силовых линий маг-нитного поля. Рассмотрим силы, возникающие при малом искрив-лении силовой линии в анизотропной плазме (рис. 2.20).

Так как частицы «привязаны» к силовым линиям, то при дви-жении по искривленному участку силовой линии возникает цен-тическая сила, направленная вдоль линии.

## тробежная сила

$$F_R = \int (m_i v_{\parallel}^2 / R) f d v_{\parallel} d\mu,$$

стремящаяся увеличить искривление. Здесь учтено, что при выполнении условий (2.130) можно пользоваться дрейфовым приближением, в рамках которого плазма рассматривается как совокупность квазичастиц — ларморовских кружков с сохраняющимися магнитным моментом  $\mu = w_{\perp}^2 / H$ . Распределение частиц тогда удобно описывать функцией  $f(\mu, v_{\parallel})$ , где  $v_{\parallel}$  — скорость вдоль постоянного магнитного поля;  $w_{\perp}$  — энергия вращения. Поскольку, кроме того, каждая квазичастица обладает магнитным моментом  $\mu H / H$ , ориентированным против магнитного поля  $H$ , то на них в неоднородном магнитном поле будет действовать сила, связанная с наличием тока намагничивания:

$$\mathbf{j}_s = \text{rot} \int \mu f d v_{\parallel} d\mu; \quad \mathbf{F}_s = [\mathbf{j}_s \times \mathbf{H}] = [\text{rot} \int \mu f (\mu, v_{\parallel}) d v_{\parallel} d\mu \times \mathbf{H}].$$

Эта сила вместе с силой «натяжения» лиши магнитного поля

$$\mathbf{F}_H = [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}]$$

стремится вернуть силовую линию в положение равновесия.

Если  $F_R > F_s + F_H$ , то система уходит от положения равновесия, т. е. возникает неустойчивость. В рассматриваемом возмущении отлична от нуля лишь компонента  $k_{\parallel}$  волнового вектора. После несложных выкладок получим следующее условие неустойчивости:

$$p_{\parallel} - p_{\perp} > H^2 / 4\pi, \quad \text{где } p_{\parallel} = \int m v_{\parallel}^2 f d v_{\parallel} d\mu; \quad p_{\perp} = \int \mu H^2 d v_{\parallel} d\mu.$$

Поскольку при выполнении условия (2.131) результатирующая сила все время уводит систему от положения равновесия, неустойчивость носит апериодический характер. Инкремент  $\Upsilon$  легко найти, сравнив сумму сил  $F_R - F_s - F_H$  к произведению массы элемента плазмы на ускорение:  $v = (d/dt)^c (E/H_0)$ . Но так как из уравнений Максвелла  $E = H \nabla / k c$ , то  $v = \nabla H / k H_0$ . Подставляя значение  $F$ , получаем [см. формулу (2.132)]

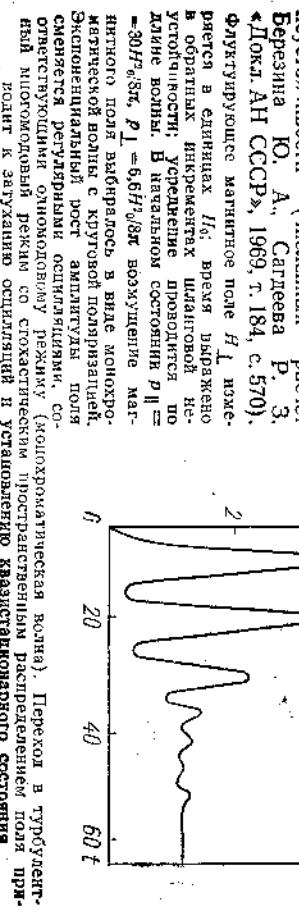
$$\Upsilon^2 = k^2 (p_{\parallel} - p_{\perp} - H^2 / 4\pi) / \rho. \quad (2.133)$$

В проведенном анализе действительно трудно было бы выделить какую-то группу резонансных частиц, ответственных за неустойчивость. Этот конкретный вид адабатической неустойчивости называют «шланговой» или центробежной (за очевидную аналогию с капризным поведением садового шланга, по которому подается мощная струя воды). Квазилинейный подход, применяющийся для описания поведения плазмы при развитии адабатических неустойчивостей, учитывает отсутствие резонансных частиц, а со-

Рис. 2.21. Рост флуктуаций магнитного поля  $\langle H_{\perp}^2 / 8\pi \rangle$  при шланговой неустойчивости (численный расчет

Берзина Ю. А., Сагдеева Р. З.

«Докл. АН СССР», 1969, т. 184, с. 570).



все частицы плазмы. На рис. 2.21 показаны результаты численного анализа шланговой неустойчивости для двухтемпературной  $T_{\parallel}, T_{\perp}$  бесстолкновительной гидродинамической модели.

### § 2.8. Взаимодействие волн с частицами плазмы в магнитном поле и квазилинейная диффузия

В этом параграфе будет продолжено исследование резонансного взаимодействия волн и частиц в магнитном поле.

Кроме резонансов (2.112), (2.113), возникающих при продольном распространении электромагнитной волны, в магнитном поле возможны и другие резонансы между частицами и волной. Прежде всего это резонанс Ландау между продольным движением частиц и волной:

$$\omega = k_z v_z. \quad (2.134)$$

Такой резонанс обычно существует, когда волна имеет составляющую электрического поля в направлении магнитного поля и частицы, продольные скорости которых  $v_z$  близки к соответствующей проекции фазовой скорости волны  $\omega/k_z$ , эффективно обмениваются энергией с электрическим полем волны. Резонанс (2.134) вполне аналогичен резонансу Ландау в изотропной плазме, детально исследованному в ч. I.

Новой особенностью волн в магнитном поле является возможность появления магнитных потенциальных ям, движущихся вместе с волнами. Для примера рассмотрим случай магнитозвуковой волны, распространяющейся под углом к магнитному полю. Продольная составляющая электрического поля в такой волне прецессионно мала, и резонанс Ландау связан с существованием для частиц магнитной потенциальной ямы.

При  $\omega \ll \omega_i$  сохраняются магнитные моменты электронов и ионов. В неоднородном магнитном поле волны на эти моменты действует сила  $\mu \nabla H$ . Волна с заданными  $\omega$  и  $k$  создает периодическую картину сгущений и разрежений силовых линий магнитного

поля, движущуюся с фазовой скоростью волны  $\omega/k$ . Под влиянием силы  $-\mu \nabla H$  резонансные частицы, скорости которых удовлетворяют условию (2.134), будут отражаться от областей стужения силовых линий и захватываться в магнитную потенциальную яму.

Рассуждения, аналогичные изложенным в ч. I, приводят к выводу о том, что декремент затухания волн, обусловленного рассматриваемым механизмом, как обычно, должен зависеть от производной функции распределения в резонансной точке:

$$\gamma \sim \int \mu d\delta / dv_z |_{v_z=\omega/k_z} d\mu. \quad (2.135)$$

Фазовая скорость магнитозвуковых волн по порядку величины равна  $H_0 / \sqrt{4\pi\rho}$ ; в достаточно сильном магнитном поле эта скорость значительно превышает тепловую скорость частиц, так что, вообще говоря, и здесь затухание оказывается экспоненциально малым. Период фазовых колебаний в магнитном поле получается из формулы (1.150) с помощью очевидной замены  $eE = ek_{z0} \rightarrow \mu k_z H$ . Таким образом,

$$\tau \sim 1 / \sqrt{\mu k_z^2 H / m}. \quad (2.135a)$$

Очевидно, что линейное затухание магнитозвуковой волны имеет место при достаточно малых амплитудах поля волны, когда частота  $1/T_0$  существенно меньше декремента затухания. Как мы уже знаем, при больших амплитудах захват резонансных частиц в потенциальную яму, созданную волной, и их фазовые осцилляции в этой яме выключают затухание Ландау и приводят к колебаниям амплитуды поля волны со временем.

Для магнитозвуковых волн также возможна пучковая неустойчивость при обращении знака производной функции распределения в формуле (2.135).

Для того чтобы получить общие условия резонанса волн и частиц в магнитном поле, рассмотрим, как будет происходить движение частиц в электрическом поле волны в произвольном случае на-клонного распространения  $\mathbf{k} = \{0, \mathbf{k}_\perp, k_z\}$ . Будем считать для простоты, что существенны только компоненты электрического поля, перпендикулярные к внешнему магнитному полю  $\mathbf{H}_0$ . Тогда уравнения движения заряженной частицы (электрона или иона) будут иметь вид (рассматривается нерелятивистское движение)

$$\left. \begin{aligned} m(dv_x/dt) &= eE_x \exp(-i\omega t + ik_\perp x + ik_z z) + (e/c)v_y H_0, \\ m(dv_y/dt) &= eE_y \exp(-i\omega t + ik_\perp x + ik_z z) - (e/c)v_x H_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.136)$$

Отсюда для  $v = v_x + iv_y$  получим

$$m(dv/dt) + i(eH_0/c)v = eE_+ \exp(-i\omega t + ik_\perp x + ik_z z), \quad (2.136a)$$

где  $E_+ = E_x + iE_y$ . Замена  $v = \tilde{v} \exp(-i\omega_0 t)$  в уравнении (2.136a) дает

$$d\tilde{v}/dt = (eE_+/m) \exp(-i\omega_0 t + i\omega_0 t + ik_\perp x + ik_z z). \quad (2.137)$$

Теперь воспользуемся тем, что рассматривается, как обычно, волна малой амплитуды. В данном случае это значит, что волна не слишком сильно возмущает траекторию частицы. Иначе говоря, в экспоненте, стоящей в правой части уравнения (2.136a), под  $x$  и  $z$  будем понимать их ненамушенные значения, соответствующие свободному движению частицы в магнитном поле:

$$\begin{aligned} dx/dt &= v_x \cos \omega_0 t - v_y \sin \omega_0 t, \\ dy/dt &= v_x \sin \omega_0 t + v_y \cos \omega_0 t, \\ dz/dt &= v_z. \end{aligned}$$

Тогда экспоненциальный множитель принимает вид

$$\mathcal{F}(t) = \exp[i(\omega_H - \omega - k_z v_z)t + i(k_\perp v_x/\omega_H)(1 - \cos \omega_0 t) -$$

$$- i(k_\perp v_y/\omega_H) \sin \omega_0 t].$$

В итоге возмущенное движение частицы определяется зависимостью от времени экспоненциального множителя  $\mathcal{F}(t)$ . Функция

$$\mathcal{F}_H(t) = \exp[-ik_\perp v_x/\omega_H] \sin \omega_0 t + i(k_\perp v_y/\omega_H)(1 - \cos \omega_0 t) \quad (2.138)$$

является периодической по  $t$  с периодом  $2\pi/\omega_0$ , и ее можно представить в виде ряда по  $\exp(in\omega_0 t)$ . Коэффициенты разложения для функции вида (2.138) после несложных преобразований можно выразить через бесселевы функции (именно так появляются цилиндрические функции в теории колебаний замагниченной плазмы). Мы не будем вдаваться в дальнейшие детали вычисления. Остановим внимание лишь на следующем существенном обстоятельстве. С учетом сказанного выше результатирующая вынуждающая сила [правая часть уравнения (2.137)], представляющая собой действие поля волны на частицу, оказывается суммой элементарных гармонических сил вида

$$\mathcal{F}_n \exp(-i\omega t + in\omega_0 t + ik_z v_z t).$$

Соответственно реакция частицы на такое воздействие есть просто сумма влияний отдельных сил:  $v_n \sim \mathcal{F}_n / (n\omega_0 + k_z v_z - \omega)$ . Наибольшего эффекта взаимодействие достигает при условии резонанса

$$\omega - k_z v_z = n\omega_0. \quad (2.139)$$

Здесь, очевидно,  $n$  принимает все целые значения:  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Резонанс при  $n = 1$  для электронов уже был рассмотрен ранее для случая взаимодействия с частицами необыкновенной электромагнитной волны, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля. Это циклотронный резонанс между электронами и элек-

трическим полем волны, вектор которого вращается в ту же сторону, что и электроны. В условиях резонанса учитывается Доплеровский сдвиг частоты  $\omega' = \omega - k_z v_z$  (в радиофизике условие резонанса с  $n=1$  часто называют резонансом при нормальном эффекте Доплера). Если бы в предыдущем параграфе было учтено движение ионов в необыкновенной волне, то условие их резонанса с волной имело бы вид

$$\omega - k_z v_z = -\omega_H. \quad (2.140)$$

(Поскольку ионы вращаются в сторону, обратную направлению вращения электрического вектора, то резонанс возможен только при достаточно большом Доплеровском сдвиге частоты, когда из-за этого сдвига частота меняет знак.)

Аналогичным образом условия резонансного взаимодействия обыкновенной электромагнитной волны с ионами и электронами имеют вид

$$\omega - k_z v_z = \omega_H;$$

$$(2.140a)$$

$\omega - k_z v_z = -\omega_H.$

Таким образом, наряду с циклотронным резонансом с  $n=1$  возможен также циклотронный резонанс с  $n=-1$ . Это так называемый циклотронный резонанс при аномальном эффекте Доплера. Заметим, что он возможен только при достаточно большой продольной скорости частиц  $v_z$ , превышающей fazovuyu скорость волны  $\omega/k_z$ .

Резонанс в условиях нормального и аномального эффектов Доплера были изучены довольно давно при рассмотрении излучения заряженных частиц в магнитном поле. Оказалось, что физическая картина, соответствующая этим двум резонансам, совершенно различна.

При нормальном эффекте Доплера излучение происходит из-за наличия полперечной составляющей энергии частицы, в данном случае ларморского осциллятора, и сопровождается переходом этого осциллятора на более низкий энергетический уровень. Резонанс возможен и в отсутствие продольного движения частиц  $v_z \rightarrow 0$ . Резонанс же при аномальном эффекте Доплера соответствует излучению волн в результате существования продольной энергии заряженной частицы. Излучение сопровождается увеличением полперечной энергии частицы, т. е. возбуждением ларморского осциллятора.

Так же, как излучение отдельной заряженной частицы, пучковая неустойчивость при аномальном эффекте Доплера развивается из-за присутствия продольной составляющей энергии пучка, т. е. обыкновенная электромагнитная волна может возбуждаться электронным пучком, движущимся вдоль магнитного поля. При нормальном эффекте Доплера пучковая неустойчивость развивается из-за существования полперечной составляющей энергии пучка лар-

мовых осцилляторов. Действительно, инкремент пучковой неустойчивости необыкновенной волны, полученный в предыдущем параграфе, обращается в нуль при  $v_{\perp} \rightarrow 0$ . Рассмотрим циклотронную неустойчивость электромагнитных волн. Для многих физических приложений, в первую очередь для физики магнитосферы, чрезвычайно важной оказывается циклотронная неустойчивость ионных и электронных систем, т. е. обыкновенной волны при  $\omega \leq \omega_H$  и необыкновенной волны при  $\omega \leq \omega_{He}$ . Показатель преломления таких волн достаточно велик ( $ck/\omega \gg 1$ ), и поэтому при рассмотрении их неустойчивости можно не учитывать релятивистские эффекты в движении резонансных частиц.

Кроме гидродинамической циклотронной неустойчивости, которая исследовалась в предыдущем параграфе, возможна также кинетическая неустойчивость. В этом случае так как резонансные частицы имеют неравновесную функцию распределения (пучок, андротрия распределения по скоростям), то может происходить обрашение знака декремента циклотронного затухания в формуле (2.115). Эта формула описывает взаимодействие резонансных электронов с необыкновенной волной, но ее можно легко обобщить на случай взаимодействия с такой же волной резонансных ионов:

$$Y_i = \frac{2\pi e^2}{m_i} \frac{\omega}{|k|} \frac{1}{d\omega} \frac{1}{(\omega^2 N(\omega))} \int d\mathbf{v}_{\perp} v_{\perp} \left[ \left( 1 - \frac{k v_z}{\omega} \right) \frac{\partial f_i}{\partial v_{\perp}} + \frac{k v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_i}{\partial v_z} \right]. \quad (2.141)$$

Отметим, что как и в ч. I, формулы для декремента (инкремента) амплитуды волны можно получить не только формальным решением дисперсионного уравнения, но и с помощью простого энергетического подхода, основанного на балансе энергии в системе: волна — резонансные частицы.

Из формулы для циклотронного декремента (инкремента) необыкновенной волны следует, что условие возникновения циклотронной неустойчивости имеет вид

$$\int d\mathbf{v}_{\perp} v_{\perp} \left[ \left( 1 - \frac{k v_z}{\omega} \right) \frac{\partial f_i}{\partial v_{\perp}} + \frac{k v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_i}{\partial v_z} \right] \Big|_{v_z = (\omega - \omega_H)/k} > 0. \quad (2.142)$$

Покажем, как это условие реализуется в плазме с неизогропным Максвелловским распределением по скоростям (с разными продольной и полперечной температурами):

$$f_i \sim \exp \left\{ -mv_{\perp}^2 / 2T_{\perp} - mv_z^2 / 2T_z \right\}.$$

Выполняя интегрирование по  $v_{\perp}$ , находим, что критерий неустойчивости в этом случае имеет вид

$$T_{\perp}/T_z + (\omega_{He}/\omega)(1 - T_{\perp}/T_z) < 0 \text{ (для электронов);} \quad (2.143)$$

При этом для необыкновенной волны циклотронная неустойчивость на электронах возникает при  $T_{\perp} > T_{\parallel}$  (нормальный эффект Доплера), а на ионах — при  $T_{\parallel} > T_{\perp}$  (аномальный эффект Доплера).

Для обыкновенной волны неустойчивость на ионах и электронах имеет место при обратных соотношениях между температурами.

Циклотронная неустойчивость синтетов (или геликонов) играет фундаментальную роль в динамике радиационных поясов Земли.

В существовании такой неустойчивости можно убедиться, если конкретные функции распределения частиц радиационных поясов — энергичных протонов и электронов — подставить в критерий (2.142). На рис. 2.22 показаны примеры функций распределения энергичных частиц в магнитосфере Земли по данным измерений на спутниках.

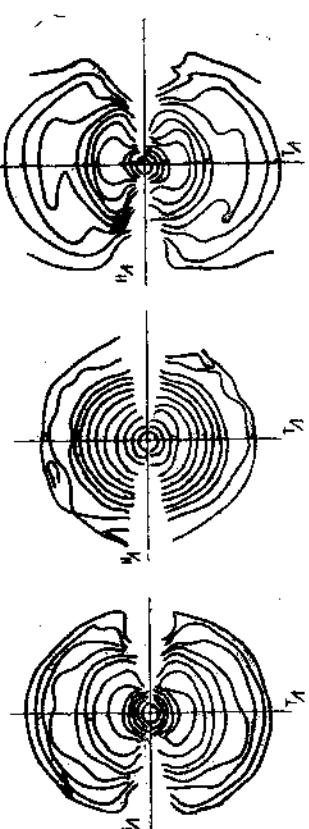


Рис. 2.22. Контуры линий уровня функции распределения протонов в радиационном поясе Земли.

Скорость дана в масштабе  $10^7 \text{ см}/\text{с}$  на единицу. При показанных распределениях соответствует траекториям областей вектора траектории спутника на которых проходит измерение функции распределения протонов. Условия для яконо-циклической неустойчивости вытекают из счет распределения с опустошением «конусом погрешности» (Williams D. J. Physics of Hot Plasma in Magnetosphere. Ed. by B. Nauk. L. Stenflo. London, Plenum Press, 1975)

Для конкретности проведем дальнейшие выкладки для модельного Максвелловского распределения с неизотропными температурами. Это, конечно, является идеализацией, так как «резонансные» частицы, вызывающие неустойчивость в магнитосферной плазме, разумеется, не описываются максвелловским распределением. Из (2.143) следует, что неустойчивость имеет место даже при очень малой анизотропии температур  $|T_{\perp} - T_{\parallel}|/T_{\perp} \ll 1$ , при этом, однако, инкремент  $\gamma$  оказывается экспоненциально малым. Действительно, упрощенно

$$f_{\perp} |v_{\perp}| = (\omega - \omega_H)/k_{\perp} \sim \exp \{-(m/2)[(\omega - \omega_H)^2 / T_{\perp}] k_{\perp}^2\}.$$

При  $\omega \ll \omega_H$ ,  $k_{\perp}^2 = \omega^2 / v_A^2$  и так как согласно (2.143) неустойчивость имеет место для  $\omega \leq \omega_H$ ,  $|T_{\parallel} - T_{\perp}|/T_{\perp} \ll 1$ , то для наиболее «опасных»

волны инкремент  $\gamma$  будет пропорционален

$$\exp \{-(m_i/2)(v_A^2/T_{\parallel})[T_{\parallel}/(T_{\parallel} - T_{\perp})]^2\}.$$

Следует заметить, что в реальной ситуации при малой анизотропии рассмотренная неустойчивость может и не возникнуть, если, например, в «обрезанном» максвелловском распределении отсутствуют частицы с большими продольными скоростями:

$$v_z \sim \sqrt{T/m_i} T/(T_{\parallel} - T_{\perp}),$$

ответственные за раскачку колебаний. Это приводит к тому, что на практике нарастание волн вследствие подобной неустойчивости может быть заметным лишь при достаточно высокой степени анизотропии, тем большей, чем больше отношение магнитного давления к плазменному.

Пусть, например,  $T_{\perp} > T_{\parallel}$ . Не будем заранее считать анизотропию температур малой, т. е. не будем предполагать выполненным условие  $\omega \ll \omega_H$ . Опеким, при какой степени анизотропии экспонента  $\exp \{-(m_i/2)[(\omega - \omega_H)^2 / T_{\parallel} k_{\perp}^2]\}$ , входящая в выражение для инкремента, станет порядка единицы:

$$m_i (\omega - \omega_H)^2 / T_{\parallel} k_{\perp}^2 \sim 1. \quad (2.144)$$

Квадрат волнового вектора  $k^2$  можно выразить через  $\omega$  с помощью дисперсионного соотношения для «холодной» плазмы, вывод которого приведен выше (см. § 2.6):

$$k^2 c^2 / \omega^2 = \omega_0^2 / [\omega_H(\omega_H - \omega)]$$

(если речь идет о волне, вектор поляризации которой вращается в направлении вращения ионов в магнитном поле). Поставляя  $k^2 = \omega_0^2 / \omega^2 [c^2 \omega_H(\omega_H - \omega)]$  в (2.144) и учитывая, что согласно (2.143) для неустойчивости необходимо  $\omega < \omega_H(1 - T_{\parallel i}/T_{\perp i})$  получаем

$$T_{\perp i} / T_{\parallel i} \geq \sqrt{H^2 / 8 \pi n T_{\perp i}}. \quad (2.145)$$

При этом условии инкремент неустойчивости становится заметным. Аналогичное условие имеет место и для волны, поляризованной в направлении вращения электронов. Ясно, что при прочих равных условиях электронная ветвь должна иметь больший инкремент.

Развивая последовательно аналогию с продольными колебаниями, для рассматриваемого взаимодействия между частичами и волнами при циклотронном резонансе можно рассмотреть квазилинейную стадию, которая должна учитывать обратное влияние волн на распределение частиц по скоростям (в данном случае по  $v_z$  и  $v_{\perp}$ ). Для простоты и здесь ограничимся простейшими случаями, а именно ионными и электронными циклотронными волнами (систами), распространяющимися вдоль  $H_0$ . Ограничение случа-

ем параллельного распространения упрощает алгебру, позволяя рассматривать только основную гармонику циклотронного резонанса и освобождая от необходимости выписывать громоздкие формулы с функциями Бесселя. Но в то же время оно не вносит существенных изменений в физическую картину.

Будем исходить из кинетического уравнения

$$\partial f / \partial t + v_z (\partial f / \partial z) - \omega_H (\partial f / \partial \varphi) + (e/m) \{ E_{\perp} + (1/c) [v \times H_{\perp}] \} (\partial f / \partial v) = 0$$

и уравнений Максвелла для  $E_{\perp}$ ,  $H_{\perp}$ . Если представить функцию распределения в виде суммы медленно и быстро меняющихся частей:  $f = f_1(t, v_{\perp}, v_z) + f_2$ , и воспользоваться формулой для  $f_1$ , то уравнение для медленно меняющейся части принимает вид [см. (1.192)]

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \left( \frac{e}{m} \right)^2 \sum_k \left[ \left( 1 - \frac{k v_z}{\omega_k - \omega} \right) \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} + \frac{k v_{\perp}}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial v_z} \right] \times$$

$$X_i \frac{|E_k|^2}{|E_k - \omega_k - \omega|} \left[ \left( 1 - \frac{k v_z}{\omega_k} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{k v_{\perp}}{\omega_k} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right]. \quad (2.146)$$

Знак  $\mp$  в резонансном знаменателе относится к право- или левополаризованным (обыкновенной и необыкновенной) волнам. В резонансной области это уравнение можно упростить:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \pi \left( \frac{e}{m} \right)^2 \sum_k \left[ \left( 1 - \frac{k v_z}{\omega_k} \right) \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} + \frac{k v_{\perp}}{\omega_k} \right] |E_k|^2 \delta(\omega_k - kv_z \pm \omega_H) \times$$

$$\times \left[ \left( 1 - \frac{k v_z}{\omega_k} \right) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{k v_{\perp}}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial v_z} \right] f_0. \quad (2.147)$$

В качестве примера применения уравнения (2.147) рассмотрим задачу о поглощении частицами одномерного волнового пакета. Резонансная область скоростей  $v_z$ , соответствующая такому волновому пакету, изображена на рис. 2.23. Она лежит в левой полуплоскости, так как  $v_z = (\omega - \omega_H)/k$  отрицательно для свистов ( $\omega < \omega_H$ ). Окружности изображают линии уровня для первоначально изотропного распределения по скоростям. Так же, как и в квазилинейной теории лентгмировских колебаний, резонансные частицы диф-

фундируют до тех пор, пока не достигается установленное состояние «плато». Для достаточно узкого волнового пакета  $[\Delta(\omega/k)] \ll \omega/k$  установившееся состояние таково, что

$$\{ [1 - (kv_z/\omega)] (\partial f_0 / \partial v_{\perp}) + (kv_{\perp}/\omega) (\partial f_0 / \partial v_z) \} = 0. \quad (2.148)$$

При достижении такого состояния диффузия прекращается, как это видно из сравнения (2.148) с уравнением (2.147). Это условие определяет плато для рассматриваемого случая по аналогии с условиями  $d^2 f_0 / d v^2 = 0$  (плато в квазилинейной теории лентгмировских колебаний). Линии уровня установленного распределения по скоростям (линии равных значений функции распределения), удовлетворяющие уравнению (2.148), определяются уравнением

$$\frac{v_{\perp}^2 + v_z^2}{2} - \omega v_z = \text{const} \quad (2.149)$$

В этом можно убедиться, если функцию распределения вида  $f_0(v_{\perp}^2 + v_z^2)/2 - \omega v_z/k$  подставить в уравнение (2.147). Линии уровня представляют собой окружности, но их центры смешены вправо на расстояние  $\omega/k$  (см. рис. 2.21). Сравнивая условия «плато» с уравнением (2.115) для декремента затухания, видим, что декремент затухания свистов в состоянии плато обращается в нуль (аналогично случаю лентгмировских колебаний).

Квазилинейная диффузия такого типа, если она возникает в результате неизотропной неустойчивости плазмы в ловушке с магнитными пробками, например в магнитосфере, приводит к диффузии вектора скорости частиц из области удержания в конус потерь. оказывается, что в условиях магнитосферы Земли это важнейший механизм, определяющий время жизни частиц в радиационных поясах.

Эта диффузия связана с возбуждением электромагнитных волн типа свистов. Однако к диффузии в конус потерь может приводить и другой механизм, связанный с возбуждением электростатических колебаний. В лабораторных магнитных ловушках плазма помешана в сильное магнитное поле и, как правило, электронная циклотронная частота превышает плазменную. Электроны в этих условиях оказываются замагниченными.

Рассмотрим колебания, электрический вектор которых почти перпендикулярен к магнитному полю. Из-за замагниченности электронов их движение при колебаниях происходит не вдоль электрического вектора, как в изотропной плазме, а только вдоль магнитного поля (рис. 2.24). В результате частота колебаний существенно

Рис. 2.23. «Линии уровня» в плоскости  $v_{\perp}, v_z$  в результате квазилинейной теории лентгмировских колебаний, резонансные частоты в плазме

но уменьшается по сравнению с электронной плазменной  $\omega_{pe}$ , и такие низкочастотные колебания могут оказаться в резонансе с захваченными в ловушку ионами.

Действительно, из дисперсионного уравнения продольных колебаний плазмы (2.96) следует, что при  $\omega \ll \omega_{pe}$  частота электронных лентмировских колебаний в замагниченной плазме

$$\omega = \omega_{pe} \cos \theta \quad (2.150)$$

(см. рис. 2.14, вторая ветвь колебаний).

Покажем, что взаимодействие этих колебаний с захваченными в ловушку ионами действительно приводит к неустойчивости. При

слишком малых значениях отношения  $k_z/k$  частота  $\omega$  остается все же существенно больше ионной циклотронной частоты. В этом случае магнитное поле не влияет на взаимодействие ионов с волной (незамагниченные ионы) и эффективное взаимодействие имеет место при условии выполнения резонанса Ландау. Тогда влияние магнитного поля на ионы проявляется только в том, что магнитное поле «размешивает» их функцию распределения по углам ларморского вращения. Поэтому функция распределения ионов в ловушке имеет вид

$$f_0(v) = f_0(v_x^* + v_y^*, v_z). \quad (2.151)$$

Ионы с достаточно малой поперечной скоростью  $v_\perp \leq v_a \sqrt{H_m/H_0 - 1}$  ( $H_m/H_0$  — «пробочное» отношение) попадают в конус потерь и уходят из ловушки. В результате этого функция распределения ионов в ловушке имеет вид, представленный на рис. 2.25. Покажем, что при такой функции распределения ионов всегда существует распространяющаяся почти перпендикулярно к магнитному полю неустойчивые электростатические колебания, и определим фазовые

скорости этих колебаний.

Пусть для определенности волна распространяется по оси  $y$ . Инкремент неустойчивости  $\gamma = dg/d\varphi$ , где  $g$  — функция распределения, проинтегрированная по поперечным (по отношению к волне) компонентам скорости  $v_x, v_z$ . Для возникновения неустойчивости необходимо, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \int f(v_\perp, v_z) dv_x dv_z \Big|_{v_y=0/k} > 0. \quad (2.152)$$

Левую часть этого неравенства распишем следующим образом, переходя к интегрированию по полярным координатам  $v_\perp, v_z, \varphi$ :

$$\begin{aligned} \int dv_x dv_z dv_\perp (\partial/\partial v_y) f(v_\perp, v_z) \delta(v_y - \omega/k) = \\ = (2\omega/k) \int v_\perp dv_\perp dv_\perp (\partial/\partial v_\perp) f(v_\perp, v_z) \delta(v_\perp \sin \varphi - \omega/k). \end{aligned}$$

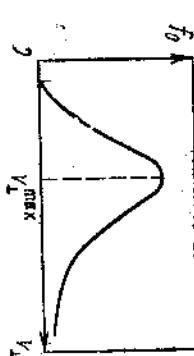


Рис. 2.25. Функция распределения ионов в ловушке с «конусом потерь»

«размешивает» их функцию распределения по углам ларморского вращения. Поэтому функция распределения ионов в ловушке имеет вид

$$f_0(v) = f_0(v_x^* + v_y^*, v_z). \quad (2.151)$$

Ионы с достаточно малой поперечной скоростью  $v_\perp \leq v_a \sqrt{H_m/H_0 - 1}$  ( $H_m/H_0$  — «пробочное» отношение) попадают в конус потерь и уходят из ловушки. В результате этого функция распределения ионов в ловушке имеет вид, представленный на рис. 2.25. Покажем, что при такой функции распределения ионов всегда существует распространяющаяся почти перпендикулярно к магнитному полю неустойчивые электростатические колебания, и определим фазовые

$$\begin{aligned} \left[ 1 - (\omega_{pe}/\omega)^2 \cos^2 \theta - (4\pi e^2/m_i k^2) \int k (\partial f_0^*/\partial v) (kv - \omega)^{-1} d\mathbf{v} \right] \\ \times [1/(kv - \omega)] = 0. \quad (2.155) \end{aligned}$$

Будем считать, что ионы определяют только минимую часть частоты, и соответственно этому в последнем слагаемом учтем только минимую часть резонансного знаменателя:

$$\text{Im} [1/(kv - \omega)] = \pi \delta(kv - \omega).$$

Преобразуем интеграл по скоростям, переходя к полярным координатам  $v_\perp, \Phi, v_z$  и интегрируя по  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \int k (\partial f_0^*/\partial v_\perp) \sin \Phi (kv_\perp \sin \Phi - \omega) v_\perp dv_\perp dv_z \\ = \omega \int \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial f_0^*}{\partial v_\perp} \frac{1}{\sqrt{k^2 v_\perp^2 - \omega^2}} v_\perp dv_\perp dv_z \Big|_{v_\perp \geq \omega/k}. \end{aligned}$$

Окончательно получим следующее дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{4\pi^2 e^2}{m_i k^2} \omega \int \frac{\partial f_0^*}{\partial v_\perp} \frac{1}{\sqrt{k^2 v_\perp^2 - \omega^2}} dv_\perp^* dv_z = 0. \quad (2.156)$$

Интеграл по  $\Phi$  легко вычисляется, и в итоге условие неустойчивости записывается следующим образом:

$$\int (\partial f_0^*/\partial v_\perp) dv_\perp^* dv_z / \sqrt{v_\perp^2 - \omega^2/k^2} > 0. \quad (2.153)$$

Если бы в подынтегральном выражении отсутствовал множитель  $[v_\perp^2 - \omega^2/k^2]^{-1/2}$ , то для функции распределения (см. рис. 2.23) интеграл в левой части неравенства (2.153) обратился бы в нуль. Интеграл положителен при выполнении условия

$$\omega/k < \sigma_\perp^{\max}, \quad (2.154)$$

поскольку в этом случае при интегрировании по  $v_\perp$  наиболее существенная область, где  $\partial f_0^*/\partial v_\perp > 0$ . Таким образом, неустойчивыми оказываются все колебания с фазовыми скоростями, удовлетворяющими неравенству (2.154).

Условие возникновения неустойчивости, так же как и инкремент нарастания, конечно, можно получить из дисперсионного уравнения лентмировских колебаний, приведенного в ч. I. В этом уравнении необходимо учесть, что электроны замагничены, а в резонансе с колебаниями могут попадать только ионы, и, следовательно, только их нужно рассматривать в кинетическом приближении. Функция распределения ионов определяется формулой (2.151). С учетом этих замечаний дисперсионное уравнение преобразуется следующим образом:

$$[1 - (\omega_{pe}/\omega)^2 \cos^2 \theta - (4\pi e^2/m_i k^2) \int k (\partial f_0^*/\partial v) (kv - \omega)^{-1} d\mathbf{v}] \times [1/(kv - \omega)] = 0.$$

Из этого уравнения следует, что частота колебаний определяется формулой (2.150), а инкремент нарастания амплитуды

$$\gamma = \frac{2\pi^2 e^2}{m_i} \frac{\omega^2}{k^2} \int_{v_1 > \omega/k} \frac{\partial f_0}{\partial v^2} \frac{dv^2}{\sqrt{k^2 v^2 - \omega^2}} \quad (2.157)$$

[см. условие возникновения неустойчивости (2.153)]. Возникающая при выполнении условия (2.153) неустойчивость хорошо известна в физике плазмы. Это так называемая конусная неустойчивость, которая должна весьма существенно влиять на динамику частиц в ловушках с сильным магнитным полем. Из-за неустойчивости функция распределения, показанная на рис. 2.23, должна первоходить в состояние с плато в той области скоростей, где первоначально  $\partial f_0 / \partial v^2 \perp > 0$ . В этом случае происходит диффузия частиц в пространстве скоростей в сторону убывания  $v^2$ , т. е. уход частиц в конус потерь. Таким образом, развитие конусной неустойчивости должно стать причиной быстрого ухода плазмы из ловушки.

### § 2.9. Равновесие плазмы в магнитном поле

Подобно тому как в механике обычной жидкости простейшим случаем является гидростатика, т. е. раздел гидродинамики, изучающий равновесие жидкой или газообразной среды, в магнитной гидродинамике плазмы можно выделить раздел о равновесии плазмы в магнитном поле. В таких состояниях левая часть магнитогидродинамического уравнения Эйлера (2.57), описывающая инерцию плазмы, полагается равной нулю, и в результате получается уравнение

$$(1/c)[\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = \text{grad } p, \quad (2.158)$$

означающее, что сумма объемных сил, действующих на плазму, равна нулю в любой точке внутри плазмы.

Первым следствием условия равновесия плазмы (2.158) является постоянство ее давления вдоль силовых линий магнитного поля, так как  $[\mathbf{j} \times \mathbf{H}] \perp \mathbf{H}$ . В произвольном случае магнитное поле может иметь довольно сложный характер и свойства равновесного состояния плазмы оказываются непростыми. Задачи такого рода имеют важное значение в проблеме управляемого термоядерного синтеза. Здесь же мы рассмотрим простейший случай равновесия плазмы в магнитном поле с прямолинейными и параллельными друг другу силовыми линиями магнитного поля, иначе говоря, равновесие плазмы в продольном магнитном поле. Магнитное поле имеет только одну компоненту  $H_z$ , которая является функцией координат  $x$  и  $y$  (в плоскости, перпендикулярной к полю). В этом случае условие равновесия принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -(1/8\pi) \frac{\partial H_z^2}{\partial x}, \quad (2.159)$$

Следовательно,

$$p + H_z^2/8\pi = \text{const}. \quad (2.160)$$

Это соотношение показывает, что магнитное давление  $H_z^2/8\pi$  за пределами области, занятой плазмой, больше, чем внутри нее, на величину  $p_{\text{max}}$ . Максимальное давление, при котором плазма может удерживаться полем заданной напряженности  $H_0$ , определяется из условия

$$p_{\text{max}} = H_0^2/8\pi. \quad (2.161)$$

Видно, что магнитное поле внутри плазмы оказывается меньше внешнего поля; это следствие того, что плазма полностью вытесняет диамагнетик. В этом случае плазма должна полностью вытеснить поле из занимаемой ею области пространства.

До сих пор, говоря о равновесии плазмы в магнитном поле, мы использовали лишь одно из уравнений магнитной гидродинамики — уравнение Эйлера, в котором считали  $du/dt = 0$ . Выясним, совместим ли это допущение с остальными уравнениями магнитной гидродинамики. Исходя из уравнения

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x H_z) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y H_z) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) H_z, \quad (2.162)$$

приходим к выводу о неизбежности диффузии магнитного поля внутрь объема, занимаемого плазмой, т. е. в область более слабого поля. Таким образом, магнитное поле, вообще говоря, будет изменяться во времени. Но тогда давление плазмы, жестко связанное с магнитным давлением условием равновесия (2.160), тоже должно меняться, т. е. будет происходить изменение распределения плазмы в пространстве. Этот встречный процесс также имеет диффузионный характер. Коэффициент диффузии плазмы, очевидно, имеет такой же порядок величины, как и  $D_m = c^2/4\pi\sigma$ , если давление плазмы сравнимо с давлением магнитного поля  $p = H_z^2/8\pi$ .

Уравнение, описывающее процесс диффузии плазмы в магнитном поле при  $p \ll H_z^2/8\pi$ , можно вывести следующим образом. Равновесие плазмы достигается в результате протекания тока плотностью

$$\mathbf{j} = (c/H) \nabla p. \quad (2.163)$$

Электрический ток связан с относительным движением электронов и ионов плазмы со скоростью  $j/en$ . Электрическое сопротивление такому току есть следствие силы трения между электронами и ионами плазмы:

$$\mathbf{F} = m_e (j/en) v_{te}, \quad (2.164)$$

где  $v_{te} = 1/v_{ei}$  — время свободного пробега электронов по отношению к соударениям с ионами. Точно так же, как рассматривалася дрейф заряженных частиц под действием произвольной силы  $F$ , можно говорить о дрейфе электронов и ионов под действием силы трения.

Скорость такого дрейфа

$$u_d = c(m_e/eH^2n)v_{te}[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]. \quad (2.165)$$

Она одинакова для ионов и электронов, поскольку разные знаки зарядов ионов и электронов компенсируются взаимно противоположными направлениями сил трения. Поэтому в процессе такого дрейфа электрическая нейтральность плазмы не нарушается. Подставим теперь найденную скорость  $v_d$  движения плазмы под действием сил трения в уравнение непрерывности. Получим уравнение диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{n} v_d \approx (c^2 p / \sigma H^2) \Delta n. \quad (2.166)$$

В результате проведенного анализа можно сделать вывод, что в реальном случае плазмы с конечной электропроводностью строго равновесия не существует, так как скорость плазмы отлична от нуля. Это значит, что инерционный член в уравнении Эйлера, вообще говоря, не обращается в нуль и можно говорить лишь о приближенном выполнении условия равновесия. Это условие выполняется с тем большей точностью, чем меньше относительная величина инерционного члена.

Допустим, что  $\tau_p$  — характерное время, за которое происходит изменение плотности плазмы. Тогда сделанное приближение справедливо при условии

$$|n v_d \tau_p| \ll (1/c) |\mathbf{j} \times \mathbf{H}|.$$

Подставляя из (2.165), получаем

$$1/\tau_{\text{диф}} \ll \omega_{pe}. \quad (2.167)$$

Отсюда видно, что чем выше степень замагниченности плазмы, тем с большим правом можно говорить о ее равновесии.

Из рассмотренной картины диффузии плазмы в магнитном поле вытекает еще одно следствие: диффузия связана со столкновениями между частицами разного сорта — между электронами и ионами (столкновения между одинаковыми частицами в рассмотренном приближении не приводят к диффузии, так как не дают силы трения). Используя уравнение диффузии плазмы (2.166), нетрудно оценить время диффузии (т. е. время, за которое распределение плотности плазмы существенно изменится). Это время

$$\tau_p \sim L_p^2/D_1 \sim L_p^2 H^2/c^2 p. \quad (2.168)$$

Таким образом, данное равновесие плазмы имеет конечное время жизни порядка  $\tau_p$ .

Полезно привести еще один вывод коэффициента диффузии плазмы попереk магнитного поля, рассматривая случайные столкновения частиц вследствие столкновений. За время одного свободного пробега  $\tau_{ei}$  электрон в среднем испытывает одно кулоновское столкновение, в результате которого он смещается в плоскости, перпендикулярной к  $H$ , на расстояние порядка ларморского радиуса  $r_{He}$ . При многократных столкновениях согласно статистической законам складываются квадраты отдельных смещений. Поэтому за время  $t$  частица сместится перпендикулярно к  $H$  на рас-

стояние

$$\Delta x \sim r_{He} \sqrt{t/\tau_{ei}}. \quad (2.169)$$

Кроме того, среднее смещение при таком диффузионном процессе должно быть порядка  $\sqrt{D_1 t}$ . Следовательно,

$$D_1 \sim r_{He}^2/\tau_{ei}. \quad (2.170)$$

Вследствие квазинейтральности плазмы скорость ее диффузии в направлении, перпендикулярном к  $H$ , должна практически совпадать со скоростью диффузии электронов, так как при сравнимых значениях температуры электроны из-за меньшей величины ларморового радиуса блюжают попереk поля гораздо медленнее, чем ионы. Поэтому формула (2.170) дает оценку коэффициента диффузии для плазмы в целом. Среднее время между двумя столкновениями  $\tau = m e / ne^2$ . Поэтому

$$D_1 \sim r_H^2/\tau \sim v_F^2 m_e c^2 n e^2 / e^2 H^2 m_e \sim c^2 p / \sigma H^2. \quad (2.171)$$

По поряку величины этот результат совпадает с найденным ранее коэффициентом диффузии (2.166).

В диффузию рассмотренного типа дают вклад только столкновения электронов с ионами, но не электронов между собой. Это обстоятельство может ускользнуть от внимания, если ограничиться лишь грубой моделью случайных блужданий. Вот почему макроскопический полюс, основанный на силе трения, особенно по-лезен. Он автоматически учитывает, что столкновения между электронами не создают средней силы трения, а следовательно, и диффузионного дрейфа.

Очевидно, что теплопроводность плазмы в направлении, перпендикулярном к  $H$ , также должна резко снижаться при увеличении напряженности поля. В противоположность диффузии, которая обусловлена столкновениями между ионами и электронами, теплопередача в плазме попереk силовых линий происходит в основном в результате ион-ионных столкновений (если  $T_i$  не слишком мало по сравнению с  $T_e$ ). Это объясняется тем, что интенсивность теплопередачи зависит от ширины той области, в пределах которой при наличии градиента температуры перемещиваются траектории частиц с различной тепловой энергией. Коэффициент теплопроводности в направлении, перпендикулярном к  $H$ , пропорционален квадрату ширины области перемещивания, а эта ширина по порядку величины сравнима с ларморским радиусом. Поэтому теплопередача в основном идет через ионную компоненту  $k_L \sim r_{He}^2/\tau_{ei}$ .

Отсюда видно, что коэффициент ионной теплопроводности в направлении, перпендикулярном к силовым линиям, уменьшается примерно в  $(\omega_{pe})^2$  раз по сравнению с тем значением, которое он имеет в отсутствие магнитного поля. Коэффициент попереkной теплопроводности для водородной плазмы можно вычислить, пользу-

зуюсь следующей формулой:

$$\chi_{\perp} \approx 2 \cdot 10^{-16} n^2 / H^2 \sqrt{T_r}, \quad (2.172)$$

В различных приложениях физики плазмы рассматриваются достаточно сложные типы равновесия плазмы в магнитном поле (так называемые магнитогидродинамические равновесные конфигурации). Однако и в таких произвольных случаях сохраняется основной вывод, сделанный здесь на примере магнитного поля, имеющего только одну компоненту: равновесие имеет условный характер, так как оно с течением времени разрушается из-за диффузии и теплоотвода. В сложных равновесных конфигурациях выражения для коэффициентов диффузии и теплопроводности плазмы поперек магнитного поля могут заметно отличаться от (2.171) и (2.172). Это можно понять, если вспомнить, насколько сложными могут быть дрейфовые траектории электронов и ионов в произвольных магнитных полях. В таких полях в качестве элементарного шата в схеме случайных блужданий частицы может входить величина, намного превышающая ларморовский радиус частицы. Некоторые эффекты такого типа, важные для исследований по управляемым термоядерным реакциям, рассмотрены в параграфе, посвященном токамаку.

## § 2.10. Примеры равновесия плазмы в магнитном поле. Токамак

Простейшим конкретным примером применения основных уравнений магнитогидродинамики (2.60), (2.63) может служить изолированный плазменный столб цилиндрической формы, удерживающий магнитным полем протекающего в плазме продольного тока (рис. 2.26). При равновесии радиальный градиент давления в плазменном столбе должен быть равен электродинамической силе  $(1/c_j) j_z H_\varphi$ , где  $j_z$  — плотность продольного тока, а  $H_\varphi$  — напряженность магнитного поля тока. Силовые линии этого поля имеют кольцевую форму. Величины  $j_z$  и  $H_\varphi$  в случае цилиндрической симметрии связаны соотношением

$$j_z = (c/4\pi r) (d/dr)(rH_\varphi),$$

следовательно,

$$-dp/dr = (1/4\pi) (H_\varphi/r) (d/dr)(rH_\varphi). \quad (2.173)$$

Огюста

$$-\int_0^a (dp/dr) r^2 dr = (1/8\pi) a^2 H_\varphi^2 (a). \quad (2.174)$$

Здесь верхний предел интегрирования по  $r$  принят равным радиусу сечения плазменного цилиндра  $a$ . На границе плазмы  $r=0$ . По-

этому

$$-\int_0^a (dp/dr) r^2 dr = 2 \int_0^a pr dr = \bar{p} a^2 \quad (2.174a)$$

где  $\bar{p}$  — среднее значение давления плазмы в столбе. Из (2.174) и (2.174a) следует, что  $\bar{p}$  пропорционально квадрату напряженности магнитного поля на границе плазмы:

$$\bar{p} = H_\varphi^2 (a)/8\pi.$$

Образование плазменного столба, удерживаемого давлением магнитного поля протекающего по нему тока, носит название линейного пинч-эффекта. При пропускании тока через прижатую разрядную трубку, заполненную газом, сначала должна возникнуть плазма (в результате ионизации газа), затем под действием электродинамических сил она начнет сжиматься и в результате может образоваться стянутый к оси плазменный столб. Так в этом случае выполняет сразу три функции: он создает плазму, нагревает ее за счет джоулева тепла и уравновешивает давление плазмы в сжатом плазменном столбе с помощью давления собственного магнитного поля. В начальный период исследования по физике высокотемпературной плазмы этот метод достиженем высоких температур благодаря своей кажущейся простоте предстался очень перспективным.

Казалось, что если пропустить через газ при низком давлении импульсный ток достаточно большой силы, то за неподолжный промежуток времени в разрядной трубке возникнет раскаленный плазменный шнур с огромной температурой.

Однако практически в экспериментах с такой геометрией не удалось поднять температуру плазмы выше  $\sim 1 \cdot 10^6$  К, и то всего лишь на несколько микросекунд. Как показали эксперименты, развитие кратковременного импульсного разряда с большой силой тока не приводит к образованию квазистационарного состояния, определяемого условием равновесия (2.173). Постфактум сейчас можно было сказать, что при некоторой проницаемости это можно было бы предвидеть заранее. Не учтенный оказался важнейший физический фактор — неустойчивость «гибкого» проводника, каковым является плазменный столб с током. За очень короткий промежуток времени (в обычных условиях эксперимента — за несколько микро-

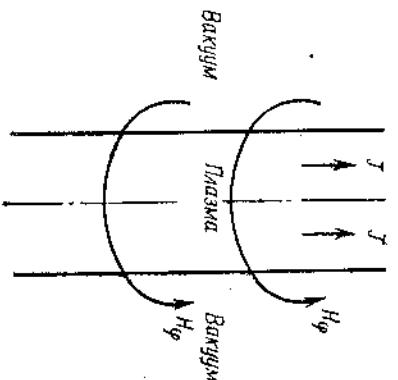


Рис. 2.26. Равновесие плазменного столба, удерживаемого магнитным полем собственного осевого тока (пинч)

секунд) в плазменном шнуре развиваются деформации, напоминающие «перетяжки» и «изгибы» (рис. 2.27). Они разрушают привильную геометрическую структуру плазменного образования, в результате чего плазма начинает сильно взаимодействовать со стенками и быстро охлаждается.

На этом конкретном примере мы впервые встретились с одной из центральных проблем физики плазмы — проблемой устойчивости плазменных конфигураций. Общий анализ относящегося сюда широкого комплекса явлений составит содержание ряда следующих параграфов.

Хотя первая попытка получить высокотемпературную плазму в равновесном состоянии путем использования линейного пин-эффекта оказалась неудачной, однако дальнейшее развитие этой основной идеи в конце концов увенчалось успехом. Два основных элемента, добавленных в процессе развития к первоначальной идее, состояли: 1) в стабилизации неустойчивости «мягкого» плазменного проводника с током при помощи сильного продольного поля

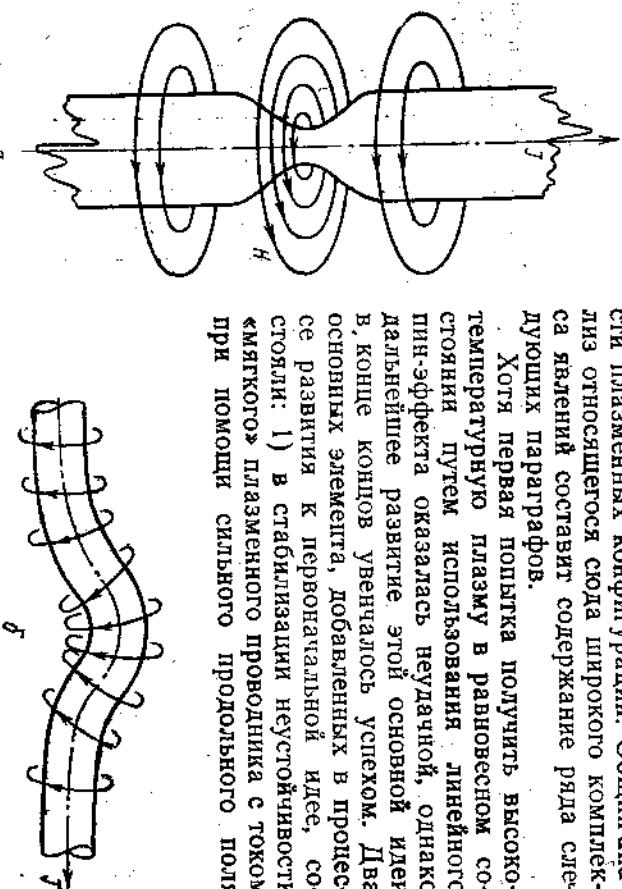


Рис. 2.27. Деформации типа «перетяжка» (a) и «изгиб» (b)

внешнего происхождения. Силовые линии продольного поля образуют как бы жесткий каркас, препятствующий нарастанию любых макроскопических деформаций в плазменном шнуре, и 2) в замыкании плазменного цилиндра в кольцо для устранения потерь энергии на концах (при наличии концов, опирающихся на электроды, невозможно получить плазму в квазистационарном состоянии с достаточно высокой температурой).

Итак, мы пришли к системе, получившей название «токамак». Она изображена на рис. 2.28. Кольцевой плазменный виток удерживается в равновесии магнитным полем тока  $H_\varphi$  и стабилизируется прямым полем  $H_\varphi$ . Ток в плазме можно создать индукционным путем (например, надев камеру, в которой должен об разоваться плазменный виток, на сердечник трансформатора). Однако, как нетрудно видеть, для того чтобы добиться равновесия плазмы, кроме полей  $H_\varphi$  и  $H_\varphi$ , нужно ввести также поле  $H_\perp$ , на-

правление вдоль главной оси торoidalной системы (перпендикулярно к плазменному кольцу). Это поле необходимо для того, чтобы скомпенсировать электродинамическую силу радиального раскачивания кольцевого плазменного тока. При взаимодействии поля  $H_\perp$  с током  $I$  возникает сила  $(1/c)IH_\perp$  (на единицу плазменно-го кольца). При указанном на рис. 2.28 направлении  $H_\perp$  эта сила в каждом элементе кольца направлена по радиусу к оси торoidalной системы.

В обычных условиях  $|H_\perp| \ll |H_\varphi|$  (см.), поэтому присутствие  $H_\perp$  не нарушает общей картины поля. Линии результирующего магнитного поля имеют винтовую структуру. Они навиваются вокруг винтовой линии.

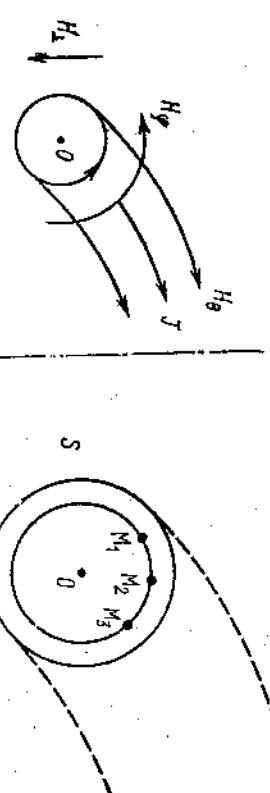


Рис. 2.28. Магнитное поле и ток в токамаке

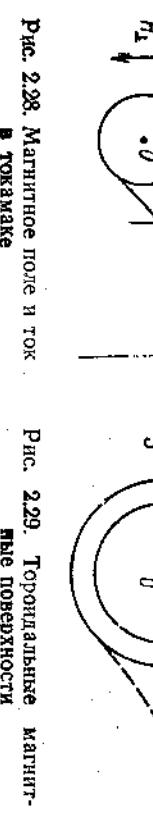


Рис. 2.29. Торидальные магнитные поверхности

кольцевой осевой линии плазменного витка. Как было указано в § 2.2, в таком поле траектории заряженных частиц принадлежат к двум различным классам: существуют «пролетные» и «запертые» частицы. Рассматриваемая как единое целое, плазма свободно рас текается вдоль силовых линий.

Прежде чем заниматься анализом условий равновесия в такой торoidalной системе, следует обратить внимание на одну характеристику для нее черту топологии магнитного поля. Пусть плоскость  $S$  представляет собой поперечное сечение системы. Силовая линия, проходящая через точку  $M_1$  на этой плоскости, обходя один раз вокруг торида, пересечет плоскость  $S$  в точке  $M_2$ , в следующий раз — в точке  $M_3$  и т. д. (рис. 2.29). Множество точек  $M_1, M_2, M_3, \dots$  в общем случае будет бесконечным. Однако для некоторых линий поле оно может быть конечным, и это означает, что такая линия поля замыкается сама на себя. Это так называемые вырожденные линии. К их числу, в частности, принадлежит осевая линия витка, на которой поле тока обращается в нуль. Ее след (см. рис. 2.28) обозначен буквой  $O$ .

Поведение силовой линии, многократно обходящей вдоль торида, определяется положением изображающих точек  $M_1, M_2, \dots$  Пусть после нескольких обходов точка  $M$  приблизилась к началь-

ной точке  $M_1$ . При следующем обходе угол поворота вокруг  $O$  будет уже больше  $2\pi$ . Где в таком случае расположится следующая точка? Естественно предположить, что  $M_{n+1}$  лежит между  $M_1$  и  $M_2$ , следующая  $M_{n+2}$  — между  $M_2$  и  $M_3$  и т. д., и после многих обходов изображающие точки образуют гладкую замкнутую кривую. В таком случае можно говорить о существовании семейства магнитных поверхностей. Каждая из них, образно выражаясь, изготавлена из одной бесконечной силовой линии. Линия поля, порождающая магнитную поверхность, плотно устилает ее.

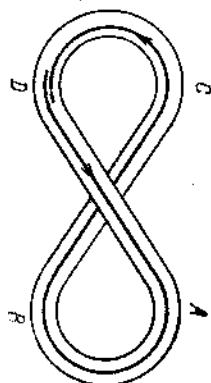


Рис. 2.30. Стерлатор — «восьмерка». Стрелками обозначена силовая линия

Магнитные поверхности в токамаке образуют множество вложенных друг в друга тороидов. В континууме этих тороидов каждый, взятый наудачу, образуется одной силовой линией. Однако среди магнитных поверхностей есть счетное множество «вырожденных», которые создаются замкнутыми силовыми линиями.

В этом случае на поверхности укладываются непрерывное множество линий поля, смещенные друг относительно друга. Л. Спиггер высказал гипотезу о том, что магнитные поверхности существуют также и для таких тороидальных полей, в которых винтовые силовые линии, поворачивающиеся вокруг кольцевой оси, создаются только с помощью внешних источников специальных винтовых обмоток) или же деформацией всей магнитной системы — например, превращением колышевого соленоида в восьмерку (рис. 2.30).

Однако теоретический анализ показывает, что в случае таких несимметричных полей можно говорить о системе вложенных друг в друга магнитных поверхностей лишь в некотором приближении. В общем случае структура магнитного поля является довольно сложной. Отдельные магнитные поверхности оказываются разделенными системой тороидальных трубок («волокон»), между которыми силовые линии ведут себя совершенно хаотически. Очевидно, что вопрос о существовании магнитных поверхностей имеет большое значение для перспективы использования различных магнитных систем для удержания горячей плазмы. Поскольку плазма свободно растекается вдоль силовых линий, ее давление  $p$  в условиях равновесия должно быть одинаковым в разных точках одной и той же магнитной поверхности.

Таким образом, магнитные поверхности представляют собой семейство плазменных изobar. Если (вместо того чтобы обрисовать плавную кривую) «изображающие» точки  $M_1, M_2, \dots$  заполнят некоторую широкую зону в поперечном сечении плазменного витка, то в пределах этой зоны плазма может находиться в равновесии только при условии  $\text{grad } p = 0$ . Очевидно, что обращение

в нуль градиента давления в сечении плазменного витка равносильно появлению аномально большой утечки плазмы в направлении, перпендикулярном к  $H$ .

Представляет немалый интерес хотя бы вкратце разобрать вопрос о топологии магнитных поверхностей. Если заданы источники магнитного поля, т. е. система электрических токов, то вектор магнитного поля  $\mathbf{H}(r)$  можно в принципе считать заданным (вычисленным по формуле Био—Савара). Это позволяет написать систему уравнений для силовых линий магнитного поля, используя их определение как линий, касательная к которым параллельна  $\mathbf{H}$  в каждой точке. Оказывается, что найти решение этой, казалось бы, простой системы уравнений в общем случае не так-то просто.

Основная идея подхода к этой проблеме заключается в использовании, на первый взгляд, неожиданной аналогии с гамильтоновыми уравнениями динамики материальной точки. В данном случае это означает, что координата вдоль силовой линии играет роль времени, а некий «гамильтониан», описывающий силовую линию, в которых «двигается» рассматриваемая материальная точка, тогда должен быть периодической функцией времени. Теперь становится понятной сложность задачи. Ведь в классической механике вопрос об устойчивости движения с такими гамильтонианами сводится к знаменитой проблеме о так называемых малых резонансных зонателях. Формально разложение в ряд Фурье пеллинейной периодической функции содержит бесконечное число членов с потенциальной возможностью соответственно бесконечного числа резонансов.

Весьма сходная проблема небесной механики — о движении планет при учете возмущающего резонансного влияния друг на друга — как известно, приводит к неустойчивости множества возможных орбит и выделению некоторых устойчивых состояний. «Резонансные» возмущения, нарушающие тороидальную симметрию магнитного поля в токамаке, могут создаваться не только из-за недельной геометрии наружных проводников с током, но и в результате внутренних неоднородностей собственного тока, текущего по плазме. Такие неоднородности могут быть и следствием мелкомасштабных неустойчивостей плазмы. В предельном случае достаточно сильных микронеоднородностей поведение силовых линий магнитного поля может напоминать стохастическое движение броуновской частицы. Такое стохастическое разрушение структуры магнитных поверхностей может стать прелестным для длительного удержания плазмы в термоядерных ловушках.

Эти качественные рассуждения можно проиллюстрировать на примере разрушения плоских магнитных поверхностей при наложении мелкомасштабного возмущающего поля. Пусть магнитные силовые линии являются прямыми, лежащими в плоскостях  $yz$ . Напряженность этого поля примем постоянной и равной  $H_0$ . Примем угол между  $H_0$  и осью  $z$  зависящим от координаты  $x$ . Если при  $x=0 H_0||0z$ , то вблизи  $x=0$  простейшей формой такой зависимости

может служить  $H_y = (x/L_s) H_0$ . Физически для реализации описанного поворота силовых линий нужно иметь электрический ток, текущий вдоль силовых линий по плазме.

Наложим возмущающее магнитное поле  $H_x = H_{\perp} \cos(k_z z + k_y y)$ . Тогда «уравнение движения» для силовых линий с учетом возмущения можно записать в виде  $dx/dt = (H_{\perp}/H_0) \cos(k_z z + k_y y)$ ,  $dy/dt = x/L_s$ , где  $t$  — координата вдоль силовой линии  $\mathbf{H}_0$ . Интегрируя второе из этих уравнений, получаем  $y = x_0 t/L_s + (1/L_s) \int_x^{x_0} x dt$ .

Выберем  $x_0$ , удовлетворяющее условию  $k_z = -k_y (x_0/L_s)$ . Оно означает, что возмущение находится «в резонансе» с невозмущенной силовой линией в плоскости  $x=x_0$ , иначе говоря, фаза возмущения постоянная вдоль  $t$ . При этом условии

$$dx/dt = (H_{\perp}/H_0) \cos \left( \frac{k_y}{L_s} \int_x^{x_0} x dt \right). \quad (2.175)$$

Теперь немедленно воспользуемся аналогией с уравнением движения электрона в поле монохроматической электростатической волны при условии резонанса  $\omega/k = v_0$  ( $v_0$  — невозмущенная скорость):

$$dv/dt = \frac{e}{m} E \cos \left( k \int v dt \right).$$

Правила соответствия очевидны:

$$H_{\perp}/H_0 \longleftrightarrow (e/m)E; \quad k_y/L_s \rightarrow k; \quad x \longleftrightarrow v.$$

Тогда ширина зоны захвата  $\Delta v = (e\varphi/m)^{1/2} = (eE/km)^{1/2}$  электрона полем волны соответствует ширине  $\Delta x = (H_{\perp}/H_0)(L_s/k_y)^{1/2}$  зоны резонансного возмущения магнитного поля. Картина возникающего расщепления магнитных поверхностей на плоскости  $x, y$  в точности совпадает с картиной поведения фазовых траекторий частицы на

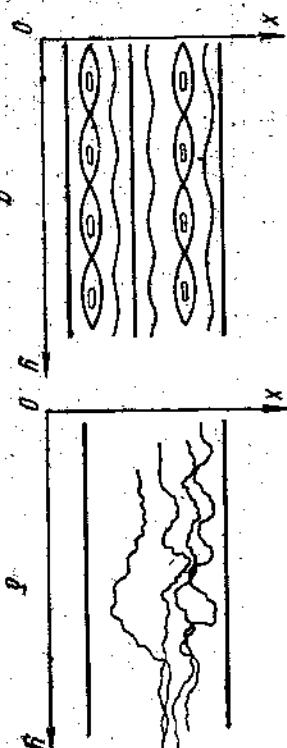


Рис. 2.31. «Резонансное» разрушение магнитных поверхностей: регулярное (a) и стохастическое (b), приводящее к броуновскому движению силовых линий

плоскости  $v, x$  (рис. 2.31, a). Аналогом осциляции захваченных электронов на этом рисунке являются так называемые магнитные островки.

Для возмущения, представляющего собой суперпозицию отдельных гармоник  $H_x = \sum_{k_x k_y} H_{\perp k} \cos(k_z z + k_y y)$ , нетрудно провести рассуждения, приводящие к установлению аналoga квазилинейного приближения для электронов (см. § 1.16). Условием применимости такого приближения должно являться перекрытие зон резонансов, соседних гармоник возмущения. Это квазилинейное уравнение, которое описывает стохастическое поведение силовых линий магнитного поля (см. рис. 2.31, b), легко написать по аналогии с (1.192), пользуясь введенными выше правилами соответствия:

$$\frac{\partial f_H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k_x k_y} \frac{|H_{\perp k}|^2}{H_{\perp 0}^2} \operatorname{Im} \frac{1}{k_z + k_y \frac{x}{L_s}} \right) \frac{\partial f_H}{\partial x}.$$

В рассматриваемом приближении «диффузия» силовых линий описывается с помощью соответствующей плотности вероятности  $f_H(l, r)$ .

После этого небольшого отступления проанализируем равновесие кольцевого плазменного витка, используя уравнения математической гидродинамики. В первом приближении можно считать, что плазменный виток имеет в поперечном сечении форму окружности радиуса  $a$ . Вне этого круга  $r$  и  $j$  обращаются в нуль. Тороидальная поверхность радиуса  $a$  представляет собой граничную поверхность плазменного витка, «гортанного» от стенок вакуумной камеры, внутри которой этот виток находится. Вместе с тем это одна из магнитных поверхностей тороидального поля. Другим независимым параметром, определяющим геометрию системы, является большой радиус плазменного витка  $R$ . В дальнейшем будем предполагать, что  $a \ll R$  (это практически всегда выполняется в эксперименте). Заметим, что при малом отношении  $a/R$  плазменный виток по своим свойствам должен приближаться к прямому цилиндру.

Поскольку в задачу входит два главных параметра  $a$  и  $R$ , отвечающих двум степеням свободы, то нужно найти два условия равновесия витка — по малому и большому радиусам. Для первого можно пренебречь влиянием тороидальности и использовать уравнение равновесия, справедливое для прямого плазменного цилиндра. При этом плазма находится под действием полей  $H_{\varphi}$  и  $H_{\theta}$  (в первом приближении поле  $H_{\perp}$  роли не играет), и поэтому уравнение равновесия должно представлять собой обобщение соотношений (2.173) и (2.174). Такое обобщение можно получить, считая, что напряженность обоих полей и давление плазмы зависят только от  $r$  (т. е. от расстояния между данной точкой и точкой  $O$  в по-

речном сечении). Простые вычисления показывают, что для равновесия необходимо, чтобы соблюдалось следующее равенство:

$$\bar{p} + \bar{H}_0^2 / 8\pi = H_0^2(a) / 8\pi + H_\varphi^2(a) / 8\pi, \quad (2.176)$$

где  $\bar{H}_0^2$  — усредненное значение  $H_0^2$  в плазме. Это равенство можно записать также в следующем виде:

$$2\pi a^2 p = I^2/c + (H_0^2(a) - \bar{H}_0^2)a^2/4. \quad (2.177)$$

Более детальный анализ приводит к выводу, что соотношение (2.177) справедливо также и для торoidalной системы после учёта небольшого уточнения, которое относится к величине  $H_0^2(a)$ . При строгом расчете  $H_0^2(a)$  в (2.177) должно соответствовать  $H_0$  на поверхности плазмы при  $\Phi=\pi/2$  (рис. 2.32).

Выясним теперь происхождение и величину сил, которые могут вызвать изменение  $R$ . Существуют следующие причины их появления:

1. Согласно законам электродинамики в кольцевом проводнике с током должна возникать радиальная сила растяжения, пропорциональная  $I^2$ . При  $a/R \ll 1$  она равна  $(I^2/2c^2)(\partial Z/\partial R)$ , где  $Z$  — коэффициент самоиндукции проводника.

2. Плазменный виток должен растягиваться также под действием внутреннего давления. Растигивающее усилие можно определить, вычислив витков в режимах эксперимента с не очень большой длительностью, компенсация растягивающих усилий может происходить автоматически, так как при радиальном расширении шнура в проводящей оболочке камеры возникают токи Фуко. Они создают попечную слагающую магнитного поля  $H_\perp$ , необходимую для компенсации растяжения. Как показывает несложный расчет, составляющая  $H_\perp$  пропорциональна  $I$  и смещению  $H_\perp \approx (2I/c)(\delta/a^2)$ .

3. Существует также радиальная плазменная пондеромоторная сила, обусловленная различием в напряженности продольного магнитного поля вне и внутри плазмы. Механизм возникновения этой силы можно разъяснить, обратившись к рис. 2.32, на котором изображен небольшой отрезок плазменного витка. Колцевые силовые линии внутри плазмы стремятся сократиться, вследствие чего возникают силы  $F_1$  и  $F_2$ , приложенные к торцам отрезка. Их равнодействующая направлена внутрь. Как нетрудно установить, она равна  $H^2(a)a^2\Delta\theta/3$ , где  $\Delta\theta$  — угловая длина отрезка. Если бы напряженность поля внутри и снаружи витка была одинакова, то эта сила должна была бы уравновешиваться боковым давлением силовых линий, поэтому результатирующая сила бокового давления должна быть равна  $H^2(a)a^2\Delta\theta/8$ . В общем случае при  $H^2(a) \neq \bar{H}^2$  остается разностный

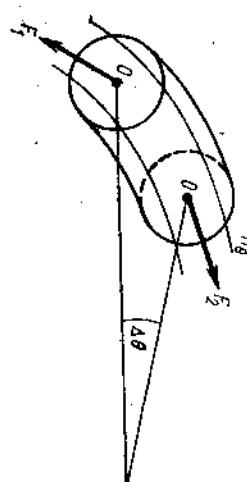


Рис. 2.32. Происхождение пондеромоторной силы, растягивающей виток по радиусу

эффект. В расчете на всю длину витка он дает силу радиального растяжения, равную

$$\frac{2\pi}{\Delta\theta} a^2 \frac{\Delta\theta}{8} [H^2(a) - \bar{H}^2] = \frac{\pi a^2}{4} [H^2(a) - \bar{H}^2]. \quad (2.178)$$

Для равновесия плазменного витка необходимо, чтобы сумма трех радиальных растягивающих усилий компенсировалась силой  $F_\perp$ . Следовательно, условие равновесия по большому радиусу имеет вид

$$2\pi a^2 p + \frac{R}{2c^2} \frac{\partial Z}{\partial R} + \frac{\pi a^2}{4} [H^2(a) - \bar{H}^2] = 2\pi R \frac{H_\perp}{c} I. \quad (2.179)$$

Если плазменный виток создается внутри торoidalной камеры, изготовленной из материала с высокой электропроводностью, то коэффициент самоиндукции можно принять равным

$$Z = 2\pi R [\ln(b/a) + l_i],$$

где  $b$  — радиус попечного сечения камеры;  $l_i$  — внутренняя индуктивность плазмы на единицу длины витка (при равномерном распределении тока по сечению  $l_i \approx 1/4$ , а при сильном скин-эффекте  $l_i \approx 0$ ). Используя (2.177) и (2.180), можно исключить из уравнения (2.179) член, содержащий  $H^2(a) - \bar{H}^2$ . В результате условие равновесия по  $R$  принимает вид

$$\frac{2\pi I^2}{c^2} \left[ \ln \frac{b}{a} + \frac{8\pi p}{H_\perp^2(a)} + \frac{l_i - 1}{2} \right] = 2\pi R \frac{IH_\perp}{c}. \quad (2.181)$$

В установках, предназначенных для получения плазменных витков в режимах эксперимента с не очень большой длительностью, компенсация растягивающих усилий может происходить автоматически, так как при радиальном расширении шнура в проводящей оболочке камеры возникают токи Фуко. Они создают попечную слагающую магнитного поля  $H_\perp$ , необходимую для компенсации растяжения. Как показывает несложный расчет, составляющая  $H_\perp$  пропорциональна  $I$  и смещению  $H_\perp \approx (2I/c)(\delta/a^2)$ .

Итак, равновесие должно устанавливаться при определенном смещении

$$\delta = (b^2/2R) [\ln b/a + 8\pi p/H_\perp^2(a) + (l_i - 1)/2]. \quad (2.182)$$

В экспериментальных установках  $b \ll R$ , и поэтому равновесие устанавливается при относительно небольших смещениях плазмы относительно центра попечного сечения камеры.

В режимах с большой длительностью компенсация растяжения с помощью токов Фуко оказывается недостаточной, и приходится создавать дополнительные источники попечных полей, размещая кольцевые проводники с током вблизи камеры. С помощью таких проводников можно управлять положением витка в камере, изменяя величину  $\delta$ .

## § 2.11. Устойчивость границы плазмы в магнитном поле

Кроме диффузии существует еще одна причина распада равновесия плазмы в магнитном поле. Помимо тому как в механике равновесие тела или материальной точки в поле сил не всегда бывает устойчивым, плазма, обладающая, выражаясь формально, бесконечным числом степеней свободы, также может оказаться неустойчивой относительно малого отклонения от положения равновесия. Имеет смысл говорить лишь о таких неустойчивостях, которые разрушают равновесие плазмы за время меньшее, чем время диффузии.

Допустим, что плазменная конфигурация находится в состоянии равновесия. Это означает, что все параметры, характеризующие свойства плазмы (плотность, температура, распределение частиц по скоростям), должны оставаться постоянными во времени. Будет ли такое состояние сохраняться длительное время или же под влиянием случайных флуктуаций параметров возникнут быстро нарастающие возмущения, которые вызовут резкое нарушение исходного равновесия плазмы? Такова в общей постановке задача об устойчивости.

Поскольку плазма представляет собой механическую систему с бесконечным числом степеней свободы, то в строгом смысле слова полный теоретический анализ ее устойчивости по отношению к разным видам возмущений может оказаться практически несущественным. Общепринятый подход, сложившийся к настоящему времени в физике устойчивости плазмы, состоит в последовательном рассмотрении различных неустойчивостей, начиная с самых простых моделей — магнитогидродинамических и постепенно усложняя их, чтобы ввести в рассмотрение эффекты конечной диссипации, многокомпонентность плазмы, кинетические эффекты. Существенно, что различные механизмы нарушения равновесия допускают классификацию по скорости развития связанных с ними возмущений. Это позволяет ориентировать теорию на последовательное рассмотрение неустойчивостей и условий их стабилизации, начиная с тех, которые вызывают наиболее быстрые перемещения плазмы и поэтому являются самыми опасными. Наиболее же опасными нарушениями равновесия являются те, которые можно считать магнитогидродинамическими. При возмущениях магнитогидродинамического типа макроскопические участки плазмы могут приобрести скорости порядка тепловой скорости ионов. При таких возмущениях плазма ведет себя в магнитном поле аналогично идеально проводящей жидкости (или, точнее говоря, как идеальный проводник, лишенный собственной жесткости).

В связи с большими математическими трудностями обычно выделяют более простую задачу исследования устойчивости относительно возмущений малой величины или амплитуды. Метод использования в этом случае теоретического анализа заключается в том,

что плазма с заданными равновесными параметрами, такими как плотность, температура, магнитное поле, подвергается малой виртуальной деформации, при которой возникают добавки к равновесным значениям тех же параметров. Случай такого состояния плазмы затем прослеживается с помощью уравнений магнитной гидродинамики плазмы (если такая модель описания плазмы оправдана). Предположение о малости амплитуды облегчает математическое исследование этих уравнений, так как пренебрежение квадратами и более высокими степенями малых величин дает уравнения, линейные относительно неизвестных величин  $\varphi$ ,  $u$ ,  $H$ . Но даже такая упрощенная (линейная) теория устойчивости для произвольных равновесных конфигураций оказывается довольно сложной.

Часто теории устойчивости плазмы приходится опираться на методы, разработанные в обычной гидродинамике.

Самый простой, но чрезвычайно важный вид неустойчивости равновесия плазмы удобнее всего проиллюстрировать на примере уже рассмотренного выше равновесия с резкой границей в полном магнитном поле. Как будет видно из дальнейшего рассмотрения, почти все основные типы магнитогидродинамических неустойчивостей различных равновесных конфигураций «генетически» связаны с этим простейшим случаем. Поэтому неустойчивости плазмы с резкой границей посвящается отдельный параграф.

Итак, пусть плазма занимает полупространство  $x \geq 0$ . Магнитное поле внутри плазмы для начала положим равным нулю. При  $x < 0$  имеется магнитное поле, направленное вдоль оси  $x$  с давлением  $H_0^2/8\pi$ , уравновешивающим давление плазмы. Дополним рассмотренную здесь модель равновесия введением некоторой силы тяжести  $\rho g$ , направленной вниз по оси  $x$  (естественно, что речь идет о силе тяжести, компенсированной действием магнитного поля на плазму). Мы предположили, что магнитное поле при  $x = 0$  скачком меняется от пуля до  $H_0$ , т. е. границу плазмы считаем бесконечно тонкой. Мы уже знаем, что из-за диффузии магнитного поля внутрь плазмы (и встречной диффузии плазмы) толщина этой границы должна быть конечной. Поэтому сделанное выше предположение означает, что мы будем интересоваться только явлениями с пространственными масштабами (длиами волн неустойчивости, в данном случае), значительно превышающими толщину переходного слоя  $\delta$ . В частности, будем исследовать деформацию равновесия плазмы (см. рис. 2.31), представляющую собой волнобразное искривление поверхности раздела вдоль координаты  $y$  с длиной волны  $\lambda$ , значительно превышающей толщину переходного слоя.

Само наличие неустойчивости рассматриваемого равновесия плазмы очевидно из аналогии с известной в обычной гидродинамике неустойчивостью тяжелой жидкости над легкой в поле тяжести. Малая деформация поверхности раздела дает возможность «языкам» легкой жидкости всплыть в поле тяжести, «языки» же тя-

желой жидкости опускаются. В данном случае плазма играет роль тяжелой жидкости, магнитное же поле — легкой (в рассматриваемом случае можно говорить даже о невесомой жидкости).

Количественное описание неустойчивости такого рода можно дать с помощью подстановки малых величин  $\Phi$ ,  $u$ ,  $\delta p$  в уравнения магнитной гидродинамики. Так, изменение плотности должно описываться уравнением

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + u \operatorname{grad} \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} u = 0, \quad (2.183)$$

в котором пренебрегается членом, содержащим произведение двух малых величин  $u$  и  $\delta p$ . Задача еще более упрощается, если приближенно считать плазму несжимаемой жидкостью (такое приближение обычно справедливо при рассмотрении движений со скоростями, много меньшими скорости звука). Тогда из уравнения непрерывности получается условие несжимаемости  $\operatorname{div} u = 0$ , т. е.

$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$ . Скорость плазмы можно найти из уравнения Эйлера  $\rho \partial u / \partial t = -\operatorname{grad} \delta p$ , в котором также отброшены члены, содержащие произведение малых величин. Вместо скорости  $u$  удобно ввести другую переменную — смещение плазмы из положения равновесия  $\xi$ , определяемую с помощью формулы  $u = \partial \xi / \partial t$ .

Условие несжимаемости теперь принимает вид

$$\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} = 0, \quad (2.184)$$

а уравнение Эйлера

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\operatorname{grad} \delta p. \quad (2.185)$$

Эти уравнения, вообще говоря, нужно дополнить граничными условиями на границе, разделяющей плазму и магнитное поле, и уравнениями Максвелла для магнитного поля в области вне плазмы.

Но в рассматриваемой здесь частной задаче путь к ответу оказывается более простым. Смещение при волнообразной деформации с длиной волны  $\lambda$  зависит от  $y$  по гармоническому закону

$$\xi(x, y, t) = \tilde{\xi}(x) \exp(iky - i\omega t), \quad (2.186)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $\omega$  — собственное значение частоты, соответствующее волновому числу  $k$ . Подставляя искомый вид  $\xi$  (2.186) в уравнения (2.184) и (2.185), получаем

$$\frac{\partial \tilde{\xi}_x}{\partial x} + ik \tilde{\xi}_y = 0; \quad (2.187)$$

$$-\rho_0 \omega \tilde{\xi}_x = -d \tilde{\xi}_y / dx; \quad (2.188)$$

$$-\rho_0 \omega \tilde{\xi}_y = ik \tilde{\xi}_x. \quad (2.189)$$

Здесь учтено, что  $\delta p = \delta \tilde{p}(x) \exp(iky - i\omega t)$ . Из уравнений (2.188) и (2.189) можно исключить  $\delta p$ , если первое из них умножить на  $ik$ , второе проинтегрировать по  $x$ , а затем сложить оба уравнения:

$$ik \tilde{\xi}_x + d \tilde{\xi}_y / dx = 0. \quad (2.190)$$

Из (2.190) определяем  $\tilde{\xi}_y$  и, подставляя его в уравнение (2.187), находим

$$d \tilde{\xi}_x / dx^2 - k^2 \tilde{\xi}_x = 0. \quad (2.191)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид суммы двух экспонент  $e^{kx} (\pm k_y x)$  с произвольными коэффициентами. Из физических соображений ясно, что по мере удаления от границы  $x=0$  создаваемое волнообразное искривление первоначально плоской границы должно сказываться все слабее. По этой причине из двух возможных экспонент следует удерживать лишь затухающую при  $x \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\tilde{\xi}_x = \tilde{\xi}_x \exp(-kx), \quad (2.192)$$

где  $\tilde{\xi}_x$  — постоянный коэффициент.

Изменение давления при смещении плазмы  $\delta p$  можно найти из следующих сопротивлений. В равновесии действие силы тяжести внутри плазменного слоя уравновешивается градиентом давления  $\rho_0 g - d\rho_0(x)/dx = 0$ , в результате чего давление плазмы должно зависеть определенным образом от координаты  $x$ :  $p = p(x)$ . При смещении на расстояние  $\xi_x$   $p = p_0(x + \xi_x)$ , и, раскладывая это выражение в ряд, получаем с учетом (2.193)

$$\delta p = (dp/dx) \xi_x = \rho_0 g \tilde{\xi}_x. \quad (2.194)$$

Далее подставляя (2.194) в уравнение (2.189), приходим к  $\omega^2 \tilde{\xi}_y = -ik \tilde{\xi}_x \rho_0 g$ . Заменив  $\tilde{\xi}_x$  на  $\tilde{\xi}_y$ , с помощью (2.190) легко получить  $\omega^2 \tilde{\xi}_y = -k \tilde{\xi}_y$ . Иначе говоря, дисперсионное уравнение для частоты  $\omega$  имеет вид

$$\omega^2 = -k g$$

и дает мнимые собственные значения, соответствующие экспоненциальному растущему во времени решению.

Дисперсионное уравнение (2.195), если в нем изменить на противоположный знак в правой части, совпадает со знаменитым уравнением волн тяжести в океане — так называемых «кравитационных» волн. Это совпадение не случайно, ведь в задаче об устойчивости удержания плазмы магнитным полем мы, образно выражаясь, поставили жидкость (плазму) «с ног на голову», т. е. против силы тяжести. Этот пример неустойчивости равновесия плазмы исторически был исследован раньше всех прочих (участниками Крускала—Шварцшильда). Теперь, двигаясь шаг за шагом от простых ко все более сложным видам равновесия, изучим, как изменяется их устойчивость.

Первым очевидным шагом на пути обобщения модели Крускала—Шварцшильда является допущение, что и в объеме (полупространстве), занимаемом плазмой, имеется магнитное поле (более слабое по условиям равновесия, чем снаружи). Из интуитивных

соображений сразу ясно, что само по себе оно не сможет сделать устойчивой конфигурацию, в которой тяжелая жидкость лежит сверху. Теперь сделаем еще один шаг: ограничим объем, занимаемый плазмой, в направлении вдоль  $H_0$  твердыми стенками, представляющими собой идеально проводящие пластины, установленные перпендикулярно к магнитному полю на расстоянии  $L$  друг от друга (рис. 2.33). Поля внутри и снаружи плаэмы параллельны. Перпендикулярно к ним направлена сила  $F = \rho g$ . Поле внутри плаэмы есть  $H_t$ , снаружи  $H_0$ . Дальнейшее рассмотрение проведем на уровне наглядных оценок.

Если граница плаэмы смещается по вертикали на  $\delta z$ , причем возмущение имеет длину  $l \sim 2\pi/k$  попечек поля  $H$ , естественно,  $L$  вдоль, то давление на наиболее отклонившемся участке границы

$$H^2/2\pi L^2 > g d\rho_0/dz \sim g\rho/\delta, \quad (2.200)$$

т. е. размытая граница плаэмы ширины  $\delta$  на самом деле может быть устойчива.

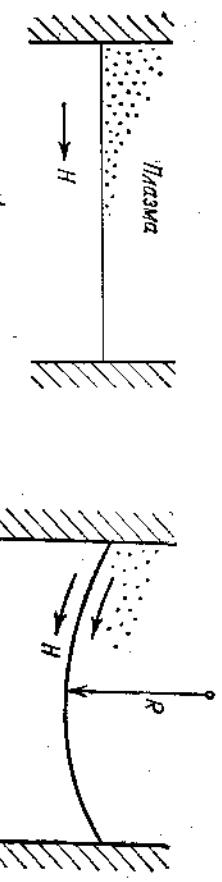


Рис. 2.33. Неустойчивость границы плаэмы при наличии идеально проводящих торцов

Рис. 2.34. Возникновение стабилизирующей силы натяжения при изгибе границы плаэмы в магнитном поле

увеличится на массу столбика плаэмы высотой  $\delta z$  (архимедова сила)

$$\delta p = \rho g \delta z. \quad (2.196)$$

Наиболее важный новый эффект, который связан с введением идеально проводящих торцов, — это искажение магнитного поля из-за вмороженности силовых линий (закрепления концов силовых линий). При этом нужно учитывать квазиупругую силу в результате искажения магнитного поля. Если эта сила больше изменения давления, то равновесие устойчиво.

При смещении плаэмы поле внутри нее «вморожено» и силовая линия с «закрепленными» концами изгибается, рождая силу натяжения  $H^2 r / 4\pi R$ , где  $R$  — радиус кривизны силовой линии. Так как  $R \sim L^2 / 2\delta z$  (рис. 2.34), то объемная квазиупругая сила равна  $H^2 \delta z / 2\pi L^2$ . При смещении плаэмы магнитное поле снаружи остается параллельным границе, т. е. также изгибается:

$$\delta H_{\perp} \sim 2H_t \delta z / L. \quad (2.197)$$

Итак, следует учесть дополнительное увеличение силы натяжения. В итоге получаем, что равновесие устойчиво, если

$$(H_t^2 + H_0^2)/2\pi L^2 > g \rho \delta z / 2\pi. \quad (2.198)$$

Поскольку существуют возмущения со сколь угодно малыми  $\lambda = 2\pi/k$ , то резкая граница плаэмы всегда неустойчива даже при учете стабилизирующего влияния силы натяжения. Это наводит на мысль о том, что если граница плаэмы (как в любом реальном случае) слегка размыта, то в формуле (2.198) нельзя рассматривать возмущения с длиной волны, меньшей толщины границы (скажем,  $\delta$ ), т. е. возмущения, удовлетворяющие условию  $\delta \gg 1$ . Действительно, возникающая при смещении элемента неоднородной плаэмы квазиупругая сила остается такой же, как и в предыдущей задаче:  $H^2 \delta z / 2\pi L^2$ , то архимедова сила  $\delta p$  ( $\delta p$  — разность плотностей смещенного элемента и окружающей плаэмы) изменяется. Действительно,

$$\delta p = \delta z d\rho_0 / dz,$$

так что условие устойчивости есть

$$H^2/2\pi L^2 > g d\rho_0 / dz \sim g\rho/\delta, \quad (2.200)$$

т. е. размытая граница плаэмы ширины  $\delta$  на самом деле может быть устойчива.

Постановка задачи с введением гипотетической силы тяжести  $g$  может показаться слишком искусственной. Однако в любом реальном равновесии плаэмы в магнитном поле роль такой эффективной силы тяжести играет любая перпендикулярная к магнитному полю сила, действие которой не зависит от знака заряда. Такой силой может быть, во-первых, центробежная сила, связанная с движением частиц вдоль искривленной силовой линии. Очевидно, при этом следует заменить  $g$  на  $\bar{v}^2 / R$ , где  $R$  — радиус кривизны силовой линии, а  $\bar{v}^2$  — средний квадрат скорости продольного движения ионов (электронов). Во-вторых, эта сила может быть связана с дрейфом в неоднородном магнитном поле (см. § 2.1). Если эта неоднородность вызвана кривизной силовых линий, то замена производится следующим образом:  $g \rightarrow \bar{v}^2 / 2R$ . Складывая оба эффекта, получаем

$$g \rightarrow (1/R)(\bar{v}_{\parallel}^2 + \bar{v}_{\perp}^2/2) \sim (1/R)(p_{\parallel} + p_{\perp})/\rho. \quad (2.201)$$

Отсюда видно, что выпуклая граница плаэмы должна быть неустойчива. Для стабилизации силой натяжения силовых линий необходимо, как это видно из (2.200) и (2.201), чтобы

$$H_t^2 > (4L^2 \rho / \delta)(\bar{v}_{\parallel}^2 + \bar{v}_{\perp}^2 / 2) / R, \quad (2.202)$$

где  $L$  — эффективная длина силовой линии;  $R$  — радиус ее кривизны;  $\delta$  — толщина размытой границы.

В заключение этого параграфа следует заметить, что если плаэма движется ускоренно, то аналогом  $g$  является ускорение границы  $a$ . Инкремент нарастания возмущений в этом случае есть  $\dot{\rho} \phi = \sqrt{a/l}$ . Такого типа неустойчивости наблюдаются в экспери-

ментах по «инерциальному» методу удержания в термоядерном синтезе. Сюда относятся методы быстрого сжатия плазмы нарастающим аксиальным магнитным полем (так называемый «θ-пинч»), быстро сжимающейся под действием молчного лазерного излучения капля плотной плазмы.

### § 2.12. Желобковая неустойчивость плазмы и энергетический принцип устойчивости в магнитной гидродинамике

Тенденцию плазмы обнаруживать неустойчивость вблизи выпуклых участков границы можно интерпретировать как следствие диамагнетизма плазмы. Будучи диамагнетиком, плазма стремится распространяться в сторону более слабого магнитного поля. Именно поэтому если поверхность плазмы лежит в области, где напряженность магнитного поля убывает от границы плазмы наружу, то положение границы может оказаться неустойчивым.

Для замкнутых магнитных ловушек справедлива следующая теорема. Нельзя создать такое магнитное поле, напряженность которого возрастает наружу от границы плазмы вблизи каждой поверхности торoidalной

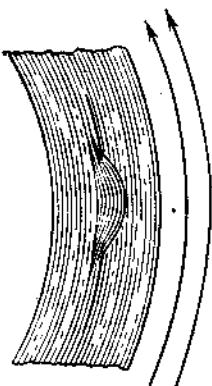


Рис. 2.35. Образование «языка» на поверхности плазмы

плазменной конфигурации. Нормальная к поверхности плазмы компонента  $\text{grad}|H|$  меняет знак вдоль границы.

Простой иллюстрацией может служить система токамак. В этом случае  $H$  убывает от границы

плазмы наружу на внешней стороны торoidalного

внешней стороны витка. Указанное свойство замкнутых ловушек, естественно, вызывает сомнение в возможности устойчивого удержания плазмы в таких системах. Появляется следующий вопрос: не может ли плазма отдельными «языками» вытекать в область более слабого поля? Ответ на этот вопрос зависит от того, имеем ли мы дело с плазмой высокого давления, для которой параметр  $\beta = 8\pi r/H^2 \sim 1$ , или же с плазмой низкого давления, для которой  $\beta \ll 1$ . В этих двух крайних случаях условия устойчивости совершенно различны.

При  $\beta \sim 1$  на поверхности плазмы могут образовываться и разрываться локальные возмущения типа «языков» (рис. 2.35). Вследствие вморооженности поля в плазму образование отдельного языка приводит к искривлению силовых линий с увеличением магнитной энергии. Соответствующая работа производится расширяющейся плазмой благодаря ее тепловой энергии. Если «язык» встречает более слабое поле, то он будет распространяться все дальше, и это означает неустойчивость границы плазмы. В данном случае не-

устойчивость имеет локальный характер, т.е. она зависит от места геометрии поля.

Как уже говорилось, в замкнутых ловушках на отдельных участках поверхности плазменного витка геометрия поля благоприятствует развитию «языков» (это имеет место там, где поверхность плазмы двояковыпуклая). Поэтому плазма с  $\beta \sim 1$  в таких системах должна быть более неустойчивой. Об этом не следует забывать при обсуждении перспектив использования высокотемпературной плазмы.

Совершенно иная ситуация складывается в том случае, если давление плазмы исчезает мало по сравнению с магнитным давлением. Заметим, что это условие фактически соблюдалось во всех исследований, выполненных до сих пор на установках типа токамак. При  $\beta \ll 1$  возмущения плазмы не могут вызвать заметных искажений формы силовых линий. Следовательно, локальные деформации типа «языков» автоматически стабилизируются, и все возмущения внутри плазмы или на ее границе могут носить только характер перестановки цепей систем трубок.

Плазма, заполняющая магнитную трубку, обраузованную очень тонким пучком силовых линий, стремится расширяться и поэтому будет перемещаться в ту сторону, где объем трубы увеличивается. Этот объем  $\delta V = \int \delta S dl$ , где  $\delta S$  — площадь полперечного сечения трубы и  $dl$  — элемент длины силовой линии. Вследствие неизменности магнитного потока  $\delta \Phi$  по длине трубы можно написать

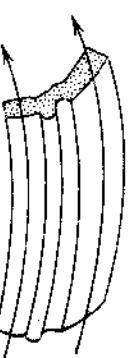
$$\delta V = \int \delta S H dl / H = \delta \Phi \int dl / H. \quad (2.203)$$


Рис. 2.36. Желобковая деформация

шениях данной трубы, заполненной плазмой низкого давления,  $\delta \Phi$  остается постоянным. Следовательно, объем трубы изменяется пропорционально  $\int dl / H$ . Поскольку плазма, как и всякий другой газ, имеет естественную тенденцию к увеличению объема, то в процессе перемещения трубы  $\int dl / H$  играет роль, аналогичную потенциальной энергии.

Описанные здесь перемещения отдельных элементов плазмы, при которых силовые трубы меняются местами, называются друг друга, называются перестановочными, или конвективными деформациями. Появление таких деформаций на границе плазмы с внешним полем приводит к тому, что поверхность плазмы приобретает «желобковую» структуру (рис. 2.36), ориентированную вдоль силовых линий. Поэтому иногда говорят также о деформациях желобкового типа — самых опасных врагах равновесных конфигураций.

Критерий устойчивости по отношению к таким деформациям до-

пускает простую формулировку, если воспользоваться введенным выше понятием о «потенциальной энергии»  $U$ .

Граница плазмы устойчива в том случае, если при выходе магнитной трубы с плазмой изнутри на поверхность с образованием выступа происходит возрастание  $U$ , т. е. имеет место условие

$$\delta \int dl/H < 0. \quad (2.204)$$

Вариация интеграла берется между двумя бесконечно близкими силовыми линиями по нормали к границе плазмы. При другом значении неравенство (2.204) означало бы неустойчивость границы плазменной конфигурации.

Полученный критерий устойчивости необходиимо и достаточно физический смысл. Для устойчивости границы плазмы, чтобы напряженность поля, усредненная вдоль силовой линии, возрасла от границы плазмы наружу. Это частная форма известного принципа «минимума  $H$ ».

Заметим, что согласно (2.203)  $\int dl/H = dV/d\Phi$ . Поэтому  $\int dl/H$  можно назвать «удельным объемом» магнитной трубы.

Для того чтобы установить область применимости критерия устойчивости (2.204), надо сначала устранить неопределенность в выражении для  $U$ , которая за-

ключается в том, что не указаны пределы интегрирования по длине силовой линии. Неопределенность исчезает в том случае, когда силовые линии на поверхности плазмы замкнуты, так как очевидно, что при этом интеграл  $\int dl/H$  должен распространяться на всю длину силовой линии. Для уточнения можно ввести следующее определение потенциальной энергии  $U$  магнитной поверхности с замкнутыми силовыми линиями:

$$U = -(1/N) \oint dl/H. \quad (2.205)$$

Здесь  $N$  — число обходов вдоль магнитной системы, после которых силовая линия замыкается на себя.

Потенциальная энергия  $U$  является однозначной характеристикой поверхности. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим две близкие магнитные поверхности и определим ток, протекающий между ними через перегородку, проведенную вдоль одной из магнитных силовых линий (рис. 2-37). Суммарный ток  $dl$ , проходящий через перегородку, очевидно, не должен зависеть от выбора силовой линии:

$$dl = \oint j_{\perp} dndl = \text{const}. \quad (2.206)$$

Здесь  $dn$  — элемент нормали к магнитной поверхности и  $j_{\perp}$  — компонента плотности тока, перпендикулярная к  $H$ . Интеграл берется

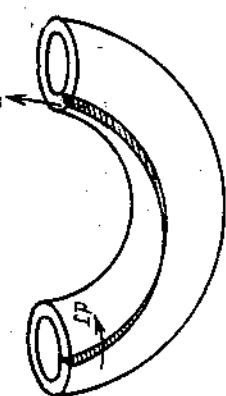


Рис. 2.37. Иллюстрация связи потенциальной энергии и поперечного тока

вдоль силовой линии. Согласно основному уравнению баланса сил в равновесии

$$j_{\perp} = (c/H)(dp/dt). \quad (2.207)$$

Из (2.206) и (2.207) следует, что

$$cdp \oint dl/H = \text{const}. \quad (2.208)$$

Таким образом, поверхность  $p = \text{const}$  должна совпадать с поверхностями, на которых эффективная «потенциальная энергия»  $U$  имеет одинаковое значение.

То обстоятельство, что разобранные неустойчивости равновесных конфигураций плазмы в магнитном поле оказалось возможным трактовать с помощью энергетических соображений, отражает важную особенность магнитогидродинамической теории устойчивости. На более рафинированном математическом языке магнитогидродинамической теории устойчивости можно сформулировать даже общий, так называемый энергетический принцип, заключающийся в следующем. Введем бесконечно малое смещение  $\xi(\Gamma, t)$  элемента объема плазмы из положения равновесия, при этом  $u = \partial \xi / \partial t$ . Оказывается, что линеаризованные уравнения общей теории устойчивости идеально проводящей плазмы можно привести к одному векторному уравнению

$$\partial^2 \xi / \partial t^2 = -K \xi, \quad (2.209)$$

в котором  $K$  — некоторый дифференциальный оператор, действующий на  $\xi$  как на функцию координат. Говоря формально, уравнение в виде (2.209) аналогично уравнению, описывающему колебания произвольной неоднородной упругой среды, где  $K$  играет роль соответствующего обобщенного коэффициента упругости. Несмотря на кажущуюся громоздкость, вывод энергетического принципа не вызывает затруднений. Прежде всего в линеаризованных уравнениях магнитной гидродинамики следует перейти к переменной  $\xi$  (смещение) вместо  $u$  ( $= \partial \xi / \partial t$ ). Затем следует исключить взаимодействие всех остальных величин, выразив их через  $\xi$ .

Выберем в качестве основного уравнения (2.60): Левая часть этого уравнения после линеаризации примет вид  $\rho \ddot{\xi}$ . Линеаризованную правую часть

$$-\nabla \delta p + (1/4\pi) [\text{rot } \delta \mathbf{H} \times \mathbf{H}_0] + (1/4\pi) [\text{rot } \mathbf{H}_0 \times \delta \mathbf{H}]$$

выразим через  $\xi$ . Так, первое слагаемое претерпевает следующие преобразования:  $\delta p = (dp/d\rho) \delta \rho$ , и с учетом уравнения непрерывности

$$-\delta \rho = \text{div } \rho \delta \xi = \rho \text{div } \xi + \xi \text{ grad } \rho.$$

Окончательно получим  $\delta p = -\rho \text{div } \xi + \xi \text{ grad } \rho$ . Таким же образом с помощью уравнения можно выразить  $\delta \mathbf{H}$  через смещение  $\xi$ . В ре-

зультате уравнение, линеаризованное и выраженное через  $\xi$ , принимает вид

$$\rho \ddot{\xi} = \hat{F}(\xi), \quad (2.210)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{F}(\xi) = & \nabla \{ \gamma \rho \operatorname{div} \xi + \xi \nabla \rho \} + \\ & + \left\{ \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \operatorname{rot} [\xi \times \mathbf{H}]] - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} [\xi \times \mathbf{H}]] \right\}. \end{aligned} \quad (2.210a)$$

Здесь  $\rho$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля;  $\mathbf{j}$  — плотность тока (все величины в равновесии). Уравнение (2.210) математически полностью эквивалентно уравнениям, описывающим малые колебания упругой среды. Роль обобщенного коэффициента упругости принадлежит оператору  $R = F/\rho$ . По аналогии с механикой упругих сред естественно ввести в рассмотрение потенциальную энергию малых колебаний  $\delta W = \frac{1}{2} \int \xi \ddot{\xi} dV$ .

Явное выражение для  $\delta W$  нетрудно получить с помощью (2.210a). Если  $\delta W > 0$  для всех  $\xi \neq 0$ , то отклонения от положения равновесия не могут нарастать во времени и, следовательно, плазма магнитогидродинамически устойчива. В противном случае, когда  $\delta W$  может принимать отрицательные значения, коэффициент упругости  $K$  отрицателен по отношению к некоторым деформациям, и следовательно, рассматриваемая система неустойчива. Границы между устойчивыми и неустойчивыми конфигурациями образуют такие состояния, в которых исчезает упругость по отношению к одному определенному типу смещений. В этом случае наряду с исходным равновесным состоянием существуют близкие к нему равновесные состояния, соответствующие смещению  $\xi$  в направлении упругости, равной нулю. Таким образом, для нахождения граний устойчивости достаточно определить, при каких условиях появляются близкие равновесные состояния, т. е. достаточно исследовать уравнение  $F\xi = 0$ .

Равновесные состояния, для которых можно найти возмущения, соответствующие нулевым собственным частотам, по сути дела, представляют собой безразличные равновесия. Такова в кратких чертежах общая программа магнитогидродинамической теории устойчивости. В выражении для потенциальной энергии  $\delta W$  два слагающихся [см. две фигурные скобки в формуле (2.210a)]. Первое олицетворяет изменение внутренней тепловой энергии плазмы, второе — изменение магнитной энергии при перестройке конфигурации. Неустойчивости желобкового типа связаны с высвобождением внутренней энергии плазмы (при расширении). Они соответствуют деформациям равновесной конфигурации, имеющим вид желобков, вытянутых вдоль силовых линий магнитного поля. При таких смещениях силовые линии магнитного поля не «растягиваются» и не «изгибаются», на что пришлось бы затрачивать энергию [Это второе слагаемое в (2.210a)].

Так как смещения в желобковых возмущениях поперечны силовым линиям магнитного поля ( $\xi \perp \mathbf{H}$ ), то можно сделать еще одно важное обобщение: энергетический принцип, формально выведенный из уравнений магнитной гидродинамики, имеет разумный смысл и для разреженной плазмы в Дрейфовом приближении, так как для наиболее опасных возмущений ( $\xi \perp \mathbf{H}$ ) движение происходит поперек силовых линий, когда снова применима своеобразная гидродинамика, бесстолкновительная и с неизотропным давлением.

Не следует думать, что магнитная часть потенциальной энергии всегда играет стабилизирующую роль. Если при выборе равновесной конфигурации проявить беспечность, то именно высвобождение избытка энергии магнитного поля при перестройке конфигурации является источником наиболее бурных проявлений магнитогидродинамической неустойчивости. Тенденция к сокращению длины силовых линий и приводит к неустойчивости. Примером может служить неустойчивость пинча. Или же высвобождаемую при этом энергию называют энергией линцевания.

### § 2.13. Стабилизация магнитогидродинамических неустойчивостей в термоядерных ловушках

Устойчивость плазмы при пинч-эффекте являлась предметом многочисленных исследований. Самые первые фотографии плавленного шнуря, скатого протекающим по нему собственным током, показали, что он неустойчив относительно деформаций типа перетяжек («шееек») и изгибов («змеек»).

Из общих соображений неустойчивость пинча с продольным током, текущим по поверхности, очевидна по той причине, что вследу от границы плазмы наружу магнитное поле падает.

Для стабилизации такого пинча еще в середине 50-х годов было предложено использовать сильное магнитное поле, параллельное вдоль оси пинча. Действительно, в этом случае при деформациях пинча загружаются работы на увеличение энергии этого магнитного поля, что и вызывает стабилизирующий эффект. Этот эффект рече всего проявляется для возмущений с большим волновым вектором, т. е. с малой длиной волны вдоль оси пинча. Напротив, в длинноволновых возмущениях изменения продольного магнитного поля малы, и относительно возмущений с длиной волны, значительно большей радиуса пинча, неустойчивость остается.

Условие устойчивости пинча относительно «змеек» и «шееек» можно получить наглядно следующим образом. Рассмотрим сначала змейкообразные возмущения пинча (рис. 2.38). Предположим, что внутри пинча радиус  $a$  имеется замороженное продольное поле  $H_i$ , а снаружи — азимутальное поле тока, текущего по его поверхности,  $H$ . Если пинч изгибаются (длина изгиба  $\lambda$ ), то силовые линии азимутального поля сгущаются с внутренней стороны и разрежаются снаружи. Поэтому на внутреннюю часть пинча (обращенную в сторону центра кривизны) действует большее магнитное

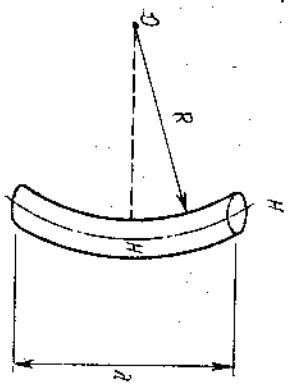


Рис. 2.38. Неустойчивость пинча относительно деформаций типа «змеек»

шага на единицу длины пинча в соответствующей составляющей магнитного давления на торцах:

$$2\pi \int_a^l (H^2/8\pi) 2\pi r dr$$

(где угол наклона  $\alpha = \lambda/2R$ , а  $R$  — радиус кривизны) и давления на боковые поверхности, которым можно пренебречь. Вблизи от искривленного пинча поле  $H$  можно описывать так же, как и для бесконечно длинного проводника с током  $H = H_0 a/r$ .  $H_0 = H(a)$  — поле на поверхности пинча. Однако на расстояниях  $r \gg \lambda$  эффект возмущения исчезает и интеграл следует «сбрить» при  $r \sim \lambda$ . Поэтому действующая на единицу длины шнура сила, вызванная возмущением поля, при искривлении есть

$$(1/R) \int_0^\lambda (H^2/8\pi) 2\pi r dr = (H_0^2/4R) \ln(\lambda/a) a^2.$$

Сила натяжения, как обычно, равна

$$-(H_{ti}^2/4\pi R) \pi a^2 = -(H_0^2/4R) a^2,$$

так что полная сила

$$\delta F = (a^2/4R) [H_0^2 \ln(\lambda/a) - H_{ti}^2].$$

Отсюда возникает известное условие устойчивости

$$H_{ti}^2/H_0^2 > \ln \lambda/a. \quad (2.21)$$

Так как из условия равновесия  $p + H_{ti}^2/8\pi = H_0^2/8\pi$  следует, что  $H_{ti}^2 < H_0^2$ , то ясно, что пинч нельзя полностью стабилизировать сильным внутренним продольным полем относительно длинноволновых возмущений.

Если продольное магнитное поле имеется и внутри, и вне шнурка с аксиальным током, то полное поле оказывается винтовым. В таком поле шнур, искривившись по винтовой линии, сможет пролезть между силовыми линиями поля, не искривляя их.

давление. Кроме того, из-за искривления силовых линий вмороженного продольного поля возникает сила натяжения, действующая в обратном направлении.

Силу, действующую со стороны азимутального поля на плазму, можно подсчитать следующим образом. Выделим вокруг пинча цилиндрический объем радиуса  $\lambda$ , как бы срезанный проходящими через центр кривизны. Так как силовые линии азимутального поля лежат в этих плоскостях, то полная сила, действующая на единицу длины пинча в направлении смещения, складывается из соответствующей составляющей магнитного давления на торцах:

Такая неустойчивость имеет место, если возмущение поверхности шнура винтовое и если шаг этого винта  $\lambda$  совпадает с шагом силовой линии на поверхности пинча  $2\pi a (H_z/H_\varphi)$  или оказывается больше него. Следовательно, пинч устойчив относительно винтовых возмущений с длиной волны

$$\lambda < 2\pi a H_z / H_\varphi \quad (\text{критерий Крускала—Шаффранова}). \quad (2.212)$$

Таким образом, в обоих случаях существует максимальная длина волны возмущения, еще стабилизируемого магнитным полем. Для системы типа токамак при возмущениях длиной волны, равной периметру тора,  $\lambda = 2\pi R$ , критерий устойчивости Крускала — Шаффранова имеет вид  $R < a H_z / H_\varphi$ , т. е. плазма тем более устойчива, чем больше безразмерный параметр  $q = (a/R) (H_z/H_\varphi)$  (так называемый запас устойчивости).

Условие устойчивости относительно деформаций типа «шнек» (см. рис. 2.27) можно найти следующим образом. Пусть радиус шнура изменился на  $\delta a$ . Тогда из-за сохранения магнитного потока поле внутри шнура меняется на  $\delta H = -H_0 \delta a / a$ . Кроме того, азимутальное поле вне шнура  $H = 2l/c a$ , где  $l$  — полный ток, поэтому  $\delta H = -H_0 \delta a / a$ . Полное изменение разности магнитных давлений  $\delta H = -H_0 \delta a / a$ . Полное изменение разности магнитных давлений изнутри и снаружи пинча

$$\delta p_m = -(H_0^2/4\pi) (2\delta a/a) + (H_0^2/4\pi) (\delta a/a),$$

так что условие устойчивости имеет вид

$$H_{ti}^2 > H_0^2/2. \quad (2.213)$$

Итак, достаточно сильное продольное поле подавляет «шнеки», но не может стабилизировать пинч относительно длинноволновых «змеек». Дополнительные меры по стабилизации — окружение плазменного шнура проводящей коаксиальной оболочкой. При смещении шнура в оболочке должны наводиться индукционные токи, взаимодействие с которыми стремится вернуть шнур в исходное положение.

Сочетание этих способов стабилизации в свое время широко применялось для создания высокотемпературной плазмы.

Стабилизация по Крускалу — Шаффранову представляет собой использование квазиупругой силы натяжения достаточно сильного магнитного поля. Критерий, которые были получены выше для идеализированной геометрии пинча с поверхностным током, конечно, нельзя применять для реальных равновесий в буквальном смысле. Ток всегда распределен каким-либо образом по сечению плазменного шнура. Поэтому внутри плазмы существуют общие компоненты поля: и аксиальная, и азимутальная, т. е. суммарное магнитное поле является винтовым. В винтовом поле невозможна обычная перестановочная желобковая неустойчивость, так как из-за того, что шаг силовой линии на каждой магнитной поверхности различен, трубы «перепутываются» при радиальном смещении и

возникает та же самая квазиупругая сила натяжения. Чем сильнее меняется шаг витка силовой линии в равновесии при переходе от одной магнитной поверхности к другой, иначе говоря, чем сильнее перекрещенность силовых линий (так называемый шир), тем более устойчивым должно быть равновесие.

Наличие шири в магнитной системе с вращательным преобразованием поля означает, что угол поворота силовых линий  $\Omega$  является функцией от координаты  $r$ , т. е. изменяется при переходе от магнитной оси к периферии плазменного витка. В литературе по теории устойчивости в качестве меры шири чаще всего принимается величина

$$\theta_s = (\gamma^2/L) d\Omega/dr, \quad (2.214)$$

где  $L$  — длина плазменного витка (для круговых систем  $L=2\pi R$ ). В настоящее время очень распространена точка зрения, согласно которой шир можно рассматривать как некоторое универсальное средство борьбы с широким классом плазменных неустойчивостей. Поэтому прежде чем специально останавливаться на выяснении роли шири в подавлении неустойчивостей магнитогидродинамического типа, сделаем отступление в сторону, чтобы разъяснить происхождение формулы (2.214).

Элементарное возмущение, возникшее в плазменном штурфе, можно представить в виде следующей функции координат:

$$\Psi = \exp[i(\eta\varphi - k_z z)],$$

где  $z$  — координата, отсчитываемая вдоль плазменного шнура;  $k_z$  — компонента волнового вектора в этом направлении;  $\eta$  — целое число. Для простоты здесь используется модель «выпрямленного» витка, что допустимо при слабой троидальности системы ( $a \ll R$ ).

Рассмотрим, как это возмущение распространяется вдоль силовой линии. Обозначим элементарный отрезок длины силовой линии  $dl$ :

$$d/dl = (H_z/H)(\partial/\partial z) + (H_\varphi/H_r)(\partial/\partial\varphi); H = \sqrt{H_z^2 + H_\varphi^2}.$$

Дифференцирование функции  $\Psi$  по  $l$  дает

$$d\Psi/dl = ik_\parallel \Psi = (i/H)[(n/r)H_\varphi - k_z H_z] \Psi.$$

Здесь  $k_\parallel$  — волновой вектор вдоль силовой линии. Возмущение постоянно вдоль силовой линии, т. е.  $k_\parallel = 0$ , если

$$(2.215)$$

В этом выражении  $k_z = n/r$  — компонента волнового вектора по азимуту  $\varphi$ .

Вводя длину плазменного шнура  $L$ , можно записать условие (2.215) в следующей форме:  $k_z L = n\Omega$ . Поскольку  $k_z = 2\pi m/L$ , где  $m$  — целое число, то указанное условие удовлетворяется только для замкнутых силовых линий, у которых  $\Omega = 2\pi m/n$ .

Выясним, как будет изменяться фаза функции  $\Psi$  при переходе от силовой линии, лежащей на поверхности с радиусом  $r_0$ , для которой условие (2.215) выполнено, к бесконечно близкой силовой линии, лежащей на поверхности с радиусом  $r$  (как и ранее, будем рассматривать область лишь вблизи магнитной оси). Разлагая  $d\Psi/dl$  по малому параметру  $\delta r = r - r_0$ , находим

$$k_\parallel = \frac{H_z}{H} \left( \frac{n\Omega}{L} - k_z \right) = \frac{H_z}{H} \frac{d}{dr} \left( \frac{n\Omega}{L} \right) \delta r = \frac{H_z}{H} \frac{\delta r}{r} k_\parallel \theta_s, \quad (2.216)$$

где  $\theta_s$  определяется формулой (2.214). Для магнитных систем типа токамак в этом выражении можно положить  $H_z/H = 1$ .

Из (2.216) следует, что при заданных значениях волнового вектора  $k_\parallel$  и относительного радиального смещения  $\delta r/r_0$  фаза возмущения на силовой линии, равная  $k_\parallel l$ , будет тем ближе к постоянной величине, чем меньше величина шири  $\theta_s$ . Смысл этого результата нетрудно уяснить. Если решь идет омагнитогидродинамических возмущениях в плазме низкого давления, то сохранение постоянства фазы при переходе от одной силовой линии к другой означает наименьшее возмущение магнитного поля. Следовательно, при значениях  $\theta_s$ , очень близких к нулю в системе без магнитной ямы, возмущения перестановочного типа могут свободно распространяться по радиусу, вызывая неустойчивость плазмы.

При увеличении  $\theta_s$  такие деформации будут стабилизироваться, так как с перемещением плазмы в направлении  $r$  в этом случае будет связано сильное искажение поля. Если  $\theta_s \neq 0$ , то возмущение, которое на некоторой магнитной поверхности имело форму выступа, совпадающего с силовой линией, должно при переходе к близкой магнитной поверхности изогнуться так, чтобы образовалася плазменный «язык» сложной формы. Его боковые линии, а наиболее далеко продвинувшийся по  $r$  линии, а также расположены параллельно внешней силовой линии (рис. 2.39). Дополнительную магнитную энергию, которая соответствует такому искажению поля (напомним, что силовые линии заморожены в плазму), можно получить только в результате работы сил давления плазмы. Условие стабилизации заключается в том, что накладывается ограничение на максимальную величину  $\theta$  или на величину градиента давления плазмы.

Проведем упрощенную оценку конкуренции двух сил, действующих на смешанный элемент плазмы. Дестабилизирующая сила  $p/R_s$  связана с кривизной силовой линии магнитного поля, где  $R_s$  — радиус кривизны для прямолинейного плазменного столба,

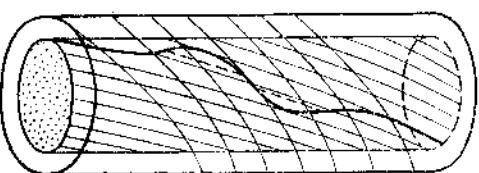


Рис. 2.39. Жесткость лобковая деформация при наличии ширины

$R_s = r H^2 / H^2$ . Возмущение давления при смещении  $\xi$  равно  $\delta p \sim \xi dp / dr$ .

Итак, сила, стремящаяся вывести плазму из равновесия,  $F_i = -(1/R_s) (dp/dr) \xi$ .

Стабилизирующую силу натяжения  $(H_\nabla) H / 4\pi$  можно оценить следующим образом:  $F_\nabla \sim H_0 k_{\parallel} \delta H_{\perp} / 4\pi$ , где  $k_{\parallel}$  определяется выражением (2.216);  $\delta H_{\perp}$  можно найти, рассчитывая искривление силовой линии при вычислении «языка» на расстояние  $\xi: \delta H_{\perp} \sim H_0 \xi k_{\parallel}$ .

Минимальный характерный размер  $\delta r$ , занимаемый областью, в которой происходит возмущение, естественно считать имеющим тот же порядок величины, что и длина волны возмущения по  $\delta z$  (по  $\Phi$ ), т. е.  $k_{\parallel} \delta r \sim 1$ . В итоге из условия  $F_2 > F_1$  получаем известный критерий Сайдэма стабилизации локальных возмущений широм:

$$-(8\pi/H^2) dp/dr < K(H^2/H^2) (1/r)^{\theta_s}. \quad (2.217)$$

Специально введенный здесь численный множитель  $K \sim 1$  подчеркивает, что использованная оценка не может претендовать на большую точность. Правильное значение должна дать строгая теория.

Количественный вывод критерия Сайдэма представляется весьма поучительным. Мы ограничимся минимальными математическими выкладками, предельно упрощив задачу, но стараясь сохранить основные черты стабилизации желобковой неустойчивости с помощью ширины плоского геометрию, напоминающую уже рассмотренную ранее в задаче Крускала — Шварцшильда об устойчивости размытого (без резкой границы) равновесия плазмы под действием силы тяжести, уравновешиваемой давлением магнитного поля. В эту задачу необходимо ввести ширину  $x$ , т. е. поворот силовых линий равновесного магнитного поля. На рис. 2.40 изображено именно такое равновесие. С ростом  $x$ , по мере продвижения в глубь плазмы, магнитное поле, при  $x=0$  для определенности направленное строго по оси  $z$  (перпендикулярно к плоскости рисунка), приобретает компоненту по оси  $y$ . Будем считать, что вблизи плоскости  $x=0$  эта компонента магнитного поля ведет себя как  $H_y = H_x / L$ .

Для установления соответствия между плоской задачей и цилиндрической геометрией, для которой дано определение ширии  $\theta_s$ , заметим, что  $H_y$  соответствует  $H_\phi$ . Приращение  $H_\phi$  за счет изменения угла поворота  $d\Omega/dr$  имеет вид  $dH_\phi = (r/L)(d\Omega/dr) H dr$ . Сравнивая его с приращением  $H_y$  при изменении  $x$ , получаем  $\theta_s/r \rightarrow 1/L$ .

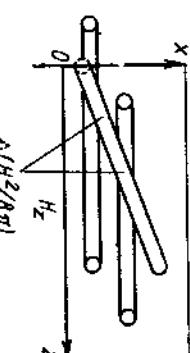


Рис. 2.40. Стабилизация желобковой неустойчивости с помощью ширины

Нетрудно видеть, что возмущение такого равновесия, выбранное, как и в старой задаче Крускала — Шварцшильда, в виде  $\exp\{-i\omega t + ik_y y\}$ , имеет при  $x \neq 0$  компоненту волнового вектора вдоль силовой линии  $k_{\parallel} = k \theta_s$ . По этой причине и возникает стабилизирующая сила натяжения силовых линий, учтенная ранее в упрощенном рассмотрении. Однако строгое рассмотрение должно учитывать также и возмущение магнитного давления

$$\delta(H_x^2 + H_y^2)/8\pi \approx (H_x \delta H_x + H_y \delta H_y)/4\pi. \quad (2.218)$$

При дальнейшем анализе воспользуемся методом отыскания границы устойчивости, основанным на поиске решения, соответствующего условию  $\omega^2 = 0$ , т. е. случаю кулевидной упругости (см. § 2.12). Компонента уравнения Эйлера по оси  $y$  превращается в простое условие баланса сил  $i k \delta H_x H_z = H'_y \delta H_x$  (газокинетическое давление плазмы считаем пренебрежимо малым, как и в большинстве задач о желобковой неустойчивости плазмы). С помощью этого уравнения возмущение магнитного давления можно переписать в следующем виде:

$$H_y \delta H_y / 4\pi - i H'_y \delta H_x / 4\pi k.$$

Основная компонента уравнения Эйлера — по оси  $x$  (в направлении действия силы тяжести) — теперь принимает вид

$$\frac{i(kH_y)}{4\pi} \delta H_x - \delta g - \frac{(H_y \delta H_y)'}{4\pi} + \frac{i(H'_y \delta H_x)'}{4\pi k} = 0. \quad (2.219)$$

Воспользуемся еще уравнениями

$$\delta H_x = i k H_y \xi_x; \quad (2.220)$$

$$\delta \rho = \rho' \xi_x; \quad (2.221)$$

$$\delta H'_x + i k \delta H_y = 0, \quad (2.222)$$

полученными из условия вмороженности магнитного поля  $\partial \mathbf{H} / \partial t = -i \omega [\mathbf{u} \times \mathbf{H}]$ , уравнения непрерывности и условия  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  соответственно. Исключая все переменные, кроме  $\delta H_x$ , нетрудно получить одно уравнение для возмущения магнитного поля:

$$\delta H''_x - k^2 \delta H_x - (4\pi \rho' g / H^2) \delta H_x = 0. \quad (2.223)$$

Теперь видно, в чем заключался дефект простого вывода, основанный на балансе сил: не был учтен член со второй производной (обязанный своим происхождением возмущенному давлению магнитного поля).

Обращает на себя внимание изящная аналогия между исследуемым уравнением и уравнением Шредингера с потенциальной ямой  $1/x^2$  для известной задачи нерелятивистской квантовой механики о «кладении» частицы на притягивающий центр. Не удивительно, что ход рассуждений, который будет сейчас проведен, очень напоминает рассуждения, содержащиеся практически в любом курсе квантовой механики.

В окрестности сингулярности  $x=0$  (именно в этой точке  $k_{||}=0$ ) будем искать решение уравнения (2.223) в виде  $x^n$ , пренебрегая членом  $k\delta H_x$ . Подставляя искомое решение в усеченное уравнение

$$\delta H''_x - \frac{4\pi c' g}{H_y^2} \delta H_x = 0, \quad (2.224)$$

получаем выражение для показателя  $n = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + a}$ , где  $a = 4\pi c' g L_s^2 / H^2$ . Нетрудно увидеть, что характер решения меняется при условии  $a < -1/4$ . В этом случае решение можно представить в виде  $\sim x = \exp(ivn x)$ , где  $v = \sqrt{|a|} - 1/4$ . Это значит, что при  $x=0$  решение имеет бесконечно много нулей. Поэтому решения, затухающие на бесконечности, можно спарить с любым решением вблизи  $x=0$ .

При  $v^2 < 0$  этого следовать нельзя.

Поэтому критическое значение  $|a|$  есть  $1/4$ . Это означает, что в формуле (2.217) численный коэффициент нужно принять равным  $1/4$ . Отметим, кстати, что в упомянутой квантовомеханической задаче о «падении» на Центр условием захвата частицы потенциальной ямы также является  $a \leq -1/4$ .

У неустойчивости сайдэмского типа есть аналог и для равновесных систем совсем другого вида, в частности не имеющих «шпар», но обладающих свойствами магнитной потенциальной ямы «в среднем», как говорят, имеющих «средний минимум  $H$ ». Примером может служить магнитная ловушка, магнитное поле которой обладает минимумом  $\int dI/H$ .

Однако, как уже говорилось, трудело добиться, чтобы магнитное поле возрастило наружу во всех направлениях. Поэтому на локальных участках поверхности, где магнитное поле убывает в сторону от плазмы, возможно возникновение локальных деформаций — так называемых «баллонных» мод (рис. 2.41). Эта неустойчивость, как и мода Сайдэма, вызывается конечной величиной  $\varphi$  и стабилизируется, если сила натяжения силовых линий достаточно велика.

Как уже говорилось, кроме неустойчивостей, причиной которых является стремление плазмы к расширению, перпендикулярном к магнитному полю, может существовать особый тип неустойчивости, свойственный самой магнитной конфигурации. Эта неустойчивость обусловлена тем, что вдоль силовых линий винтового магнитного поля действуют максвелловские напряжения (неустойчивость пинчевания). Силовые линии стремятся сократитьсь путем деформации, при которой они выпрямляются, а плазменный шнур винтообразно извивается. Если малые винтовые дефор-

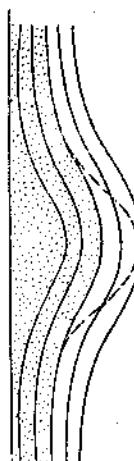


Рис. 2.41. Баллонная мода неустойчивости

мации описываются обычным выражением  $\Phi \sim \exp[i(n\varphi - kz)]$ , то  $n$  называется номером моды. При  $n=1$  возмущение соответствует простому однозаходному винту, при  $n=2$  — двухзаходному и т. д. Стабильность плазменного витка по отношению к винтовым деформациям зависит от коэффициента запаса  $q$ .

Согласно критерию Крускала — Шаффранова при  $q > 1$  стабилизируется наиболее опасная первая мода винтовой деформации. Если  $q > n$ , то обеспечена устойчивость по отношению ко всем винтовым модам вплоть до  $n$ -й. Детальный анализ показывает, что при очень больших  $q$  (четыре и более) должны быть стабилизированы все винтовые возмущения. Именно поэтому величина  $q$  и была названа коэффициентом запаса по винтовой неустойчивости.

Подведем итог описанного магнитогидродинамической неустойчивости идеальной плазмы с вмороженными силовыми линиями. Все три рассмотренных выше типа возмущений: желобковые или перестановочные деформации, баллонная мода и винтовое извивание плазменного шнуря с продольным током — при выполнении условий устойчивости развиваются очень быстро и практически полностью уничтожают эффект магнитной термоизоляции. Инкремент нарастания для перестановочных возмущений порядка  $v_i/a$  (где  $v_i$  — теловая скорость ионов), а для винтовых возмущений порядка  $v_i/a$ , т. е. неустойчивость развивается, как говорят, за «инерционные» времена.

Всякая попытка нагревать магнитогидродинамически чистую плазму представляется совершенно бесполезным делом. Однако, как мы видели, все указанные виды неустойчивости в плазме при низком давлении сравнительно легко подавляются при использовании магнитных систем с большим отношением  $H_\theta/H_\varphi$ , удовлетворяющих условию минимума  $B$  или же обладающих широм.

#### § 2.14. Магнитогидродинамическая неустойчивость равновесия при конечной электропроводности

До сих пор, говоря о магнитогидродинамической картине устойчивости плазмы, мы исходили из представления об идеальной виродженности магнитного поля в плазме. Реальная плазма из-за наличия сил трения между электронами и ионами обладает концепцией электропроводности. Во многих случаях, когда идеальная бесконечно проводящая плазма оказывается устойчивой, добавление даже небольшого электрического сопротивления «размеживает» силовые линии, и они перестают увлекаться плазмой. В результате может появиться новый класс так называемых дисипативных неустойчивостей, как правило, имеющих характер более медленного устремления просачивания плазмы в магнитном поле. Это просачивание тем медленнее, чем меньше электрическое сопротивление. Среди неустойчивостей, связанных с конечной проводимостью плазмы, условно выделим следующие виды: «гравитационную» и токовую конвективную, или «штопорную», неустойчивость. Эти типы неустой-

ческостей свойственны самой плазме, т. е. источником энергии для них является тепловое расширение плазмы, как и в случае жалобковой неустойчивости плазмы. При развитии этих неустойчивостей плазма практически не возмущает магнитного поля, образующего как бы жесткий каркас из неподвижных силовых линий. При этом, очевидно, электрическое поле должно быть потенциальным (безвихревым), т. е.  $E = -\nabla \Phi$ . Наибольшим сходством с обычной же-лобковой неустойчивостью идеально проводящей плазмы обладает «гравитационная» неустойчивость. Различие между этими двумя явлениями заключается в том, что если магнитное поле вмороило в плазму, то энергетически выгоднее развиваться только деформации, ориентированным строго вдоль силовых линий, в то время как при конечной проводимости плазмы появляется возможность распространения косых возмущений с волновым вектором  $k_z$ , не

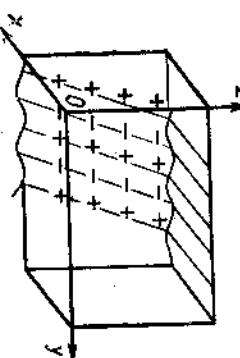


Рис. 2.42. Схематическое изображение развития деформаций при «гравитационной» неустойчивости

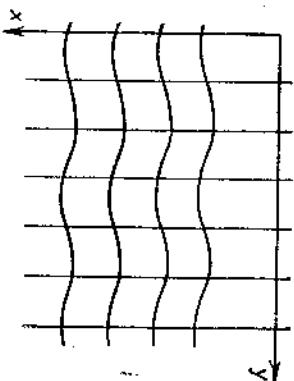


Рис. 2.43. Изолинии плотности плазмы при возникновении гравитационной неустойчивости

равным нулю. В обоих случаях неустойчивость существует тогда, когда напряженность магнитного поля убывает в сторону уменьшения плотности плазмы. Она вызывается диамагнитным эффектом, плазма выталкивается в сторону более слабого магнитного поля. Однако для упрощения математического анализа развития неустойчивости оказывается удобным заменить диамагнитный эффект, обусловленный неоднородностью поля, действием (в том же направлении) некоторой постоянной силы, а магнитное поле считать однородным. В качестве такой силы в упрощенной модели процесса удобно снова выбрать силу тяжести. Отсюда и происходит термин «гравитационная» неустойчивость. В окончательных формулах нетрудно перейти от силы тяжести к реальному диамагнитному эффекту.

Для того чтобы разобрать механизм возникновения и развития косых деформаций в плазме с конечной проводимостью, воспользуемся следующей моделью. Плоский слой плазмы с концентрацией  $n(x)$ , убывающей вдоль оси  $x$ , находится в сильном магнитном поле  $B$ , параллельном оси  $z$  (рис. 2.40). Сила тяжести, моделиру-

ющая влияние неоднородности магнитного поля, направлена по оси  $x$ . Допустим, что в плазме возникает флукутация плотности вида  $n_1 \sim \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$ . В результате такого возмущения изолинии плотности плазмы в каждом горизонтальном сечении приобретают волнистую форму (рис. 2.43). Это означает, что флукутации плотности указанного вида представляют собой малый сдвиг косых слоев плазмы вдоль оси  $x$ .

Вследствие существования силы тяжести, перпендикулярной к  $\mathbf{H}$ , должно происходить дрейфовое движение частиц, скорость которого направлена по оси  $y$  и имеет разный знак для ионов и электронов. В однородной плазме такое движение не может создать разделение зарядов. Однако, если возникают возмущения плотности, зависящие от координаты  $y$ , потоки заряженных частиц из соседних объемов плазмы не компенсируют друг друга, и поэтому происходит электрическая поляризация косых слоев с образованием объемных зарядов (см. рис. 2.42). В идеально проводящей плазме  $k_z \neq 0$  заряды должны были бы компенсироваться в результате перегекания вдоль силовых линий, поэтому косые деформации не могли бы развиваться. Однако при конечной проводимости плазмы полная компенсация не происходит, и из-за возникновения электрического поля начальное возмущение должно возрастать. В этом легко убедиться из рис. 2.42. В результате дрейфового движения на левой стороне каждого выступа (т. е. косого слоя, смешенного вперед) появляется положительный заряд, а на правой стороне — отрицательный. Величина этих зарядов зависит от склонности, с которой они отводятся током вдоль силовых линий. Электрическое поле, создаваемое зарядами в плазме, вызывает дрейф в направлении  $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ . Этот дрейф направлен таким образом, что выступы в распределении плотности смещаются в направлении положительной оси  $x$ , т. е. вперед, а владины — в противоположном направлении. Это означает раскачуку колебаний плотности, т. е. развитие неустойчивости.

Рассмотрим количественную сторону указанного механизма. Линеаризованное уравнение движения имеет вид

$$-\frac{1}{c} \mathbf{j}_y \mathbf{H} + \nabla p_1 = (1/c) [\mathbf{j}_1 \times \mathbf{H}] + m_1 n_1 \mathbf{g}, \quad (2.225)$$

В плазме с достаточно хорошей проводимостью косые возмущения должны нарастать медленно, поэтому инерционный член в уравнении (2.225) при  $k_z \neq 0$  относительно мал. Проектируя это векторное уравнение на оси  $x$  и  $y$ , находим следующие соотношения между компонентами тока и градиента давления:

$$\frac{1}{c} \mathbf{j}_y H + m_1 g n_1 = \partial p_1 / \partial x, \quad (2.226)$$

$$-(1/c) \mathbf{j}_{1x} H = \partial p_1 / \partial y. \quad (2.226a)$$

Из условия квазинейтральности в рассматриваемом процессе получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_1 = \operatorname{div} \mathbf{j}_\perp + ik_z j_{1z} = 0. \quad (2.227)$$

Из (2.226) и (2.226а) следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_\perp = -ik_y m_i c g n_i / H. \quad (2.228)$$

Подставляя это выражение в (2.227), находим

$$j_{1z} = (m_i c g / H) (n_i k_y / k_z). \quad (2.229)$$

Уравнение непрерывности имеет вид

$$-i\omega n_1 + n_0 \operatorname{div} \mathbf{u}_\perp + i n_0 k_z u_z + \mathbf{u} \cdot \nabla n_0 = 0. \quad (2.230)$$

Поперечная скорость движения плазмы удовлетворяет условию  $\operatorname{div} \mathbf{u}_\perp = 0$ . Действительно,

$$\mathbf{u}_\perp = -(c/H^2) [\nabla \varphi_1 \times \mathbf{H}] + (m_i c / e H^2) [\mathbf{g} \times \mathbf{H}],$$

где  $\varphi_1$  — электрический потенциал, связанный с возмущением в плазме. Следовательно,

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{c}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial x} \right) = 0. \quad (2.231)$$

Таким образом, второй член в выражении (2.230) исключается.

Продольным движением ионов также можно пренебречь, поскольку оно представлено в (2.230) членом, содержащим множитель  $n_0 k_z$ , который мал по сравнению с  $\nabla n^*$ . С учетом этих замечаний уравнение непрерывности (2.230) можно записать в следующей форме:

$$-i\omega n_1 - (c/H) ik_y \varphi_1 (dn_0/dx) = 0. \quad (2.232)$$

Далее из закона Ома находим

$$j_{1z} = ik_y \sigma \varphi_1, \quad (2.233)$$

где  $\sigma$  — электропроводность плазмы. Последнее соотношение справедливо в том случае, если продольный ток в невозмущенной плазме отсутствует.

Решая систему уравнений (2.229), (2.232) и (2.233), получаем следующее выражение для инкремента нарастания малых возмущений:

$$\gamma = -i\omega = \omega_g^2 / \omega_s, \quad (2.234)$$

где

$$\omega_g^2 = -g (1/n_0) (dn_0/dx); \omega_s = (k_z^2 / k_y^2) \omega_H \Omega_m T_{ei}. \quad (2.234a)$$

Согласно (2.234) инкремент растет с уменьшением  $k_z$ . При очень малых  $k_z$ , когда  $\omega_g$  становится порядка  $\omega_s$ , в уравнении (2.230) следует сохранить поперечный инерциональный член. Это означает, что исследуемая неустойчивость переходит в желобковую с инкрементом  $\gamma = \omega_g$ . Таким образом, «гравитационная» диссипативная неустойчивость является продолжением желобковой для случая с конечной проводимостью.

\* В плазме могут развиваться только косые возмущения, очень сильно вы-  
раженные вдоль силовых линий, для которых  $k_z$  относительно невелико.

Для того чтобы перейти к реальному случаю плазмы, находящейся в неоднородном магнитном поле, нужно заменить фиктивную силу  $rg$  истинной силой диамагнитного выталкивания.  
Если  $R$  — радиус кривизны силовой линии неоднородного магнитного поля, то замену нужно провести по уже известному рецепту:

$$g = (1/R) (2p/\rho). \quad (2.235)$$

Очевидно, что в системах, удовлетворяющих условию «минимум  $H$ », «гравитационная» неустойчивость подавляется так же, как и желобковая. Однако косые деформации с не слишком малым отношением  $k_z/k_y$  нельзя стабилизировать при помощи шири. Поэтому в ловушках без магнитной ямы «гравитационная» неустойчивость может приводить к аномальной утечке частиц из плазмы. Вследствие диссипативного характера «гравитационной» неустойчивости она тем менее опасна, чем выше температура плазмы.

Если в равновесном состоянии по плазме вдоль магнитного поля течет ток  $i$  и при этом существует градиент температуры в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{H}$ , то может возникать так называемый токово-конвективная неустойчивость. С ней также связана раскачка косых деформаций в плазме, но при этом, в противоположность «гравитационной» неустойчивости, главную роль играют не возмущения плотности, а возмущения температуры и электропроводности.

Пусть в плазме с начальной температурой  $T_0(x)$ , которая меняется вдоль оси  $x$ , происходит флуктуация температуры, причем  $T_1 = T - T_0$  зависит от координат  $x$  и времени  $t$  по закону  $\exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$ . Поскольку проводимость есть функция температуры плазмы, то возникают также возмущения проводимости  $\sigma_1 = (d\sigma/dT) T_1$ . Из-за наличия продольного тока возмущения должны приводить к электрической поляризации косых слоев, которая будет иметь такой же характер, как и в случае, когда на плазму действует сила тяжести.

Выясним условия раскачки малых возмущений. Из закона Ома для продольной составляющей тока следует, что

$$j_{1z} = \sigma_1 E_0 + \sigma_0 E_1, \quad (2.236)$$

где  $E_0$  — начальная напряженность электрического поля в плазме;  $E_1$  — возмущение поля. Из уравнений непрерывности для ионов и электронов получаем

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{v}_i = \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{e E_{1y}}{H} \frac{\partial n_i}{\partial x} + n_0 ik_z v_{iz} = 0; \quad (2.237)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{v}_e = \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{e E_{1y}}{H} \frac{\partial n_e}{\partial x} + n_0 ik_z v_{ez} = 0. \quad (2.238)$$

Время нарастания возмущений очень велико по сравнению со временем релаксации зарядов в плазме. Поэтому можно считать, что в рассматриваемом процессе квазинейтральность плазмы практи-

чески не нарушается. Вычитая выражение (2.237) из (2.238), получаем

$$v_{12z} - v_{1z2} = 0, \quad (2.239)$$

что эквивалентно условию  $j_{1z} = 0$ . Добавим теперь уравнение тен-лового баланса. Учитывая, что в неравновесной плазме энергия переносится вместе с веществом в результате дрейфового движения, можно записать это уравнение в виде

$$-i_w T_1 + (cE_{1y}/H) \partial T_1 / \partial x = -\lambda_{||} k_z^2 T_1. \quad (2.240)$$

Здесь  $\lambda_{||}$  — продольная температуропроводность плазмы. Поскольку электрическое поле потенциально, то  $E_{1y}/E_{1z} = k_y/k_z$ . Из (2.236), (2.240) и условия  $j_{1z} = 0$  легко получить дисперсионное уравнение токово-конвективной неустойчивости:

$$-i_w = \gamma = -\lambda_{||} k_z^2 + (cE_0/H) (k_y/k_z) (1/\sigma_{||}) d\sigma_{||} / dx. \quad (2.241)$$

В плазме с невысокой электронной температурой теплопроводность мала, и первым членом в (2.241) можно пренебречь. В таком случае косые деформации, для которых знак  $k_y/k_z$  совпадает со знаком  $d\sigma_{||}/dx$ , будут нарастать, т. е. должна иметь место токово-конвективная неустойчивость.

Однако в высокотемпературной плазме продольная теплопроводность при не слишком малых значениях  $k_z$  быстро выравнивает возмущения температуры. Инкремент нарастания возмущений  $\gamma$  может достигать больших положительных значений только при  $k_z \rightarrow 0$ . В торoidalной геометрии роль  $k_z$  выполняет компонента волнового вектора  $k_{||}$ . Как было выяснено в предыдущем параграфе, при наличии ширины величина  $k_{||}$  может быть очень мала только близи магнитной поверхности с замкнутыми силовыми линиями. Она быстро увеличивается при смещении от такой поверхности в радиальном направлении. Это означает, что ширину дает торово-конвективную неустойчивость. Расчеты показывают, что роль токово-конвективной неустойчивости в энергетическом балансе высокотемпературной плазмы относительно невелика и уменьшается с ростом  $T$ .

Следует отметить, что модификация неустойчивости такого типа часто наблюдается в низкотемпературных газовых разрядах во внешнем магнитном поле. Она также имеет свой аналог в электронно-дырочной плазме твердого тела.

### § 2.15. Неустойчивость тиринг-моды

Значительно более сложной является неустойчивость плазмы с конечной электропроводностью, при которой происходит «разрыв» силовых линий магнитного поля. Эта разновидность неустойчивости получила название «разрывной», или тиринг-моды (от английского слова tearing — «разрыв»).

В известном смысле ее можно представить себе как некоторое расширение области винтовой неустойчивости для магнитных систем с продольным током. В области устойчивости идеально проводящей плазмы, определяемой условием Крускала — Шаффранова, в плазме с конечной проводимостью появляются области возможного развития медленной неустойчивости, изменяющей структуру винтового магнитного поля из-за локального пинчевания. При этом в шунре близи замкнутых силовых линий происходит расщепление магнитных поверхностей и выделяются винтовые волны — локальные пики.

Эта мода неустойчивости играет важную роль в токамаке. Считают, что релаксационные колебания, наблюдавшиеся в токамаке в некоторых режимах, связаны с тем, что внутри плазменного шнура из-за тиринг-неустойчивости время от времени происходит перестройка магнитной конфигурации, при которой избыток энергии магнитного поля передается плазме. Неустойчивость такого типа может оказаться важной также

в астрофизике и геофизике. Математические методы исследования тиринг-моды весьма нетривиальны. Это связано с тем, что малое электрическое сопротивление в линеаризованных уравнениях для возмущений входит в малый коэффициент перед старшей производной. Это как раз та самая ситуация, в которой математика призывает к особой близительности. В некотором смысле теория гидродинамической устойчивости уступила «набить себе шипики» в классической задаче об устойчивости течения Пузазеля по трубе, прежде чем В. Гейзенберг и С. Лин сумели «укротить» известное уравнение Зоммерфельда — Оппа, в котором вязкость примерно таким же образом входила в малый коэффициент при старшей производной.

Физический смысл возникших для тиринг-моды математических осложнений можно разъяснить следующим образом. В некотором очень узком смысле из-за конечной проводимости плазмы происходит в буквальном смысле «разрыв» магнитных силовых линий. Неслучайно эта неустойчивость иногда называется «разрывной». При этом разорванные «концы» силовых линий соединяются заново (как говорят, происходит «пересоединение»), но, образно выражаясь, с другими партнерами. Не удивительно, что такая картина перестройки топологии магнитного поля требует адекватного сложного математического описания.

Рассмотрим плоскую модель тиринг-неустойчивости, позволяющую в задаче о возмущении равновесия плазмы в так называемом нейтральном слое. Пусть давление плазмы достигает макси-

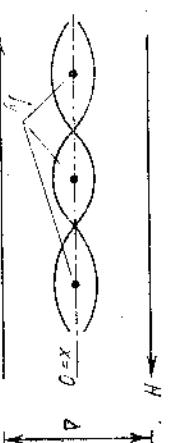


Рис. 2.44. Тиринг-неустойчивость нейтрального слоя

ума в плоскости  $x=0$ , магнитное поле, направленное по оси  $z$ , равно нулю при  $x=0$  и нарастает при удалении в обе стороны от нейтральной плоскости с характерным масштабом изменения  $x \approx \Delta$ . При этом направление магнитного поля в нижней полуплоскости обратно направлению его в верхней (рис. 2.44). Такой скачок магнитного поля поддерживается током  $j_0$ , текущим вдоль оси  $y$ . Даже из простых интуитивных соображений ясно, что такое равновесие обладает большим избытком свободной энергии, заключенной в магнитном поле. Потенциально этот избыток энергии мог бы освободиться, если бы, условно говоря, произошла «аннигиляция» встречных магнитных полей. Физическим механизмом такой аннигиляции могло бы быть пинчевание, разбиение первона-чально плоского токового слоя на отдельные жгуты (см. рис. 2.44).

При таком пинчевании возмущение выбирается в виде  $\exp(-i\omega t + ik_z)$ . Нужно учитывать возмущения скорости и магнитного поля  $u_x, u_z, H_x, H_z$ . Электрическое поле возмущения направ-лено по оси  $y$ . Уравнение Эйлера дает

$$-i\omega ru_x = -(dp/dx) + (1/4\pi c) j_y H_0 + (1/4\pi c) j_y H_z; \quad (2.242)$$

$$-i\omega ru_z = -ikp - (1/4\pi c) j_y H_x. \quad (2.243)$$

Востользовавшись условием несжимаемости  $iku_z + du_z/dx = 0$  (как будет видно, при этом возникнут очень медленные движения), уравнения (2.242) и (2.243) после несложных алгебраических преобразований можно привести к уравнению для  $u_x$ :

$$-i\omega ru_x = (1/4\pi c) j_y H_0 + (1/4\pi c) j'_y H_x - (i\omega/k^2) ru''_x. \quad (2.244)$$

В этом уравнении потенциальным источником неустойчивости является член  $(j'_y H_x)/H_0$ . С помощью условия вмкожденности его можно привести к виду  $-(1/4\pi c) j'_y H_0 \delta_{xz}$ . Он дает отрицательный вклад в упругость:  $j'_y H_0 \geq 0$  (рис. 2.45). С точки зрения энергетического принципа он соответствует третьему слагаемому (энергии пинчевания) в выражении (2.210а).

Однако столь легкая доступность этого энергетического резервуара является иллюзорной. Возмущения, изображенные на

рис. 2.44 и соответствующие неустойчивости типа локаль-

ного пинчевания в окрестности

плоскости  $x=0$ , молчаливо

преполагают разрыв и пересечение силовых линий магнитного поля. Но это не

возможно, если плазму считать идеальным электрическим проводником. Основная идея теории тиринг-неустойчивости заключается в том, что в неко-

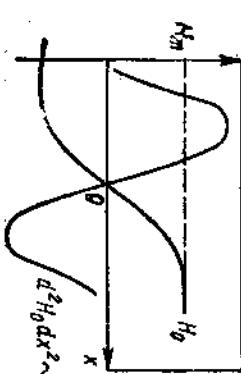


Рис. 2.45. Профиль магнитного поля и производной от плотности тока

сти нейтральной плоскости учитывается конечно, хотя и весьма малое, электрическое сопротивление. Его учтег размеживает силовые линии магнитного поля, тем самым снимая топологический запрет на разрыв и пересечение силовых линий.

Таким образом, можно «существовать доступ» к источнику свободной энергии и вызвать неустойчивость, которая может рассматриваться как один из случаев неустойчивостей волн с отрицательной энергией. Общие принципы такого рода неустойчивостей, разбранные в ч. 1, как раз и показывают, что неустойчивость появляется, если можно обеспечить конечную величину диссипации энергии волны.

Электрический ток в возмущении рассматриваемого здесь типа направлен по оси  $y$  и равен

$$j_y = \sigma [E_y - (u_x H_0 / c)]. \quad (2.245)$$

Всюду, за исключением некоторой окрестности нейтральной плоскости, электропроводность плазмы можно считать бесконечной, т. е. пренебрегать левой частью уравнения (2.245). В то же время оказывается такая окрестность  $x=0$ , в которой магнитное поле столь мало, что в уравнении (2.245) придется пренебречь вторым членом правой части. Назовем такой слой сингулярным. Очевидно, его толщина  $\delta$  будет зависеть также от того, насколько быстро спадает  $u_x$  при приближении к нейтральной плоскости. Закон спадания  $u_x$  в окрестности  $x=0$  существенным образом зависит от количества членов правой части уравнения (2.244). Член в левой части пренебрежимо мал, так как неустойчивость тиринг-моды развязывается очень медленно ( $\delta$  мало). В то же время старшую производную в правой части этого уравнения следует сохранить, хотя коэффициент, стоящий перед ней, мал по тем же причинам. Оценку  $\delta$  нетрудно провести, если приближенно третий член в правой части уравнения (2.244) представить в виде

$$(i\omega/k^2) (d^2 u_x / dx^2) \sim (i\omega/k^2) (u_x / \delta^2)$$

и сопоставить его по порядку величины с первым членом правой части того же уравнения. (Второй член при  $x \rightarrow 0$  становится очень малым, так как  $j'_y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ ). Итак, получаем

$$(i\omega/k^2) (u_x / \delta^2) \sim H_0 j_y / 4\pi c. \quad (2.246)$$

Для оценки величины  $j_y$  достаточно сопоставить его с любым из двух членов правой части уравнения (2.245). Например, со слагаемым  $\sigma(u_x/c) H_0$ . Такой произвол связан с тем, что на границе между внешней областью, где в уравнении (2.245) пренебрегают членом в левой части, и сингулярной областью, в которой пре-брегают вторым членом справа, все члены имеют один и тот же порядок величины. С учетом этого приближенное равенство (2.246) дает после подстановки  $j_y$  и  $H_0 \approx H_m \delta / \Delta$  следующую оценку:

$$\delta \approx \omega^{1/4} c^{1/2} \Delta^{1/2} \rho^{1/4} / k^{1/2} \sigma^{1/4} H_m^{1/2}. \quad (2.247)$$

Теперь рассмотрим внешнюю область, в которой электропроводность условно считается бесконечной. Уравнение для возмущения магнитного поля от  $\mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}/c$  с учетом  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  можно представить как

$$ik[H_x - (1/k^2)(d^2H_x/dx^2)] = (4\pi/c)j_y \quad (2.248)$$

(пока еще оно является совершенно точным и применимо всюду). Для внешней области в уравнении (2.244) преобразуют членами с инерцией, так как  $\omega$  мало. Тогда  $j_y = -i(j'_0/kH_0)H_x$ .

$$ik[H_x - (1/k^2)(d^2H_x/dx^2)] + (4\pi j'_0/c)H_x/k^2H_0 = 0. \quad (2.249)$$

Перед последним шагом к решению задачи удобно рядом с этим уравнением для магнитного поля во внешней области написать уравнение для магнитного поля во внутренней области

$$ik[H_x - (1/k^2)(d^2H_x/dx^2)] = (4\pi/c)\sigma E_y \quad (2.250)$$

в соответствии с уже обоснованным пренебрежением вторым слагаемым в законе Ома (2.245).

Правый член в (2.250) как раз и учитывает конечную диссипацию (омическую) энергии возмущения, которая является ключом к задаче о неустойчивости типа отрицательной энергии.

Одним полный баланс диссипируемой энергии. Для этого умножим обе части уравнений (2.245) и (2.250) на  $E_y$ , проинтегрируем по всему плазменному слою и сложим оба уравнения. Физический смысл правой части получившегося выражения ясен: это джоулево тепло  $\int j'E_d dx$ . Левая часть представляет собой изменение энергии магнитного поля возмущения. Дестабилизирующую роль, как уже говорилось, играет член с  $j'_0/H_0$ . Мы не будем вникать в характер решения для возмущения магнитного поля во внешней области. Строгое рассмотрение подтверждает, что существует взаимодействие, для которых слагаемое с  $j'_0/H_0$  доминирует. Тогда нетрудно оценить изменение энергии магнитного поля возмущения по порядку величины  $(ik/k^2) \int (j'_0/H_0) H_x E_y dx \sim (i/k) \times (c/4\pi\Delta) H_x E_y$ . В итоге получаем условие баланса междуростом энергии магнитного поля возмущения и джоулевой диссипацией:

$$(1/\Delta k) H_x E_y \sim (4\pi/c) \sigma E_y^2 \delta. \quad (2.251)$$

Так как электрическое поле легко выразить через магнитное с помощью уравнения Максвелла от  $\mathbf{E} = -(1/c)(\partial \mathbf{H} / \partial t)$ , то уравнение (2.251) с учетом  $E_y = (\omega/kc)H_x$  дает заготовку для получения дисперсионного уравнения

$$1/\Delta \sim (4\pi/c) \sigma (\omega/c) \delta. \quad (2.252)$$

Для магнитогидродинамической тиринг-моды величину  $\delta$  мы уже оценили [см. (2.247)]; таким образом, дисперсионное уравнение принимает вид

$$1/\Delta \sim (4\pi/c) \sigma (\omega/c) (\omega^{1/4}/k^{1/2}\sigma^{1/4}) (c^{1/2} \Delta^{1/2} \rho^{1/4} / H_m^{1/2}). \quad (2.253)$$

Очевидно оно всегда дает неустойчивый корень с инкрементом неустойчивости

$$\operatorname{Im} \omega \sim c^{5/5} k^{2/5} H_m^{2/5} / \sigma^{3/5} \Delta^{6/5} \rho^{1/5}. \quad (2.254)$$

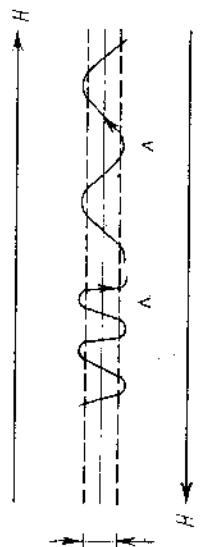


Рис. 2.46. Движение частиц в узком слое вблизи нейтральной плоскости

в винтовой системе координат с шагом винта, соответствующим нейтральной магнитной поверхности. Инкремент неустойчивости имеет такой же порядок величины, что и (2.254). Именно этот тип тиринг-моды привлекают для объяснения некоторых неустойчивостей в токамаке.

Выражение (2.252), использованное здесь как заготовка для получения дисперсионного уравнения, в действительности имеет значение, выходящее за рамки простого магнитогидродинамического приближения. Так, например, при известной осторожности его можно применить даже для случая бесстолкновительной плазмы. Равновесие с нейтральным слоем бесстолкновительной плазмы может иметь физический смысл для так называемого геомагнитного хвоста Земли и в некоторых астрофизических ситуациях. В такой задаче следует представлять себе характер движения частиц в магнитном поле, меняющим знак при переходе через нейтральную плоскость  $x=0$ . Вообще говоря, всегда, за исключением небольшой окрестности  $x=0$ , магнитное поле как бы привязывает частицы к своим силовым линиям, восстанавливая тем самым гидродинамический характер движения плазмы. Однако всегда найдется хотя бы узкий слой некоторой толщины  $\delta$ , внутри которого движение частиц не замагничено: они как бы движутся по узкому коридору, отражаясь от его стен. Примерный вид траекторий заряженных частиц изображен на рис. 2.46. Толщину этого коридора  $\delta$  можно оценить следующим образом. Очевидно, частицы могут

проникать за его пределы (с возвратом назад) на расстояние порядка ларморовского радиуса. Хотя в столь неоднородном магнитном поле представление о ларморовском радиусе имеет смысл только по порядку величины, опеним его  $\sigma_{\text{rms}}/\mu H \sim \delta_1$ . Далее учтем, что  $H_0/H \sim \delta_1/\Delta$ . Отсюда  $\delta \sim (\Delta h)^{1/2}$ .

Естественно считать, что эта величина в бесстолкновительной задаче и будет аналогом толщины сингулярного слоя для тиринг-молды. В отсутствие столкновений формальное выражение для электропроводности  $\sigma = ne^2/m_e$  дает бесконечность. Тем не менее можно воспользоваться этим выражением, если под  $\tau$  подразумевать величину, близкую к той, которая используется в теории твердого тела и плавмы при рассмотрении явления аномального скин-эффекта. В выражении для  $\sigma$  время свободного пролета (ускорения)  $\tau$  не обращается в бесконечность даже при отсутствии столкновений, так как в среднем за время порядка  $\tau \sim 1/k_0$  частица сместится вдвое слоя на расстояние порядка длины волны и попадет в об-

ласть с другой фазой электрического поля  $E_y$ . Естественно ввести некоторую эффективную электропроводность

$$\sigma \sim (ne^2/m_e) (1/kv_{te}). \quad (2.255)$$

Заметим, что вклад электронов в такую электропроводность в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз больше ионного. В итоге инкремент нарастания, который находим после подстановки (2.255) в (2.252), имеет вид

рядок величины

$$I_{\text{так}} \sim k_B T_e (v_{te}/\Lambda)^{3/2} \quad (2.256)$$

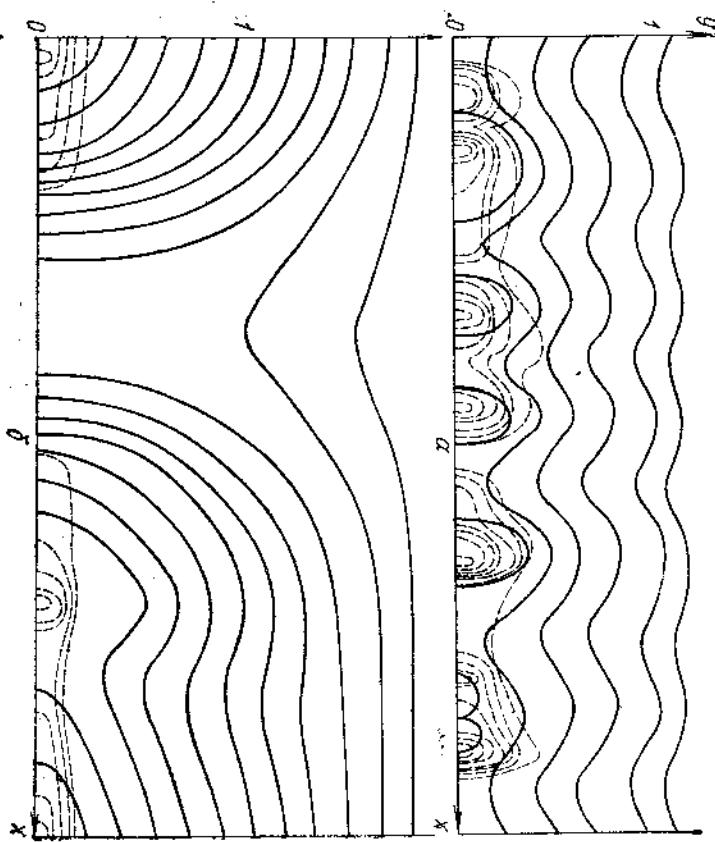


Рис. 2.47. Магнитные силовые линии в верхней части плоского нейтрального слоя плазмы на начальной стадии развития тиринг-неустойчивости (a) и в сильно не-

изолинии равной плотности плазмы. На начальной стадии нестабильность приводит к формированию магнитных островов возле центра генитального слоя. В дальнейшем происходит объединение групп островов (Зефиров Л. М., Липатов А. С. «Физика плазмы», 1976, т. 5).

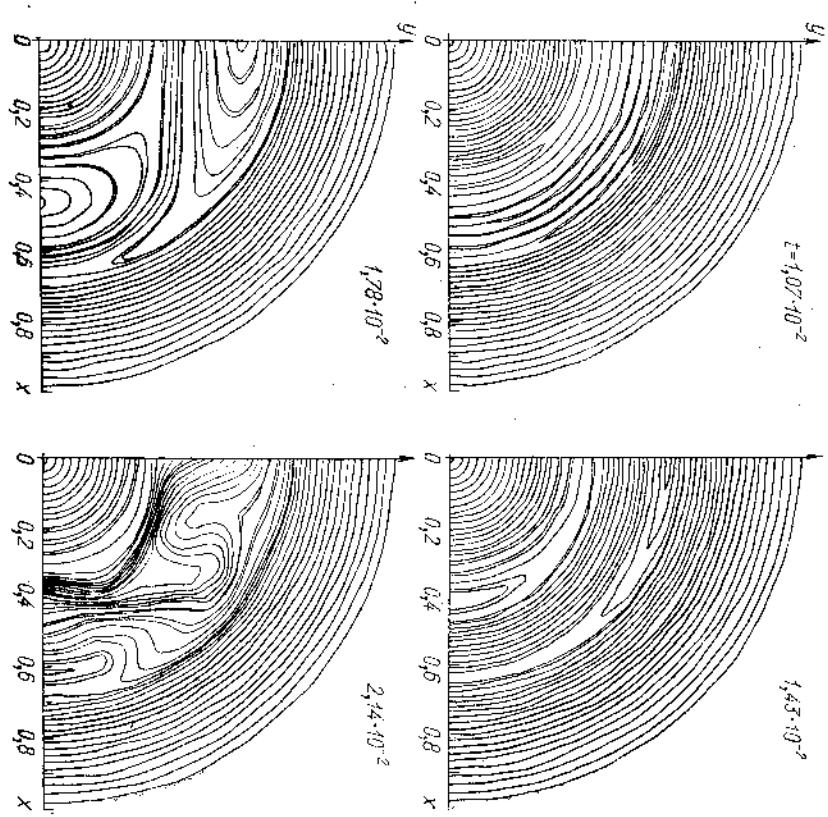


Рис. 248. Эволюция во времени двух взаимосвязанных магнитных островов, появившихся в токамаке в результате развития тиринг-мод в случае, когда на двух различных магнитных поверхностях тиринг-мод имеет одно и то же азимутальное волновое число ( $m = 3$ ). На нелинейной стадии происходит слияние разрушенных магнитных островов (White R. M., Monticello D. A., Rosenbluth M. N., Wadel W. Y. Preprint PPL-1282, Princeton, 1976)

женты, потребовала бы использования методов кинетической теории.

Считается, что инкремент неустойчивости (2.256) слишком мал для того, чтобы вызвать заметные эффекты в нейтральном слое геомагнитного хвоста. Если в силу каких-нибудь обстоятельств, например из-за наличия в равновесии небольшой вертикальной компоненты магнитного поля, движение электронов в сингулярном слое замагничено, то нужно учесть ионы. Действуя по уже использованному рецепту  $\delta \sim (r_H \Delta)^{1/2}$ ,  $\sigma \sim (ne^2/m_i)(1/kv_i)$ , легко найти инкремент неустойчивости, который в этом случае оказывается гораздо большим, чем определяемый формулой (2.256):

$$\text{Ип} \omega_i \sim (m_i/m_e)^{1/4} \text{Ип} \omega_c. \quad (2.257)$$

Этот режим неустойчивости, по-видимому, может играть важную роль в геофизике. Энергия, высвобождаемая из-за тиринг-неустойчивости геомагнитного хвоста, считается ответственной за явление взрывообразного вспретения плазмы геомагнитного хвоста в магнитосфере и ионосферу Земли.

Развитие бесстолкновительной тиринг-моды в плоском нейтральном слое иллюстрируется на рис. 2.47, который получен в численном эксперименте. Для сравнения на рис. 2.48 показаны конфигурации магнитных поверхностей в токамаке, полученные при исследовании гидродинамической тиринг-моды численными методами.

### § 2.16. «Дрейфовая» неустойчивость плазмы

Магнитная гидродинамика даже при учете конечного электрического сопротивления остается всего лишь некоторой приближенной моделью описания плазмы. Она полностью учитывает некоторые важные степени свободы, как, например, относительное движение ионной и электронной компонент. Неустойчивости, связанные с такими дополнительными степенями свободы, могут играть в физике плазмы большую роль. Разумеется, плазма должна быть достаточно разреженной, чтобы реализовать их. Среди этих неустойчивостей основную роль играет так называемая дрейфовая неустойчивость. Соответствующий ей тип движения плазмы — «дрейфовые» волны — складывается из практических свободного перетекания электронов вдоль силовых линий магнитного поля и движения ионов в основном поперек магнитных силовых линий.

В самой простой форме для описания этих эффектов в общем законе Ома нужно учесть градиент давления электронной компоненты. Исследование этого эффекта привело к обнаружению так называемых дрейфовых неустойчивостей, теория которых к настоящему времени разработана достаточно детально. Попытаемся в общих чертах изложить основные представления о физическом механизме явлений, относящихся к этому классу.

С чисто математической точки зрения мы будем при этом все время только скользить по поверхности теории, оставаясь на границе качественного и количественного анализа. Нетрудно найти оправдание для такого нестрогого подхода. Дело в том, что, переходя от изучения относительно простых видов магнитогидродинамической неустойчивости идеально проводящей плазмы к эффектам, связанным с диссипативными силами, и далее — к дрейфовым неустойчивостям, мы вступаем в район все более сложных теоретических построений, которые к тому же имеют гораздо меньшую опору со стороны эксперимента.

Одним из исходных пунктов в исследовании нового класса неустойчивостей служит уравнение движения электронной компоненты. В наиболее общем случае это можно записать в виде [см. (2.58)]

$$m_e n \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} + \nabla p_e = -en\mathbf{E} - \frac{en}{c} [\mathbf{u}_e \times \mathbf{H}] + \frac{ne}{c} \mathbf{j}. \quad (2.258)$$

Последний член в правой части есть сила трения между электронами и ионами.

Изучая механизм развития диссипативных неустойчивостей, мы использовали проекцию этого уравнения на направление, параллельное  $\mathbf{H}$ , и при этом пренебрегали инерционным членом и величиной  $\nabla p_e$ , считая их малыми по сравнению с силой трения. Именно на указанных допущениях основано применение закона Ома в его простейшей форме  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}_t$ .

Теперь поступим иначе: пренебрежем силой трения, но будем учитывать  $\nabla p_e$ . При этом из (2.258) следует, что

$$\nabla p_{te} = -en\mathbf{E}_t. \quad (2.259)$$

Инерционный член по-прежнему считается малым. Соотношение (2.259) в теории дрейфовых неустойчивостей часто используется в качестве эквивалента закона Ома.

Рассмотрим снова плоский слой плазмы, в котором при отсутствии возмущений концентрация  $n(x)$  планарно меняется вдоль оси  $x$ . Магнитное поле  $\mathbf{H}$ , как и ранее, будем считать однородным и направленным вдоль оси  $z$ . Допустим далее, для простоты, что температура электронов  $T_e$  постоянна по всему слою. Для «стандартных» возмущений плотности типа плоской волны (expr(ik $y$  + ik $z$  - iot)) из (2.259) в линейном приближении следует уравнение для возмущения плотности электронов  $n_{te}$ :

$$n_{te} T_e = n_{te} \Phi_t, \quad (2.260)$$

где  $\Phi$  — возмущение электрического потенциала. Это так называемое Больцмановское распределение, уже использовавшееся ранее.

Если так же, как это было сделано при анализе гравитационной неустойчивости, пренебречь продольным движением ионов и, кроме того, учесть, что поперечное движение обусловлено элек-

трическим дрейфом, то уравнение петрерывности можно записать в виде

$$-i\omega n_i - ik_y (c\varphi_1/H_0) dn_0/dx = 0. \quad (2.261)$$

С помощью (2.260) и (2.261) из условия квазинейтральности  $n_e = n_i$  можно найти дисперсионное соотношение

$$\omega = -k_y (cT_e/eH_0) (1/n_0) (dn_0/dx). \quad (2.262)$$

Здесь  $[(1/n_0) dn_0/dx]^{-1}$  — характерный размер неоднородной плазмы, который имеет тот же порядок величины, что и радиус попечного сечения плазменного шнура  $a$ .

Эта волна называется дрейфовой, так как скорость ее распространения в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{H}_0$ , по порядку величины совпадает со скоростью дрейфового движения неоднородной плазмы (при  $T_e \sim T_i$  величина этой скорости пропорциональна  $r_{Hi} v_{Te}/a \sim r_{Hi} v_{Ti}/a$ ). Пределы применимости полученного выражения для частоты дрейфовой волны вытекают из условия, чтобы фазовая скорость в продольном направлении  $\omega/k_z$  лежала в интервале, определяемом первенствами

$$v_{Te} \sqrt{m_e/m_i} < \omega/k_z < v_{Ti}. \quad (2.263)$$

Если  $\omega/k_z$  приближается к  $v_{Te}$ , то необходимо учитывать инерционный член в уравнении для электронов; при этом выражение для  $\omega$  изменяется. В другом крайнем случае, когда  $\omega/k_z$  стремится к  $v_{Te} \sqrt{m_e/m_i}$ , дрейфовая волна в плазме с холодными ионами ( $T_e \gg T_i$ ) переходит в ионно-звуковую, при этом существенное значение приобретает продольное движение ионов. Если же ионы имеют температуру, близкую к электронной, то  $v_{Te} \sqrt{m_e/m_i} \sim v_{Ti}$ , и поэтому вступает в действие сильный механизм затухания волны на ионах (затухание Ландау), вследствие чего волна не может распространяться. Заметим, что из условия  $\omega/k_z > v_{Ti}$  следует, что

$$k_z/k_y < r_{Hi}/a. \quad (2.264)$$

В сильном магнитном поле  $r_{Hi}/a \ll 1$ , и, таким образом, дрейфовая волна должна быть сильно вытянутой вдоль магнитного поля.

Рассмотрим теперь свойства дрейфовых волн для привычной геометрии плазменного шнура в магнитном поле, ограничивающейся, как обычно, случаем, когда  $H_\varphi \ll H_z$ . При слабой гороидальности, т. е. в случае, когда радиус сечения плазменного шнура  $a$  очень мал по сравнению с длиной витка  $L$ , элементарное волновое возмущение зависит от координат по закону  $\exp(i(\varphi - 2\pi z/L))$ . Волновой вектор  $k_\parallel$  в направлении магнитного поля для такого возмущения обращается в нуль на замкнутой силовой линии с углом полного поворота  $\Omega$ , равным  $2\pi l/n$ . Согласно (2.215) вблизи такой замкнутой линии, лежащей на магнитной поверхности радиуса  $r$ ,

$$k_\parallel = k_\varphi (\Delta r/r) \theta_s \quad (2.265)$$

где  $\theta_s$  — величина шира,  $k_\varphi$  — азимутальная составляющая волнового вектора. Выражение, определяющее частоту волны для гороидальной системы, должно быть аналогично (2.262) при замене  $k_y$  на  $k_\varphi$ . Из условия  $\omega/k_\parallel > v_{Ti}$  и выражения (2.262) для  $\omega$  следует

$$\Delta r < r_{Hi}/\theta_s. \quad (2.266)$$

Таким образом, при наличии шира дрейфовая волна с множествами  $n$  и  $m$  локализована в узкой области вблизи магнитной поверхности с радиусом  $r_0$ , на которой шаг возмущения совпадает с шагом силовой линии. Если температура ионов не очень сильно отличается от температуры электронов, то за пределами области (2.266) возмущения типа дрейфовых волн быстро затухают. Следует отметить, что, как показывает детальный анализ различных механизмов возбуждения дрейфовых колебаний, в большинстве случаев ширина области локализации возмущений плазмы оказывается во много раз меньшей, чем  $r_{Hi}/\theta_s$ .

Пренебрегая влиянием сил трения и сил инерции в уравнениях движения, получаем для частоты дрейфовых волн чисто вещественную величину. Это означает, что такие волны представляют собой гармонические колебания, распространяющиеся в пределах своей области локализации без заметного затухания или нарастания. Они не могут приводить к переносу частиц поперек магнитного поля, т. е. вызывать аномальную лиффузию плазмы. В этом можно убедиться на основе следующих достаточно общих соображений.

При медленных колебаниях типа дрейфовых волн в плазме с достаточно высокой температурой справедливо соотношение (2.260), связывающее продольные компоненты градиентов давления и электрического потенциала. Вследствие очень большой продольной теплопроводности плазмы электронная температура должна сохранять постоянное значение во всех точках одной и той же силовой линии. Поэтому, интегрируя обе части (2.259) вдоль  $\mathbf{H}$ , получаем

$$\Phi = (kT_e/e) \ln n_e + \Phi_0. \quad (2.267)$$

В замкнутой магнитной системе с вращательным преобразованием каждая бесконечная силовая линия порождает и повсюду плотно заполняет гороидальную магнитную поверхность. Очевидно, что уравнение (2.267) связывает значения  $n_e$  и  $\Phi$  во всех точках такой поверхности, а  $\Phi$  изменяется только при переходе от одной магнитной поверхности к другой. Таким образом, на каждой магнитной поверхности устанавливается Больцмановское распределение электронов.

Из (2.267) следует, что для всех компонент градиента электронного давления, лежащих на заданной поверхности, справедливо соотношение

$$\partial p_e / \partial s = -e n_e E_s. \quad (2.268)$$

При возбуждении дрейфовых волн поведение электронной компоненты описывается уравнением

$$\nabla p_e = -enE - (e/c)[\mathbf{u}_e \times \mathbf{H}]. \quad (2.269)$$

В силу (2.268) проекция  $[\mathbf{u}_e \times \mathbf{H}]$  на любое направление, касательное к выбранной магнитной поверхности, равна нулю. Отсюда следует, что компонента скорости  $u_{\perp}$ , перпендикулярная к магнитной поверхности, также равна нулю, т. е. переход электронов от одной магнитной поверхности к другой запрещен.

Если учесть силу трения между электронами и ионами, то частота может появиться «минимая добавка» ( $\omega = \omega_0 + i\gamma$ ), что означает раскачуку дрейфовых волн. Единственным условием для их раскачки является неоднородность плазмы по отношению к расположению плотности или температуры. Поэтому в литературе по теории плазмы неустойчивости такого типа иногда называются также «универсальными неустойчивостями».

Рассмотрим сначала случай, когда температуру в невозмущенной плазме (т. е. в исходном состоянии) можно считать постоянной по всему объему, а плотность плазмы неоднородна. Пусть в слое плазмы возникает возмущение типа плоской волны (эксп.  $(-\omega t + ik_y y + ik_z z)$ ). Из уравнения движения (2.258) при учете малого инерционного члена следует, что

$$\dot{\mathbf{j}}_{\perp} = (c/H^2) [\mathbf{H} \times (-i\omega n \mathbf{u}_i + \nabla p)]. \quad (2.270)$$

Движение ионов в первом приближении определяется электрическим дрейфом. Поэтому в уравнении (2.270) вместо  $\mathbf{u}_i$  можно подставить  $[(c/H^2) \mathbf{H} \times \nabla \Phi]$ . Принимая во внимание условие  $\operatorname{div} \mathbf{j}_i = 0$ , находим следующее соотношение между компонентами плотности тока:

$$j_{1z} = (i/k_z) \operatorname{div} \mathbf{j}_{\perp}. \quad (2.271)$$

Применив известную формулу векторного анализа\*, получаем из (2.270) и (2.271)

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}_{\perp} = (i\omega n c/H^2) \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} \mathbf{u}_i. \quad (2.271a)$$

Используя выражение для  $\mathbf{u}_i$ , можем привести (2.271) к виду

$$j_{1z} = (k_y^2/k_z^2) \omega n_0 (m_i c^2 / H^2) \Phi. \quad (2.272)$$

Линеаризованное уравнение непрерывности имеет вид [см. уравнение (2.261)]

$$-i\omega n_0 - (c/H) ik_y \Phi d n_0 / dx = 0, \quad (2.273)$$

а уравнение движения для электронов в направлении, параллельном магнитному полю (с учетом силы трения), можно записать следующим образом:

$$ik_z n_0 T_e = e \omega_0 k_z \Phi + (m_e / v) j_{1z}, \quad (2.274)$$

\*  $\operatorname{div} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$ .

Решение системы (2.272) — (2.274) дает следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 - j_{1z} \omega + i \omega \omega_d = 0, \quad (2.275)$$

где  $\omega_d = (k_z^2/k_y^2) \omega_0 n_0 T_e$ ;  $(T_e = 1/v)$ , а  $\omega_d = -(k_y c T_e / e H n_0) \times (dn_0 / dx)$  — дрейфовая частота (2.262). При очень частых соударениях, а следовательно, малых  $T_e$ ,  $\omega_d \ll \omega_0$  из дисперсионного уравнения имсм  $\omega \approx \pm i(\omega_0 \omega_d)^{1/2}$ . Скорость парастания этой так называемой дрейфовой диссилативной неустойчивости становится максимальной и сравнимой с самой дрейфовой частотой  $\Omega_D$  при условии  $\omega_0 \approx \omega_d$ .

Эти соотношения реализуются лишь в достаточно холодной плазме газового разряда или в условиях ионосферы (когда время свободного пробега электронов может еще уменьшиться в результа- тате столкновений с нейтральными частицами). Поэтому дрейфово-диссилативная неустойчивость такого типа не представляет опасности для высокотемпературной плазмы в магнитных ловушках. Но в свое время, на заре термоядерных исследований, считалось, что моделирование магнитного удержания плазмы можно проводить в сравнительно холодной плазме газового разряда. Тогда в течение длительного времени оставалось неразгаданным явление так называемой бомовской аномальной диффузии. На основе некоторых данных ранних исследований диффузии плазмы подверг магнитного поля Д. Бом постулировал, что коэффициент аномальной диффузии

$$D_{\perp} = c T / 16 e H. \quad (2.276)$$

Он предположил, что причиной такой аномалии является неустойчивость неизвестной природы, переводящая плазму в турбулентное состояние.

Многие первые попытки разгадать механизм этой гипотетической неустойчивости оказались безрезультатными. Но сразу, как только была открыта дрейфово-диссилативная неустойчивость, одноглазый взгляд на ее максимальный инкремент  $\sim \omega_d = k_c (T/eH) (n'/n)$  был достаточно, чтобы сделать вывод, если существует диффузия Бома, причина должна быть именно эта неустойчивость.

В высокотемпературной плазме, как правило,  $\omega_s \gg \omega_d$ , и для ча- стоты колебаний получаем

$$\omega = \omega_d + i(\omega^2 u / \omega_s). \quad (2.277)$$

Чем больше  $\tau_{ei}$ , тем больше  $\omega_s$  и меньше инкремент неустойчивости. Точно такую же роль играет шир, увеличивающий эффективную величину  $k_{\parallel}$ , а значит, и  $\omega_s$ . Поэтому дрейфово-диссилативная неустойчивость такого типа оказывается неопасной.

Следует также отметить, что в высокотемпературной плазме, где обычные силы трения между электронами и ионами малы, на первый план выступает бесстолкновительный аналог дрейфово-диссилативной неустойчивости, в которой роль диссилативных сил играет затухание Ландау. Сама неустойчивость принимает в ука-

заном случае вид резонансной раскачки дрейфовых волн электронами, продольная скорость которых совпадает с фазовой скоростью волны  $\omega/k_z$ .

Оценку инкремента неустойчивости нетрудно провести традиционным методом, вычисляя работу поля волны над резонансными частицами ( $\omega \approx k_z v_{\perp}$ ). Кинетическое уравнение для электронов в дрейфовом приближении будет иметь вид [см. (2.53)]

$$-i\omega f_1 + ik_z v_{\perp} f_1 + c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{eE_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0.$$

Это уравнение отличается от обычного линеаризованного уравнения (1.83) наличием слагаемого  $(c(E_y/H_0)(\partial f_0/\partial x))$ , учитывающим перенос электронов со скоростью электрического дрейфа  $cE_y/H_0$ . Тогда поправка  $f_1$  к функции распределения

$$f_1 = \frac{-1}{\omega - k_z v_z} \left\{ c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{eE_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right\}.$$

Вычислим работу электрического поля волны над резонансными электронами:

$$\overline{j_z E_z} = -e \operatorname{Im} \int \frac{E_z v_z d v_z}{\omega - k_z v_z} \left\{ c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{eE_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right\} \approx \approx \frac{e n_0}{|k_z| k_z} E_z \left\{ c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} \Big|_{v_z=\omega/k_z} - \frac{eE_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \Big|_{v_z=\omega/k_z} \right\}. \quad (2.279)$$

Знак этой работы, определяющий устойчивость или неустойчивость системы, зависит от конкуренции двух слагаемых. Второе из них описывает обычное затухание Ландау и при отсутствии эффекта типа пучковой неустойчивости ( $df/dt > 0$ ) играет стабилизирующую роль. Первое же слагаемое описывается вы свобождение энергии при расширении плазмы и является источником дрейфовой неустойчивости.

Вычисление суммы в (2.279) проводится автоматически для случая, например, макроволнового распределения плазмы  $f_0 \sim \sim \exp(-m_e v_z^2/2T)$  с однородной температурой и дает

$$\overline{j_z E_z} = \frac{e^2 n_0}{k_z^2 T |k_z|} |E_z|^2 f_0 \left( v_z = \frac{\omega}{k_z} \right) (\omega - \omega_d). \quad (2.280)$$

Здесь учтено, что  $E_y = (k_y/k_z) E_z$  (из  $E = \text{град } \Phi$ );  $\omega_d$  определяется соотношением  $(2.262)$ . Таким образом, для простой дрейфовой волны, описываемой формулой (2.262), имеет место точная взаимная компенсация обоих конкурирующих процессов. Однако при учете неоднородности температуры первое слагаемое может перезависеть, и тогда возникает неустойчивость. Кроме того, более тонкие рассуждения показывают, что с уменьшением длины волны дрейфовых колебаний в направлениях, перпендикулярном к силовым линиям магнитного поля, частота  $\omega$  всегда оказывается меньше, чем дает простая модель (2.262). Это также ведет к неустойчивости.

Такая неустойчивость уже не зависит от деталей конфигурации плазмы. Поэтому ее также иногда называют универсальной. Наиболее эффективным средством борьбы с ней является широкоперекрещенность силовых линий магнитного поля.

По этой причине рассматриваемая форма неустойчивости не представляет катастрофической опасности для удержания энергии и частиц в плазме. В конечном счете малая эффективность этой разновидности дрейфовой неустойчивости связана с тем, что при медленных дрейфовых колебаниях электроны успевают распределяться по Больцману.

Большую опасность представляет неустойчивость, обусловленная не градиентом плотности, а градиентом температуры. Эта неустойчивость называется температуро-драйфовой. Допустим для простоты, что слад температуры от осевой линии плазменного зонка к его поверхности происходит по гораздо более кругой кривой, чем слад концентрации, т. е.  $(d \ln T / d \ln n) \gg 1$ . В указанном случае в линеаризованном уравнении непрерывности для ионов можно пренебречь членом, содержащим  $d n_0 / d x$ , но при этом уже нельзя исключить член, пропорциональный продольной скорости  $v_{\perp z}$ . Следовательно, уравнение непрерывности принимает вид

$$-i\omega n_0 + ik_z v_{\perp z} n_0 = 0. \quad (2.281)$$

Физический смысл этого соотношения заключается в том, что при движении, для которого  $\operatorname{div} n_{01\perp} = 0$ , единственной причиной изменения плотности может быть только продольное сжатие или разрежение плазмы.

Компоненту скорости  $v_{\perp z}$  можно найти из уравнения, описывающего продольное движение ионов плазмы:

$$-i\omega n_0 m_i u_{\perp z} + ik_z (n_0 T_1 + n_1 T_0) = -ik_z \Phi e. \quad (2.282)$$

Если пренебречь теплопроводностью, то уравнение теплового баланса можно записать в виде

$$-i\omega T_1 - i(c/H) k_y \Phi d T_0 / d x = 0. \quad (2.283)$$

Электроны можно считать распределенными по Больцману. Это означает, что имеет место соотношение  $e \Phi_1 = (n_1/n) T_0$ . Полставляя это выражение для  $\Phi_1$  в уравнение (2.282) и решая систему (2.282) — (2.283), получаем следующее уравнение для определения  $\Phi$ :

$$\omega^3 = (\omega + (1/2)\omega_T) k_z^2 c_s^2. \quad (2.284)$$

Последнее уравнение имеет три корня, среди которых один действительный и два комплексных. Один из комплексных корней соответствует раскачке малых возмущений. При этом инкремент оказывается порядка частоты.

Более строгий теоретический анализ показывает, что в плотной плазме неустойчивость имеет место, если  $\eta = (d \ln T / d \ln n) > 2/3$ . В разреженной плазме, где роль сил трения играет загущение Ландау, неустойчивость должна проявляться при  $\eta > 2$  для длинноволновых колебаний ( $k_y n \ll 1$ ) и при  $\eta > 1$  для коротковолновых ( $k_y n \sim 1$ ). Раскачка имеет место при  $\omega_T > 2k_z c_s$ ). Для подавления этой разновидности дрейфовой неустойчивости потребовалась бы более сильный шир. Поэтому ее нельзя исключить как возможный источник дополнительной потери тепла из плазмы в токамаке.

Интересные модификации дрейфовых неустойчивостей возможны в многокомпонентной плазме. Примером такой плазмы может служить плазма с примесями. Вообще проблема примесей является одной из основных проблем управляемого синтеза. В магнитных ловушках вблизи стенок камеры неизбежно наличие некоторого количества тяжелых ионов примесей (ионов, выбытих из стенок) с большим зарядовым числом  $Z \gg 1$ . Хорошо известно, что наличие примесей нежелательно для проблемы управляемого термоядерного синтеза, поскольку даже небольшое число примесей с большим зарядовым числом существенно увеличит потери на излучение (см. § 1.8).

Менее известным является тот факт, что наличие примесей приводит к появлению новой ветви дрейфовой неустойчивости плазмы. Механизм этой неустойчивости становится довольно простым, если использовать изложенный выше подход к дрейфовым волнам. В рассматриваемом теперь случае неустойчивыми оказываются достаточно медленные возмущения, фазовая скорость которых вдоль магнитного поля мала по сравнению с тепловой скоростью водородных ионов, но существенно больше тепловой скорости тяжелых примесных ионов:

$$v^H_T < \omega/k_z < v^{H^+}_T \ll v_T. \quad (2.286)$$

В этом случае не только электроны, но и водородные ионы успевают приобрести большинство распределение (2.260). Что же касается примесных ионов, то их плотность находится из гидродинамического уравнения непрерывности (2.261). В этом случае из условия квазинейтральности имеем вместо (2.262) следующую формулу для частоты медленных дрейфовых движений в трехкомпонентной плазме:

$$(e/T_e)n_e - (e/T_i)n_{H_0} - (ck_y/H_0)(dn_{H_0}/dx)(Z/\omega) = 0. \quad (2.287)$$

Так же, как и в случае универсальной дрейфовой неустойчивости, раскачка рассматриваемой здесь дрейфовой волны связана с тем, что в формуле для работы электрического поля волны над резонансными частотами (2.279) наряду с обычными для однородной плазмы слагаемыми, пропорциональными  $E_x(\partial v_0/\partial x)$ , имеется также слагаемое, пропорциональное  $E_y(\partial v_0/\partial x)$ . При этом в силу

условия (2.286) основной вклад в работу поля над частицами дает взаимодействие с резонансными ионами водорода (в отличие от универсальной дрейфовой неустойчивости, при которой  $v_T < \omega/k_z < v^H_T$  и существенно только резонансное взаимодействие волн с электронами). В этом случае инкремент нарастания дрейфовой волны

$$\gamma \sim [\partial v^H_0 / \partial v_x + (k_y/k_z)(cm_H/eH_0)(\partial v^H_0 / \partial x)]|_{v_x = \omega/k_z}. \quad (2.288)$$

Считая температуру плазмы однородной, получаем из (2.288) следующее условие возникновения неустойчивости:

$$1 + (k_y/\omega)(cT_H/eH_0)(1/n_{H_0})(dn_{H_0}/dx) < 0. \quad (2.289)$$

Используя формулу (2.287) для частоты, это условие можно записать в виде

$$T_e/(T_e + T_H) + (dn_{H_0}/dx)[Z(dn_{H_0}/dx)]^{-1} < 0. \quad (2.290)$$

Очевидно, для возникновения рассматриваемой неустойчивости знаки градиентов плотности для основных и примесных ионов должны быть противоположными, что действительно имеет место. Приводит к усиленной дифузии примесных ионов в глубь плазмы. Любопытным аналогом дополнительной примесной компоненты могут служить частицы, запертые в торoidalных ловушках. Различие между пролетными и захватываемыми частицами наиболее существенно проявляется для медленных возмущений с  $\omega/k_z \ll v_T$ .

В электрическом поле, обусловленном таким возмущением, пролетные ионы и электроны успевают присобрести большинство захватываемых частиц, можно определить из уравнения непрерывности (2.261). В этом уравнении, однако, надо учесть, что из-за столкновения частицы покидают конус захвата с некоторой частотой  $v_1$ . С учетом этого следует модифицировать уравнение непрерывности (2.261) следующим образом:

$$i \omega n_1' + i k_y \frac{c}{H_0} \delta \frac{dn_1}{dx} - v_1 n_1' = 0, \quad (2.291)$$

где  $\delta = V_\epsilon^-$  — доля захватенных частиц в равновесном состоянии\*. При вычислении  $v_1$  следует учесть, что из-за существования конуса захвата функция распределения в равновесном состоянии имеет большие градиенты по скорости (меняется на интервале скопления).

\* Поскольку глубина магнитной ямы, в которую захватываются частицы, порядка  $\Delta H$ , где  $\Delta H = H_0 a/R$ ,  $a/R$  — отношение малого радиуса тора к большому, то из максвелловского распределения по скоростям будут захватываться только частицы с достаточно малыми продольными скоростями:

$$v_\parallel \ll v_T \sqrt{\Delta H/H_0} \approx v_T \sqrt{a/R}.$$

Таблица 2.Г

Систематизация микронеустойчивостей неоднородной плазмы	Характеристика	Частота	Инкремент
Тип неустойчивости	Аддона волны		перемножения
Дрейфово-диссипативная Дрейфово-температурая Дрейфовые неустойчивости на запертых электронах и ионах	$r_{HI} < \lambda_{\perp} < a$ $\lambda_{\perp} \geq r_{HI}$ $\lambda_{\perp} \sim r_{HI}$	$\omega_d$ $\omega_d$ $\omega_d$	$< \omega_d$ $\sim \frac{k_{\parallel} v_{Te}}{\omega} \omega_d$ $\sim \omega_d$
Токово-конвективная	$\lambda_{\perp} > r_{HI}$	$\omega_d / (a/R)^{1/2} \leq \omega \leq \omega_d$	$< (a/R)^{1/2} \omega_d$ $(m_e/m_i)^{1/2} \frac{u_0}{a}$

ности  $v_t = \sqrt{v_{tr}^2 + v_{te}^2}$ ). В этом случае в интегrale столкновений Ландау достаточно учесть только "слагаемое со старшей (второй) производной" [см. уравнение (1.98)]. Таким образом,  $v_t = v/v_e$ . Тогда из уравнения непрерывности (2.291) имеем следующую формулу для возмущения плотности захваченных частиц (электронов и ионов):

$$n_1^{tr} = -1/(\omega + i v_t/v_e) (c/H_s) k_y \phi (du_0/dx). \quad (2.292)$$

В этом случае из условия квазинейтральности

$$n_{1e} + n_{1i}^{tr} = n_{1d} + n_{1f}^{tr}$$

вместо формулы (2.262) имеем для частоты дрейфовых колебаний следующее дисперсионное уравнение:

$$2 = \omega_d \sqrt{\epsilon} / (\omega + i v_t/v_e) + \omega_d \sqrt{\epsilon} / (\omega + i v_t/v_e), \quad (2.293)$$

Здесь  $\omega_d$  — частота дрейфовых колебаний, определяемая уравнением (2.262). Слагаемое в левой части дисперсионного уравнения описывает вклад пролетных электронов и ионов, имеющих большинство распределение (для простоты считаем, что ионы и электроны имеют одинаковую температуру:  $T_e = T_i$ ). В правой части дисперсионного уравнения представлены вклады от запертых электронов и запертых ионов. Исследуем случай, когда  $v_t/v_e < \omega/v_e$ , т. е. наиболее важный для термоядерных ловушек. Тогда из (2.293) имеем следующее решение дисперсионного уравнения:

$$2 = \omega_d \sqrt{\epsilon} [1 - i(v_t/v_e)] + i\omega(v_d \epsilon^{3/2}/v_e),$$

т. е.

$$\omega = (\sqrt{\epsilon/2}) \omega_d + i(\omega^2 d^2/2v_e) \epsilon^{1/2} - 2iv_t/v_e. \quad (2.294)$$

Таким образом, при

$$v_{te} < \omega_d^2 d^2/4, \quad (2.295)$$

имеет место так называемая дрейфово-диссипативная неустойчивость на запертых частицах. Эту моду неустойчивости, по-видимому, невозможно полностью погасить. Поэтому следует ожидать, что она служит дополнительным (но не катастрофическим) каналом утечки из торoidalных плазменных ловушек.

### § 2.17. Микронеустойчивость плазмы и аномальная диффузия

В отличие от крупномасштабных магнитогидродинамических неустойчивостей, способных вызвать катастрофическое изменение исходного равновесия плазмы, мелкомасштабные неустойчивости (микронеустойчивости) типа дрейфовых не приводят к немедленному изменению равновесия. Следует ожидать, что они вызывают появление мелкомасштабных пульсаций с характерными пространственными размерами порядка наибольше неустойчивых длин волн исходных линейных возмущений. А характерные частоты пульсаций, вообще говоря, должны вести свое происхождение

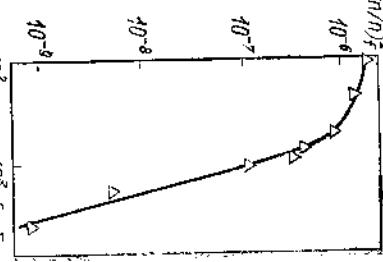


Рис. 2.49. Спектр флюктуаций плотности плазмы в токамаке, измеренный методом рассеяния пучка микроволнового излучения.

В среднем такое турбулентное просачивание плазмы через перекрытие  $H$  носит диффузонный характер, поэтому часто говорят об аномальных диффузии и теплообмене. В случае, если возникающая турбулентность может быть представлена в виде суперпозиции большого числа слабо взаимодействующих между собой элементарных колебаний, явление аномальной диф-

р. 49)

Верхняя граница спектра (около  $10^5$  кГц) согласуется с оценкой максимальной частоты дрейфовых волн по формуле (2.292) при  $k_y \sim 1/R$ .

Физии можно описывать на языке метода слабой турбулентности. Первым шагом в этой схеме является использование квазилинейного приближения. Функция распределения электрона (ионов), как обычно, разбивается на быстро осцилирующую и медленно меняющуюся части. Ограничимся кинетическим уравнением в дрейфовом приближении:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{[E \times H_0]}{H_0} \nabla_{\perp} f + v_{\parallel} \frac{H}{H_0} \nabla_{\parallel} f + \frac{e E_x}{m} \frac{\partial f}{\partial v_x} = 0. \quad (2.296)$$

Аномальная диффузия появляется при усреднении второго и третьего членов этого уравнения, т. е. за счет пульсаций вследствие электрического дрейфа и блужданий силовой линии магнитного поля. Для простоты не будем рассматривать последний эффект (его физический смысл практически уже разобран в § 2.10 при обсуждении разрушения магнитных поверхностей). Поле колебаний  $E_y$  представим в виде

$$E_y = \sum_{\mathbf{k}} E_{ky} \exp(-i\omega_k t + ikr).$$

Выражение для быстро осцилирующей части уже получено в § 2.16 [см. формулу (2.278)]. После обычной процедуры усреднения (для сравнения см. § 1.16) получаем уравнение для медленно меняющейся части

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{c}{H} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{k_x^2}{k_y} \frac{\partial}{\partial v_x} \right) E^2_{yk} \ln \frac{1}{\omega - k_x v_x} \left( \frac{c}{H} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{k_x}{k_y} \frac{\partial}{\partial v_x} \right) f. \quad (2.297)$$

Здесь в явном виде содержится диффузионный член с коэффициентом диффузии резонансных частот

$$D_{\perp} = \sum_{\mathbf{k}} (c E_{yk} / H_0)^2 \ln (1/\omega - k_x v_x). \quad (2.298)$$

Таким образом, задание спектра флуктуаций электрического поля автоматически определяет скорость диффузии. Поболее выражение возникает для мод с  $k_{\parallel} = 0$ :

$$\ln \frac{1}{\omega - k_x v_x} \rightarrow \ln \frac{1}{\omega} = \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2},$$

где  $\gamma$  — мнимая часть частоты соответствующей моды. Модами с  $k_{\parallel} = 0$ , в частности, являются двумерные (в плоскости перпендикулярной к  $\mathbf{H}$ ) конвективные ячейки. Как и в обычной несжимаемой жидкости, они представляют собой движение апериодического типа ( $\text{Re}_{\omega} = 0$ ). Следовательно, остается лишь мнимая часть, связанная с затуханием. При наличии диффузионного размешивания такое затухание равно  $\gamma_{\mathbf{k}} = k_y D_{\perp}$ . Тогда (2.298) переходит в

$$D_{\perp} = \sum_{\mathbf{k}} (c E_{ky} / H_0)^2 (1/k_y^2 D_{\perp}). \quad (2.299)$$

И в итоге для коэффициента аномальной диффузии получается выражение, отличное от (2.298), зависимость от амплитуды флуктуаций электрического поля:

$$D_{\perp} = \left( \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k_y^2} c^2 E^2_{ky} / H_0^2 \right)^{1/2} \quad (2.300)$$

Самый трудный этап решения задачи об аномальном переносе частиц и тепла заключается в нахождении спектра турбулентности  $|E_{\mathbf{k}}|^2$ . Квазистационарный спектр пульсаций, который устанавливается после развития неустойчивости, — результат действия двух факторов: 1) вследствие неустойчивости энергия непрерывно накачивается в неустойчивые моды пульсаций; 2) из-за нелинейного взаимодействия между модами энергия передается по спектру в область затухания. Последний процесс для большинства микронестабильностей плазмы не укладывается в рамки приближения слабой турбулентности. Приходится привлекать размерностные оценки, также как это делается обычно в теории гидродинамической турбулентности.

Коэффициент диффузии можно записать в виде

$$D \sim v_p^2 \tau. \quad (2.301)$$

Здесь  $v_p$  — пульсационная скорость плазмы;  $\tau$  — характерное время исчезновения корреляции. В данном случае  $\tau \approx 1/|\gamma|$ , поскольку здесь нет другого масштаба времени, характеризующего необратимость турбулентного режима. Амплитуду пульсаций определим из следующих соображений. С одной стороны, неустойчивость приводит к нарастанию амплитуды пульсаций  $\partial v_p / \partial t \sim \gamma v_p$ , с другой — нелинейные члены типа  $(c\nabla)v$  вызывают перекашку энергии в те части спектра, где флуктуации затухают. Из условия баланса между этими двумя процессами и определяется стационарное значение амплитуды пульсаций

$$|\gamma| v_p \approx (v_p / \lambda_{\perp}) v_p, \quad (2.302)$$

где  $\lambda_{\perp}$  — характерный размер турбулентных пульсаций поперек  $\mathbf{H}$ .

Определим из (2.302)  $v_p \approx |\gamma| \lambda_{\perp}$ , получим

$$D \approx |\gamma| \lambda_{\perp}^2. \quad (2.303)$$

Естественно в качестве  $\lambda_{\perp}$  взять длину волны неустойчивости.

Для максимального  $\lambda_{\perp} \sim [(1/n)(dn/dx)]^{-1}$  и инкремента  $\gamma \sim \omega_d$ , достигаемого при условии  $\omega_d \sim \omega_d$  (см. § 2.16), окончательно получим

$$D_{\perp} \approx c T_{\infty} / 2 \pi e H_0. \quad (2.304)$$

Коэффициент диффузии, принятый в гипотезе Бома, имеет такой же порядок величины. Нетрудно видеть, что при достаточно боль-

ших  $H_0$  получился бы меньший коэффициент диффузии. В самом деле, при неизменном  $k_y$  и ограниченном снизу  $k_z \geq 2\pi/L$  с ростом  $H_0$  значение  $\omega_s$  станет больше  $\omega_d$ .

Значение магнитного поля  $H^*$ , выше которого происходит указанное изменение режима турбулентной диффузии, можно оценить из условия  $\omega_s \gtrsim \omega_d$  при  $k_y \sim 1/a$ ,  $k_z \sim 2\pi/L$ . В результате получаем

$$H^* \approx L^{2/3} c (m_i m_{eV} T_e)^{1/3} a^{-4/3} e^{-1}. \quad (2.305)$$

В высокотемпературной плазме с малой частотой соударений  $\nu_e$  практически всегда приходится иметь дело с гораздо большими полями, следовательно, диффузия из-за дрейфово-диссипативной неустойчивости не опасна.

### § 2.18. Энергетический баланс плазмы в токамаке

Если неустойчивости в плазме подавлены, длительность удержания частиц и энергии в магнитных ловушках определяется процессами диффузии и теплоотдачи. Изложим некоторые результаты теоретического анализа закономерностей, которым подчиняются эти процессы.

Для конкретности ограничимся случаем токамака, во в действительности выводы будут иметь более общий характер. Диффузионная скорость потока плазмы  $i_\phi$  направлена по малому радиусу, и, на первый взгляд, для ее определения можно воспользоваться формулой для прямолинейного плазменного шнура:  $i_\phi = -(c/\sigma_\perp H^*) dr/dr$  [ср. с формулой (2.171)].

Однако диффузия плазмы в токамаке содержит дополнительные слагаемые, играющие гораздо более важную роль. Отбросим не столь принципиальные дополнительные эффекты: скажем, плазменного шнура, обусловленное взаимодействием продольного тока с создаваемым им азимутальным полем, дрейфовое движение в вихревом электрическом поле, возникающем лишь при изменении продольного поля  $H_\phi$ .

Ключевая роль принадлежит в рассматриваемом случае торoidalной поправке  $\eta_{tor}$ . В замкнутых системах дрейфовое движение частиц, вызванное торoidalной неоднородностью основного магнитного поля, должно было бы приводить к быстрому накоплению объемных зарядов (рис. 2.50).

Из-за наличия торoidalной компоненты магнитного поля ( $H_\phi$ , создаваемой в случае токамака током по плазме, эти заряды должны компенсироваться вследствие перетекания вдоль силовых линий. В результате возникает своеобразная перманентная циркуляция зарядов: торoidalный дрейф все время стремится их разделять, движение же по  $\Phi$  со скоростью  $v_\parallel H_\phi / H$  возвращает из-

быток заряда обратно (см. рис. 2.50). Рассуждая так же

как при выводе выражения для скорости диффузии плазмы попечерк прямолинейного магнитного поля (см. § 2.9), не трудно заключить, что появление новых токов, приведет к дополнительной силе трения между электронами и ионами, а следовательно, и к дополнительному дрейфу под действием этой силы. Проделаем нужные выкладки, пользуясь математическим языком Магнитной гидродинамики. Условия равновесия по  $r$  и  $\Phi$  имеют вид

$$-\partial p/\partial r + (1/c) j_\phi H_\phi - (1/c) i_\phi H_\phi + F_{\text{tor},r} = 0; \quad (2.306)$$

$$-(1/r)(\partial p/\partial \Phi) + F_{\text{tor},\Phi} = 0. \quad (2.307)$$

В качестве простейшего заменителя торoidalной силы снова введем искусственную тяжесть  $F_{\text{tor}} = -\rho g$ , ориентированную, как показано на рис. 2.50, вдоль направления от внутреннего к внешнему обводу тора. Тогда

$$F_{\text{tor},r} = \rho g \cos \Phi; F_{\text{tor},\Phi} = -\rho g \sin \Phi.$$

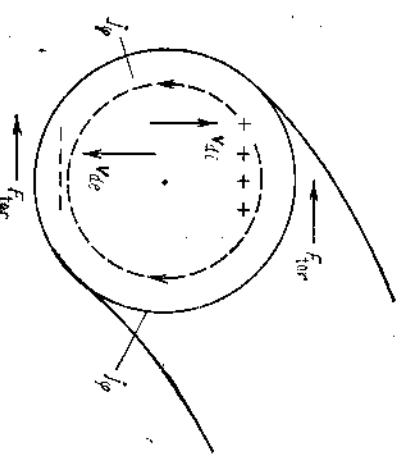
Считая, что в целом торoidalная поправка к равновесным параметрам плазмы  $p(r)$  и  $\rho(r)$  мала (т. е. выполнено условие  $r/R \ll 1$ ), из уравнения (2.307) находим

$$\rho = \rho_0(r) + r \rho_0(r) g \cos \Phi. \quad (2.308)$$

Теперь это выражение нужно подставить в (2.306). Нетрудно видеть, что получится уравнение, в котором некоторые члены вовсе не зависят от угла  $\Phi$ , а другие члены пропорциональны  $\cos \Phi$ . Приведя эти части нулю по отдельности, получим

$$-d\rho_0/dr + (1/c) j_\phi H_\phi = 0. \quad (2.309)$$

(обычное условие равновесия плазмы с прямыми силовыми линиями, в данном случае играющее роль нулевого приближения);

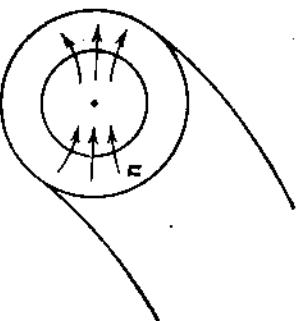


Скорость результирующего дрейфового движения  $u_r^*$  плазмы под действием обусловленной током  $j_b$  силы трения ( $F_b = j_b/e\pi_{r,b}$ ) получаем из закона Ома

$$j_b = \sigma_{||} u_r^* / eH_\varphi. \quad (2.310)$$

Итак, из (2.309) и (2.310) получаем

$$u_r^* = -c^2 r (d\rho_0/dr) g \cos \varphi / \sigma_{||} H_\varphi^2, \quad (2.311)$$



т. е. торoidalная поправка к диффузионному растеканию плазмы оказывается знакопеременной по углу  $\Phi$ . Картина такого растекания скорее напоминает своеобразную конвекцию (рис. 2.51). Но если определить средний поток плазмы по углу  $\Phi$ , то он оказывается отличным от нуля и направлена наружу.

Действительно, интеграл от потока частиц по углу  $\Phi$  дает

$$\text{Рис. 2.51. Диффузионная конвекция плазмы в токамаке вследствие конечной проводимости}$$

$$\int_0^{2\pi} n_i d\Phi = \int_0^{2\pi} n_i(r) u_i d\Phi + \int_0^{2\pi} \delta n(r, \Phi) u_i d\Phi.$$

Первый член в правой части обращается в нуль. Чтобы найти  $\delta n(r, \Phi)$  — торoidalную поправку к плотности плазмы, будем считать, что температура плазмы однородна вдоль магнитной поверхности, т. е.  $\delta n = \delta p$ . С учетом этого из (2.308) находим

$$\delta n = (n_s/p_s) \delta p = \frac{n_s}{p_s} r \rho_0(r) g \cos \varphi.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} \delta n u^* d\Phi = -(\pi r^2 c^2 (d\rho_0/dr) g^2 \rho_0 / \sigma_{||} H_\varphi^2) (n_s/p_s) \quad (2.312)$$

Если ввести  $\bar{u}_r$  — усредненное значение диффузионной скорости, разделив (2.312) на  $2\pi n_0(r)$ , то для  $\bar{u}_r$  получим

$$\bar{u}_r^* = -(r^2/2) (c^2 (d\rho_0/dr) g^2 \rho_0 / \sigma_{||} H_\varphi^2 \rho_0). \quad (2.312a)$$

Возвращаясь к настоящей торoidalной скорости, в частности к симметрическому  $2p/R$  вместо искусственной тяжести  $p g$ , для усредненной скорости получаем

$$u_{top} = -(2c^2/\sigma_{||}) (r^2/R^2) (1/H_\varphi^2) (d\rho_0/dr). \quad (2.313)$$

Сумму  $u_r$  и  $u_{top}$  можно рассматривать как эффективную диффузионную скорость радиального потока плазмы в торoidalнойlovushke. В этом случае имеем

$$u_\perp = u_r + u_{top} = -\frac{c^2}{\sigma_{||} H^2} \left( 1 + \frac{\sigma_{||}}{\sigma_{\perp}} g^2 \right) \frac{dp_0}{dr}. \quad (2.314)$$

Параметр  $q = (r/R) (H_\varphi/H_\perp)$  часто называют «коэффициентом запаса устойчивости» (по отношению к винтовым возмущениям). В условиях экспериментов на установках токамак при  $r = a$  он обычно лежит в пределах от 3 до 5. Величина  $q$  связана с углом вращения силовых линий соотношением  $q = 2\pi/\Omega$ . Формула (2.314) эквивалента следующему соотношению между эффективным значением суммарного коэффициента диффузии и обычным коэффициентом диффузии  $D_\perp^*$ , соответствующим магнитному полю с прямыми силовыми линиями (см. (2.171)):

$$D_{PS} = D_\perp^* (1 + (2\sigma_{||}/\sigma_{\perp}) q^2). \quad (2.315)$$

Если в нем выразить  $q$  через  $\Omega$ , то получается формула, справедливая также и для систем типа стеллараторов:

$$D_{PS} = D_\perp^* (1 + 8\pi^2 \sigma_{||} / \Omega^2 \sigma_{\perp}). \quad (2.315a)$$

Эту формулу часто называют формулой Пфириша — Шлотера.

Второй член, характеризующий здесь торoidalную поправку к коэффициенту диффузии для устойчивой плазмы, относительно велик (на установках токамак отношение  $D_{PS}/D_\perp^*$  должно было бы составлять 10–20). Но даже с учетом этой поправки скорость диффузии оказывается небольшой. Однако практически в существующих экспериментальных установках не удается получить плазму, в которой все виды неустойчивости подавлены. Поэтому коэффициент поперечной диффузии во много раз (на несколько порядков) превышает значение коэффициента, вычисляемого согласно Пфиришу и Шлоттеру.

Однако нужно иметь в виду, что указанное выражение (2.315) для  $D_\perp$  справедливо лишь в том случае, если плазма имеет достаточно высокую концентрацию, и поэтому при вычислении скорости потока частиц можно пользоваться магнитогидродинамическим приближением. Для этого необходимо, чтобы в каждом элементе объема распределение частиц по скоростям было полностью изотропным.

В плазме с низкой концентрацией и высокой температурой влияние торoidalности на процессы переноса может быть более сильным, чем указывалось выше. Это объясняется той ролью, которую в таких процессах играют частицы, запертые в ограниченных участках силовых линий между областями сильного поля.

При низкой концентрации такие частицы образуют в системе как бы отдельный статистический ансамбль. Очевидно, что о существовании отдельной группы запертых частиц можно говорить в том случае, если за время колебания одной такой частицы между точками отражения вероятность ее перехода из «запертого» состояния в «пролетное» мала.

Очень грубую оценку коэффициента поперечной диффузии  $D'_\perp$  для запертых частиц можно получить при помощи соотношения

$$D'_\perp \sim (\Delta r)^2 / \tau_1, \quad (2.36)$$

где  $\Delta r$  — смещение частицы в направлении, перпендикулярном к  $H$ , за промежуток времени  $\tau_1$ . Примем  $\Delta r$  по порядку величины равным полуширине «банана» — перпендикульного сечения траектории запертой частицы. Для того чтобы частица сместилась на расстояние  $\Delta r$ , ее скорость должна повернуться на угол порядка  $\sqrt{a/R}$  (так как для запертых частиц угол  $v_{||}/v$ , составляемый направлением скорости с плоскостью, перпендикулярной к  $H$ , имеет порядок величины  $\sqrt{a/R}$ , и при изменении этого угла соответственно изменяется ширина перпендикульного сечения).

Поскольку кулоновские столкновения носят характер многократного рассеяния, при котором суммарный угол поворота скорости  $\Delta\alpha$  статистически складывается из малых отклонений, то время  $\tau_1$  можно определить при помощи соотношения  $\tau_1 \sim (\Delta\alpha)^2 \sim \tau a/R$ , где  $\tau$  — время между двумя соударениями электрона с ионами.

Подставляя в (2.316) выражения для  $\Delta r$  и  $\tau_1$ , находим

$$D'_\perp \sim (r^*_{He}/\tau) (H_\phi^* / H_\varphi^*), \quad (2.37)$$

где  $r^*_{He}$  — ларморовский радиус электронов.

Отношение концентрации запертых частиц к концентрации всех частиц в плазме порядка  $\sqrt{a/R}$ . Поэтому эффективный коэффициент диффузии запертых частиц должен быть порядка  $D'_\perp \sqrt{a/R}$ . Окончательно, с учетом численного множителя, для получения которого потребовалось бы воспроизвести громоздкие вычисления так называемой неоклассической теории переноса, коэффициент диффузии равен

$$D_{g.s.} = 3.6 \sqrt{a/R} (r^*_{He}/\tau) (H_\phi^* / H_\varphi^*). \quad (2.38)$$

Эта величина превышает торoidalную поправку в формуле (2.315) в отношении  $(R/r)^{3/2}$ , т. е. для существующих установок по меньшей мере в несколько десятков раз. Таким образом, оказывается, что при чисто классическом (ламинарном) рассмотрении эффект торoidalности может увеличить диффузионный поток в плазме низкой плотности в 1000 и более раз.

Проведем наглядное сопоставление скоростей диффузии в двух рассмотренных предельных случаях: магнитогидродинамическом и так называемом банановом — построим условный график зависимости коэффициента диффузии от частоты столкновений  $v_e = 1/\tau_e$  (рис. 2.52). Условность такого представления очевидна, хотя

бы из того, что в действительности выражения (2.315) и (2.318) для коэффициентов диффузии содержат прямую зависимость коэффициента от температуры помимо зависимости  $v_e$  от температуры. В обоих предельных случаях ход  $D(v_e)$  изображается прямыми. Наклон  $D_{g.s.}(v_e)$  (в банановом режиме) в  $3.6(R/a)^{3/2}$  раза больше. Этот

режим реализуется при

$$v_e < (r/R)^{3/2} (H_\phi^* / H_\varphi^*) (v_{te}/r).$$

Если это условие не выполнено, то запертые электроны не успевают описать бананообразную траекторию. Да и само разделение электронов на запертые и пролетные теряет смысл.

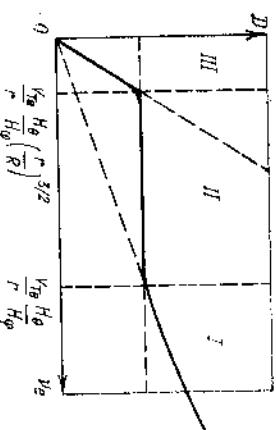
Магнитогидродинамический предел, в свою очередь, накладывает ограничение на частоту столкновений  $v_e$  снизу. Для применения гидродинамического приближения необходимо, чтобы длина свободного пробега была существенно меньше характерного пространственного размера. Для продольного (вдоль  $H$ ) движения электронов в качестве такого размера следует выбрать  $r H_\phi^* / H_\varphi^* —$  среднее расстояние вдоль силовой линии между областями с максимумом и минимумом поля в торoidalном витке. Следовательно, в режиме частных столкновений

$$(v_{te}/r) (H_\phi^* / H_\varphi^*) (r/R)^{3/2} < v_e < (v_{te}/r) (H_\phi^* / H_\varphi^*).$$

Видим, что рассмотренные пределы банаевой и магнитогидродинамической диффузий разделены на рис. 2.47 областью, где частота столкновений лежит в интервале

$$(v_{te}/r) (H_\phi^* / H_\varphi^*) (r/R)^{3/2} < v_e < (v_{te}/r) (H_\phi^* / H_\varphi^*). \quad (2.39)$$

Практически это довольно широкий интервал, так как  $(R/r)^{3/2} \gg 1$ . Как же ведет себя коэффициент диффузии в этой промежуточной области? Ответ на этот вопрос следует из «неоклассической» теории диффузии: в интервале (2.39) практически исчезает зависимость от частоты столкновений. Можно сказать, что этот ответ является наиболее неожиданным результатом «неоклассической» теории. Физический смысл этого результата становится более



понятным, если воспользоваться аналогией с затуханием Ландау. Неоднородная часть торoidalного магнитного поля магнитной ловушки как бы играет роль поля волны (в данном случае следовало бы назвать ее магнотостатической). Запертые частицы вполне аналогичны резонансным частицам в механизме затухания по Ландау. А вместо силы трения  $F_\phi = j_\phi / ne_{\text{ret}}$  выступает сила трения электропроводности между электронами и ионами. Эта аналогия существенно упрощает выкладки.

Итак, торOIDальное магнитное поле  $H_\phi = H_0 [1 - (r/R) \cos \varphi]$ . Неоднородная добавка  $\delta H = -H_0 (r/R) \cos \varphi$ , как уже говорилось, имитирует поле волны. Вызываемая ею поправка  $f_1$  к исходной функции распределения «резонансных» (запертых) электронов удовлетворяет линеаризованному кинетическому уравнению

$$v_{\parallel} (H_\phi/H_0) (1/r) (\partial f_1 / \partial \varphi) - (\mu/m) \text{grad} \delta H_{\parallel} (\partial f_1 / \partial v_{\parallel}) + \\ + (c/eH_0) \mu (\text{grad} \delta H)_\varphi (\partial f_1 / \partial r) = - v_{\parallel} \dot{f}_1. \quad (2.320)$$

Здесь индексы  $\parallel$  и  $\varphi$  означают выбор компонент  $\text{grad} \delta H$  вдоль силовой линии и по  $\varphi$  соответственно. Второе слагаемое в (2.320) конкретизирует член  $-(\mu/m) \text{grad} H_\phi (\partial f_1 / \partial v)$ , а третье слагаемое описывает влияние дрейфа резонансных частиц в неоднородном магнитном поле. Отсутствие традиционного члена  $-i\omega f_1$  означает, что резонансными являются частицы с  $v_{\parallel} \approx 0$ , как и следовало ожидать. Учитывая, что

$$(\text{grad} \delta H)_\parallel = -(H_0/R) \sin \varphi (H_\phi/H_0);$$

$$(\text{grad} \delta H)_\varphi = (H_0/R) \sin \varphi,$$

после несложных выкладок, напоминающих вычисления в § 2.7 [см. вывод формулы (2.108)], находим решение уравнения (2.320):

$$f_1 = - \sum_{\pm} \frac{\mu}{2m_e} \frac{H_0}{R} \left[ \frac{H_\phi}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + \frac{1}{\omega_{He}} \frac{\partial f_0}{\partial r} \right] \frac{\exp(\pm i\varphi)}{(1/r)(H_\phi/H_0)v_{\parallel} \pm i\nu_e}. \quad (2.321)$$

Далее по аналогии с тем, как в теории затухания Ландау вычислялась работа поля волны над резонансными частицами  $\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle$ , найдем радиальный поток резонансных частиц из-за торoidalного дрейфа  $\langle n u_r \rangle$ :

$$\langle n u_r \rangle = \int \frac{\mu H_0 \sin \varphi}{m_e \omega_{He} R} f_1 d\varphi dv_{\parallel}, \quad (2.322)$$

В этом выражении интегрирование по  $d\varphi$  и  $dv_{\parallel}$  заменяет интегрирование по пространству скоростей. Так как знак дрейфа яв-

ляется знакопеременным по углу  $\Phi$ , то мы усрелили это выражение также по всем углам  $\Phi$ . При вычислении интеграла по  $v_{\parallel}$  следует учесть, что

$$\ln \frac{1}{(H_\phi/H_0)v_{\parallel}/r \mp 1} = \pm \frac{\pi H_0}{H_\phi} \delta(v_{\parallel})$$

(при  $v_{\parallel} \rightarrow 0$ , рассуждая так же, как и при вычислении резонансного полуычата, соответствующего затуханию Ландау). В конце концов, несложные выкладки с учетом (2.321) и (2.322) для равновесной функции распределения вида  $f_0 = n(r)f_m$  ( $f_m$  — максвелловское распределение) дают

$$\bar{n}_r = -\sqrt{\pi/2} (r r_{He}/R^3) (c T_e/e H_\phi) (dn/dr).$$

Таким образом, для коэффициента диффузии в промежуточной области частот столкновений (ее принято называть областью пео, классического плато — см. рис. 2.52) имеем

$$D^p = \sqrt{\pi/2} (r r_{He}/R^3) (c T_e/e H_\phi). \quad (2.323)$$

Зависимость аналогичной той, которая изображена на рис. 2.52 для  $D_{\perp}(v_e)$ , обладает и коэффициентом температуропроводности, поскольку перенос тепла поперек магнитного поля в торoidalном витке определяется такими же дрейфовыми движениями частиц, прерываемыми время от времени столкновениями. Особенно важную роль должна играть ионная температуропроводность из-за большого элементарного шага перескоков ионов. Ведь толщина ионных «бананов» в  $r_{He}/r_{He}$  раз больше. Опуская выкладки, аналогичные только что проделанным, приведем коэффициент температуропроводности ионов в режиме плато:

$$\chi_{\perp i}^p = (3/2) \sqrt{\pi} (r r_{He}/R^3) (c T_i/e H_\phi). \quad (2.324)$$

Отсюда видно, что скорость теплопровода в режиме плато растет с температурой ионов как  $T^{3/2}$ . Чем сильнее нагреваются ионы, тем больше они отдают тепло в результате теплопроводности.

Поэтому в течение длительного времени рост температуры ионов существенно отставал от роста мощности нагрева в современных лабораторных установках.

В банановом режиме согласно неоклассической теории, переноса ионная температуропроводность

$$\chi_{\perp i} = 0.4 \sqrt{r/R} (r_{He}^2/\tau_i) (H_\phi^2/H_\phi^2). \quad (2.325)$$

Скорость теплопровода с ростом температуры в этом режиме должна падать как  $T_i^{-1/2}$ .

Однако выйти в банановый режим оказалось не так-то просто. Входящая в условие

$$v_i < (v_{T_i}/r) (H_\phi/H_0) (r/R)^{3/2} \quad (2.326)$$

частота столкновений ионов водородной плазмы в реальных условиях эксперимента, по-видимому, увеличена из-за столкновений с многозарядными ионами примесей. Во всяком случае, в настоящем режиме плюто в токамаках преобладает.

• Процесс изменения режима «неоклассического» переноса с ростом температуры удобно проследить с помощью семейства зависимостей  $\chi_{\perp i}(n)$ , соответствующих различным температурам (рис. 2.53). Каждая из изображенных кривых ведет себя аналогично  $\chi_{\perp i}(v_i)$  при фиксированной температуре. В области плюто  $\chi_{\perp i}$  тем больше, чем большие  $T$ . Однако границы этой области для разных кривых не совпадают. С ростом температуры  $v_i$  должна падать, и в конце концов нагрев плазмы при  $n = \text{const}$  должен привести к «банановому» режиму.

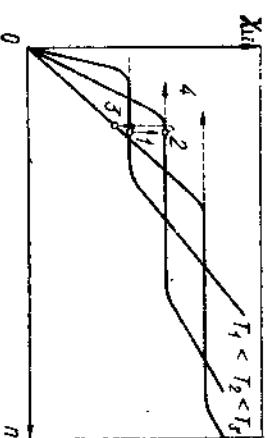


Рис. 2.53. Семейство зависимостей  $\chi_{\perp i}(n)$  (аналогично ведет себя и коэффициент диффузии) при трех фиксированных значениях температуры согласно «неоклассической» теории. Изменение режима переноса тепла при нагреве показано стрелкой ( $i \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ). При достаточно большой температуре рекактивное сжигание с балановыми режимами становится невозможным. Плюто заменяется режимом плюто. Смещение границ зажигания режима плюто при увеличении концентрации плюто при увеличении концентрации примеси показано стрелками ( $i$ ).

На рисунке стрелками показана последовательность смены режимов теплоотвода; рост  $\chi_{\perp i}(T)$  в области плюто сменяется падением в банановом режиме. Пунктиром показано изменение зависимости  $\chi_{\perp i}(n)$  как результат увеличения  $v_i$  (при наличии приемов для смены режима).

В условиях джоулева нагрева плазмы при протекании по ней тока  $I_\phi$ , создающего полоидальное поле  $H_\phi$ , температура электропроводением в банановом режиме. Пунктиром показано изменение зависимости  $\chi_{\perp i}(n)$  как результат увеличения  $v_i$  (при наличии приемов для смены режима).

В условиях джоулева нагрева плазмы при протекании по ней тока  $I_\phi$ , создающего полоидальное поле  $H_\phi$ , температура электропроводением в банановом режиме. Пунктиром показано изменение зависимости  $\chi_{\perp i}(n)$  как результат увеличения  $v_i$  (при наличии приемов для смены режима).

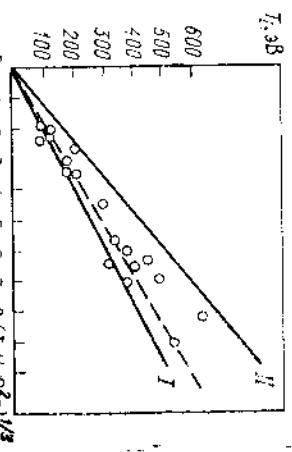
$$(2.327)$$

Для отношения  $(T_e - T_i)/T_e^{3/2}$  удобна интерполяция  $(T_e - T_i)/T_e^{3/2} \approx 0,33 \sqrt{T_i}$ , освобождающая от  $T_e$ . В интервале изменения параметра  $T_e/I_i$  от 1,6 до 10 погрешность такой интерполяции не больше 15%. Это вполне допустимо для экспериментов на токамаках. Теперь, подставляя  $\chi_{\perp i}$  в соответствии с формулой (2.324), из (2.327) нетрудно найти, что температура ионов подчиняется склонности линии\*

$$T_i \sim (I_\phi H_\phi R^2 n)^{1/3}. \quad (2.328)$$

При выводе (2.328) полоидальное поле  $H_\phi$  выражено через ток  $I_\phi$  с помощью очевидного соотношения  $H_\phi \approx c I_\phi / r$ . Удивительно, насколько хорошо результаты измерения ионной температуры в токамаке от силы тока и амплитуды магнитного поля.

Прямые  $I$  и  $H$  соответствуют измерению ионной температуры, вычисляемому на основе «неоклассической» теории при двух различных предположениях о радиальном распределении токов и плотности. Прямая  $I$ , соответствующая однородному распределению плотности и тока,  $H$  — слагающуюся из  $I$  и тока  $I_\phi$ ,  $H \sim (1 - r^2/a^2)$ . Точки — результаты эксперимента



также в токамаках с омическим нагревом укладываются в рамки такого скейлинга (рис. 2.54).

Процессы установления баланса тепла по электронной компоненте оказалось невозможным объяснить на основе «неоклассической» теории: слишком уж мала вытекающая из нее теплопроводность плазмы (в  $r_{H_i}/r_{H_e}$  раз меньше ионной). Поэтому даже слабые остаточные неустойчивости (скорее всего из семейства дрейфовых) вызывают дополнительную утечку тепловых электронов. Для прямого одноступенчатого нагрева ионов можно использовать энергию пучков быстрых ионов, инжектируемых извне в плазму (первоначально в виде пучков нейтральных, быстро теряющих связанный электрон, атомов тяжелого водорода). Надо только убедиться, что энергия этого пучка не будет перехватываться электронами.

Если тепловая скорость электронов значительно превышает тепловую скорость ионов, то формула (1.17а) остается справедливой также и при  $T_i \gg T_e$ , т. е. в том случае, когда происходит нагрев электронов более горячей ионной компонентой. Перепишем

\* Это соотношение сейчас широко известно под названием «формула Ариановича». — Прим. Р. З. Сагдеева.

для этого случая указанную формулу в виде

$$Q_{ie} = (1,2 \cdot 10^{-11}/A) n (T_i - T_e)/T_e^{3/2}, \quad (2.329)$$

где  $Q_{ie}$  — энергия, передаваемая от ионов к электронам в единице объема за 1 сек. Однако если в плазме с холодными электронами постоянно присутствуют горячие ионы, так что  $v_{ti} \gg v_{te}$ , то скорость теплообмена может значительно возрасти. Рассуждая так же, как и при выводе формулы (2.329), мы при указанном условии приходим к следующей формуле теплопередачи:

$$Q_{ie} = 2,2 \cdot 10^{-11} n / \sqrt{T_i}, \quad (2.330)$$

Из сравнения формул (2.329) и (2.330) вытекает интересное следствие, демонстрирующее одно из специфических свойств высокотемпературной плазмы. Предположим, что через плазму проходит быстрая тяжелая заряженная частица с энергией в интервале от  $10^5$  до  $10^6$  эВ. Основные потери энергии у такой частицы будут обусловлены столкновениями с электронами плазмы, и именно этот физический механизм должен определять длину пробега быстрой частицы в плазме. Если движение происходит в водородной плазме и при этом скорость частицы  $v_{ti} \gg v_{te}$ , то для грубой оценки торможения частицы можно пользоваться формулой (2.330), полагая  $T_i = (2/3)w$ , где  $w$  — энергия частицы. При этом, как показывают аналогичные подсчеты, потери энергии частицы на единицу массы пройденного вещества в плазме будут того же порядка, что и в нейтральной среде. Однако положение существенно изменится, если заставить частицу проходить через плазму с достаточно высокой электронной температурой. Если даже  $T_e \ll (2/3)w$ , но  $v_{te} \gg v_{ti}$ , то потери энергии значительно уменьшаются и будут определяться формулой

$$Q_{ie} \approx (1,2 \cdot 10^{-11}/A) n (T_i/T_e^{3/2}). \quad (2.331)$$

Здесь  $Q_{ie}$  — энергия, теряемая частицей за 1 сек;  $A$  — масса частицы (для протона  $A=1$ ). Уменьшение  $Q$  означает соответствующее увеличение пробега частицы. Если на своем пути в плазме частица может генерировать ядерные реакции, то общий выход реакций во много раз возрастет при увеличении электронной температуры (если, конечно, нам удастся заставить быструю частицу пробыть в плазме достаточно долгое время).

Рассмотрим интересный пример, принадлежащий одному из авторов (Л. А. Арцимовичу). Пусть пучок быстрых дейтонов проходит через тригивую плазму. Если температура плазмы невелика, то выход реакций будет очень мал. При  $w \approx 100$  кэВ вероятность того, что частица испытает в плазме с близкой к нулю температурой на полной длине своего пробега одно ядерное столкновение, составляет  $2 \cdot 10^{-6}$ . Энергетический КПД, т. е. отношение освобождаемой ядерной энергии к начальной энергии дейтонов, близок к 0,04 %. Вероятность и энергетический КПД реакций

быстро возрастают с увеличением  $T_e$  и при  $T_e \approx 6 \cdot 10^3$  эВ КПД приближается к единице, а при  $T_e \approx 10^4$  эВ значительно ее превосходит. Таким образом, в принципе появляется возможность энергетического использования реакций  $D + T \rightarrow He + n$  в режиме прохождения потока быстрых заряженных частиц через плазму с достаточно высокой электронной температурой. В 1961 г., когда были проедены эти оценки, такая перспектива казалась практически маловероятной. Однако в настоящее время появилась возможность инжектирования быстрых ионов в «магнитные ловушки» с большим временем жизни заряженных частиц (например в токамаки). По отношению к такому пучку горячая плазма может служить эффективной «ядерной мишенью». В результате ионы плазмы оказываются двух сортов: тепловые и быстрые. Этот вариант токамака называют «двухкомпонентным». Все же, по-видимому, более важное значение будет иметь использование такого метода инжеции для простого повышения ионной температуры плазмы. Особенно успешным оказалось применение такого метода нагрева на токамаке РЛТ в Принстоне (рис. 2.55).

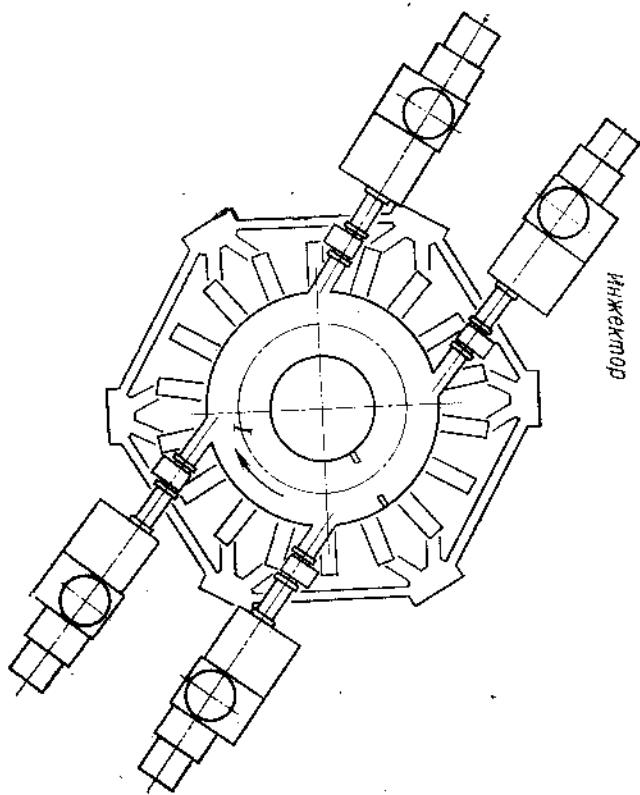


Рис. 2.55. Принципиальная схема, показывающая расположение инжекторовнейтральных частиц вдоль большого периметра токамака РЛТ в Принстонской плазменной лаборатории. При суммарной мощности инжекции  $P \sim 2.5$  МВт в плаэме с плотностью  $n \sim 5 \cdot 10^{13}$  см $^{-3}$  (в центре) была получена температура ионов  $T_e \sim 5.5$  кэВ. При этом ионы оказались в балансовом режиме с коэффициентом теплопроводности в несколько раз меньше, чем скейфингу для «плага». (Препринт РЛТ-78851, Принстонская плазменная лаборатория, 1976)

В энергетическом балансе плазмы, запертой в магнитной ловушке, при некоторых условиях заметная роль может принадлежать так называемому магнитному или бетатронному излучению, связанному с ларморским вращением электронов. Для электрона, движущегося в магнитном поле  $H$  по винтовой линии с центротремительным ускорением  $v_\perp^2 / r_{He}$ , энергия, излучаемая в единицу времени, определяется выражением

$$dW/dt = (2/3) r_0^3 (1 + w_e/m_e c^2) (v_\perp^2/c) H^2, \quad (2.332)$$

где  $r_0$  — классический радиус электрона;  $w_e$  — кинетическая энергия электрона (в интересующих нас случаях  $w_e \ll m_e c^2$ ).

Спектр излучения для отдельного электрона линейчатый. Он состоит из основной линии с ларморской частотой  $\omega_e$  и ее гармоник. Вследствие эффекта Доплера с учетом релятивизма частота  $\omega_n$   $n$ -й гармоники оказывается зависящей от компонент скорости частицы  $v_\parallel$  и  $v_\perp$  и угла  $\theta$ , под которым наблюдается излучение

и направление магнитного поля:

$$\omega_n = n \omega_H \sqrt{1 - v_\parallel^2/c^2} [1 - (\sigma_\parallel/c) \cos \theta].$$

Если энергия электрона достаточно мала по сравнению с  $m_e c^2$ , то главная часть излучаемой энергии должна приходить на основную частоту. С ростом  $\omega_e$  доля высших гармоник в общей интенсивности излучения быстро увеличивается. Если предположить, что вся излучаемая энергия уходит из плазмы, то потеря энергии на магнитное излучение в плазме превосходили бы выделение энергии, обусловленное термоядерными реакциями в магнитных ловушках. Следовательно, если бы магнитное излучение могло свободно выходить из плазмы, оно предстояло бы одно из главных препятствий для сооружения термоядерного реактора с положительным энергетическим балансом.

Однако в действительности большая часть магнитного излучения, которая относится к основной частоте и первым гармоникам, поглощается, не выходя из плазмы, и только излучение, принадлежащее сравнительно слабым высшим гармоникам, выходит через границу плазмы без существенного ослабления.

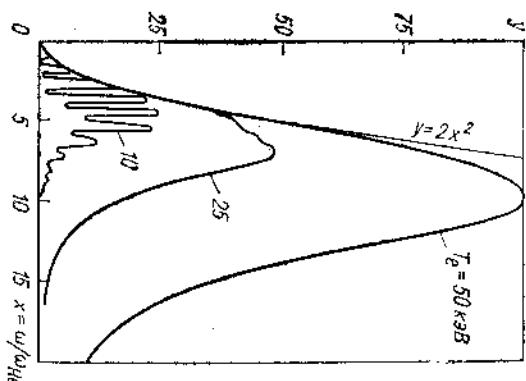


Рис. 2.56. Спектр магнитогормозплазмы, выходящего из плазмы

Упрощенное излучение, в конце концов выходящее из плазмы, можно представить себе как суперпозицию равновесного излучения (по Рэлею — Джинсу) при малых частотах  $n < n^*$  (здесь  $n$  — номер гармоники), где важен эффект переполошения, и высокочастотной доли излучения электронов плазмы  $n > n^*$ , практически свободно покидающей плазму. Оценку  $n^*$  можно сделать, считая, что при  $n = n^*$  обе ветви спектральной интенсивности излучения (Рэлея — Джинса и прямого излучения электронами) сравниваются по порядку величины.

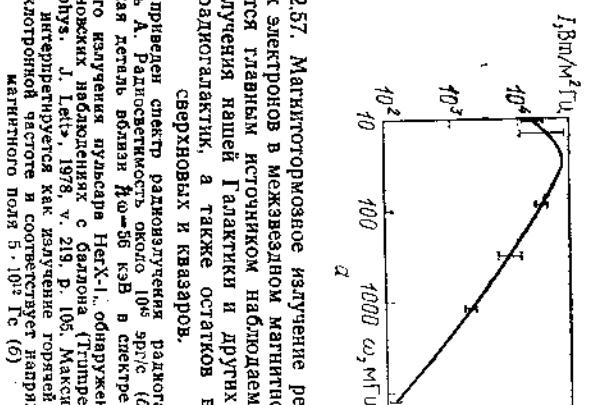


Рис. 2.57. Магнитогормное излучение релятивистских электронов в межзвездном магнитном поле является главным источником наблюдаемого радиоизлучения нашей Галактики и других галактик, радиогалактик, а также остатков взрывов сверхновых и квазаров.  
Здесь приведен спектр радиоизлучения радиогалактики Лебедя А. радиоплотность около  $10^{14}$  эрг/с (6). Спектральная левая вспышка  $\hbar\omega = 56$  кэВ в спектре рентгеновского излучения пульсара Нек-1, обнаруженная при рентгеновских наблюдениях с баллона «Astrophys., J. Lett.», 1978, v. 219, p. 105. Максимум при 56 кэВ интерпретируется как излучение горячей плазмы циклотронной частоты и соответствует напряженности магнитного поля  $5 \cdot 10^2$  Гс (6)

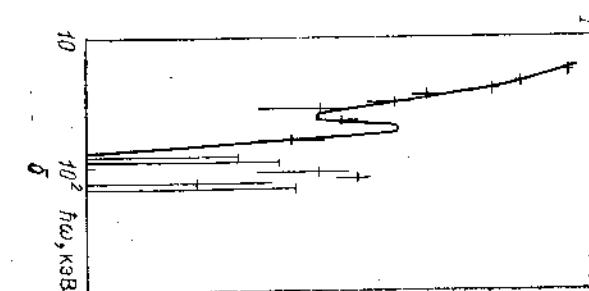


Рис. 2.58. Спектр магнитогормного излучения релятивистических электронов в межзвездном магнитном поле

Представление о результатах, полученных в строгой теории переноса излучения, может дать рис. 2.56, на котором изображено спектральное распределение интенсивности магнитного излучения, выходящего из плоского слоя плазмы, для случая  $8\pi T/H^2 = 1$ . По оси абсцисс отложена частота в единицах  $\omega_n$ , а по оси ординат — распределение интенсивностей по спектру. Масштаб по оси ординат выбирается таким образом, чтобы спектр черного тела в области низких частот (т. е. там, где он соответствует закону Рэлея — Линса) изображался параболой  $y = 2x^2$ .

Так как вследствие поглощения спектр излучения плазмы должен зависеть от толщины излучающего слоя, ее удобно выражать в безразмерных единицах. Безразмерная толщина слоя  $a_0$  определяется соотношением  $a_0 = (4\pi n e / H) a$ , где  $a$  — толщина слоя в сантиметрах. Графики, приведенные на рис. 2.56, построены для случая, когда  $a_0 = 10^4$ . Различные кривые изображают спектр магнитного излучения, соответствующий разным значениям температуры плазмы. Если при не слишком высоких  $T_e$  на спектральной

кривой ясно видны отдельные гармоники, то при более высоких температурах кривые имеют форму, характерную для сплошного спектра.

Из-за эффекта Доплера при высоких температурах отдельные линии, принадлежащие к высоким гармоникам, стливаются друг с другом.

В предельном случае сверхсильных магнитных полей (имеющих смысл для астрофизических приложений), магнитогормное излучение смещается в рентгеновскую часть спектра. На рис. 2.57, б изображен спектр такого излучения от нейтронной звезды *Ner-X*.

### § 2.19. Аномальное сопротивление в плазме и образование двойных слоев

Среди большого разнообразия неустойчивостей плазмы имеет смысл отдельно выделить те, которые не зависят или почти не зависят от специфики краевой задачи, будь то конкретная геометрия лабораторной плазменной установки, тип равновесной конфигурации плазмы или формы ее течения. Одним из важнейших классов таких неустойчивостей, безусловно, следует считать неустойчивости плазмы с током, плотность которого превышает определенное критическое значение.

Самым распространенным примером является ионно-звуковая неустойчивость (см. § 1.12). Если причиной, вызывающей неустойчивость, является превышение некоторого критического значения тока, то из общих соображений ясно, что рост такой неустойчивости должен автоматически привести к механизму, ограничивающему рост тока. Иначе говоря, должно появиться дополнительное электрическое сопротивление — так называемое аномальное. Итак, пусть электронная функция распределения имеет некоторую скорость  $v$  относительно ионной функции распределения,

#### Неустойчивости плазмы с электрическим током, относящиеся к проблеме аномального сопротивления

Таблица 2.2

Тип неустойчивости	Порог неустойчивости	Частота	Инерция возбуждения
Неустойчивость Буне-мана	$\omega_0 \gtrsim v_{Te}$	$\sim \omega_{pi}$	$\sim \omega_{pi}$
Ионно-звуковая	$\omega_0 > (T_e/m_i)^{1/2}$	$\lesssim \omega_{pi}$	$\lesssim \omega_{pi} u_0/v_{Te}$
Электростатические моды $k_1^2 \gg k_2^2$	Очень низкий, иногда $< \omega_{Ti}$	$\ll \omega_{He}$	$\sqrt{\omega_{He}\omega_{Hi}}$
Неустойчивости на гармониках циклонной частоты	$\omega_H$	$\omega_H$ и $v_{Te}$	

превышающую критическое значение для возникновения неустойчивости. Вследствие такой неустойчивости электроны в дополнение к обычной потере импульса из-за парных столкновений теряют еще часть его с излучением колебаний и волн различного типа.

Рассмотрим таблицу неустойчивостей такого типа, возникающих при превышении критического значения скорости. В табл. 2.2 перечислены основные неустойчивости, имеющие отношение к проблеме аномального сопротивления в плазме. Простейшая неустойчивость — это неустойчивость Бунемана (см. § 1.12). Исходные функции распределения электронов и ионов в этом случае имеют вид двух δ-функций, сливущих друг относительно друга на величину средней скорости  $v_{te}$ . Неустойчивость представляет собой раскачку продольных электростатических колебаний плазмы со скоростью нарастания порядка плазменной ионной частоты.

Другой пример неустойчивости, которую практически можно считать модой того же типа, — это уже упоминавшаяся неустойчивость ионно-звукового типа. Эти колебания возникают при дрейфовых скоростях электронов  $v_{te}$ , меньших тепловых скоростей. По порядку величины инкремент нарастания ионно-звуковых колебаний — это плазменно-ионная частота, уменьшенная в отношении дрейфовой скорости электронов к тепловой. В предельном случае  $v_{te} \rightarrow 0$  ионно-звуковая неустойчивость почти плавно переходит в бунемановскую неустойчивость.

При наличии магнитного поля появляются и другие типы неустойчивостей. Одна из них, также обознанная своим появлением электронной (мнимой части) (электронного полузвучета) в ионно-циклотронных волнах, называется неустойчивостью Драммонда — Розенблюта. Она возникает тогда, когда ток протекает вдоль магнитного поля, в то время как первые две неустойчивости в известном смысле инвариантны по отношению к существованию магнитного поля, если оно не очень велико ( $\omega_c \ll \omega_{pe}$ ). Неустойчивость Драммонда — Розенблюта, по-видимому, не создает заметного аномального сопротивления, потому что она приводит к небольшим скоростям нарастания флуктуаций и, по-видимому, легко поддается простыми квазилинейными эффектами, типа эффекта образования пласта.

Более важную роль может играть класс неустойчивостей относительно электростатических возмущений  $k_z \gg k_x$ . Иначе говоря, это волны, у которых составляющая волнового вектора вдоль магнитного поля значительно меньше попречной составляющей волнового вектора, а частоты значительно меньше электронной гармонической частоты, но большие ионной. Эта мода напоминает моду, возникающую при наличии конуса потерь (см. § 2.8):

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int \frac{k(\partial f_e^i / \partial v)}{\omega - kv} dv + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \frac{k_e(\partial f_e^e / \partial v_e)}{\omega - ku_0 - k_e v_e} dv = 0.$$

(2.333)

В приближении  $\omega \gg kv_{Ti}$ ,  $ku_0 \gg k_e v_{Te}$  уравнение (2.333) переходит в дисперсионное уравнение для так называемой модифицированной неустойчивости Бунемана:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe} k_z^2 / k^2}{(\omega - ku_0)^2 - k_z^2 v_{Te}^2} = 0. \quad (2.334)$$

Инкремент нарастания по порядку величины равен

$$\gamma \sim \sqrt{\frac{\omega_{He} \omega_{He}}{\omega_{He}}} \ll \omega_{pi}$$

при

$$kv_{He} \sim 1, k_z = ku_0/v_{Te}. \quad (2.334a)$$

Приближение (2.334) справедливо, если дрейфовая скорость заметно превышает  $v_{Ti}$ . Если это условие не выполнено, имеют место неустойчивости кинетического типа:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}(\omega - ku_0) &\approx k_z (T_i/m_e)^{1/2} / (1 + k_z^2 r_{He}^2)^{1/2}, \\ \ln \omega &= \pi^{1/2} \frac{\omega}{2 |\mathbf{k}| v_{Ti}} (\omega - ku_0); \\ r_{He}^2 &= T_i / (m_e \omega_{He}^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.335)$$

Неустойчивости такого типа имеют место, когда ток течет перпендикулярно к магнитному полю.

Самой сложной проблемой является связь между линейной теорией неустойчивости и величиной аномального электрического сопротивления в состоянии, когда наступает нелинейное насыщение роста неустойчивости. Для решения этой проблемы присбегают к мобилизации арсенала методов нелинейной теории поля в плазме, теории слабой турбулентности (см. § 1.16—1.18), размерностных оценок (в тех случаях, когда возникающая при аномальном сопротивлении турбулентность оказывается сильной) и т. д.

Приведем некоторые общие рассуждения, практически не зависящие от конкретной модели нелинейной стадии. Строгая постановка задачи о проводимости должна проводиться с учетом обмена импульсом между электронами и колебаниями. Обычная формула для проводимости плазмы  $\sigma = ne^2/mv$  содержит частоту столкновений электронов  $v$  с рассеивающимися центрами (ионами, нейтральными атомами) по отношению к потере импульса. Если электроны плазмы раскачивают некоторые типы колебаний или волн вследствие неустойчивости, то имеет место аномальная потеря импульса (передача колебаниям, т. е. коллективным движением ионов). Для нахождения  $v_{eff}$  можно воспользоваться законом сохранения количества движения в системе электроны — волны. Средняя потеря импульса электронами за единицу времени равна

$$(2.336)$$

Если этот импульс передается волнам с плотностью энергии  $\mathcal{W}$ , то изменение количества движения волн равно

$$\int \Upsilon_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} (\mathbf{k}/\omega_{\mathbf{k}}) (d\mathbf{k}/(2\pi)^3), \quad (2.337)$$

где  $\Upsilon_{\mathbf{k}}^e$  — вклад электронов в мнимую часть частоты. Приравнивая (2.336) и (2.337), получаем

$$v_{eff} m_e u_0 \approx \int \Upsilon_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} (\mathbf{k}/\omega_{\mathbf{k}}) [d\mathbf{k}/(2\pi)^3], \quad (2.338)$$

т. е.

$$v_{eff} = (1/m_e u_0) \int \Upsilon_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} [d\mathbf{k}/(2\pi)^3]. \quad (2.339)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению  $W_{\mathbf{k}}$ ;  $\Upsilon_{\mathbf{k}}^e$  следует понимать в квазилинейном смысле.

В справедливости соотношения (2.338) можно было бы убедиться и с помощью квазилинейного уравнения диффузии для электронов на примере ионно-звуковых колебаний.

Наличие аномального сопротивления приводит к аномальному выделению Джоуля тепла в плазме  $j^2/\sigma_{eff}$ . Такой нагрев плазмы часто называют турбулентным, поскольку механизмом, определяющим природу аномального сопротивления плазмы, является турбулентность, вызванная неустойчивостью. При отсутствии парных соударений турбулентный нагрев неодинаков для электронной и ионной компонент плазмы. Более того, нельзя даже говорить о возрастиании температур электронов и ионов, подразумевая температуры в традиционном смысле (максвелловского распределения частиц). Под температурой таких плазм обычно условно понимают средние хаотические энергии компонент.

Как правило, в процессе турбулентного нагрева плазмы быстрее увеличивается температура электронов. Можно установить простой критерий, связывающий скорость нагрева электронов со скоростью нагрева ионов. Вывод такого критерия основан на использовании законов сохранения количества движения и энергии при взаимодействии электронов и ионов с колебаниями. На электроны плазмы действует сила трения

$$\mathbf{F} = -\nabla v_{eff} m_e u_0. \quad (2.340)$$

Работа этой силы, очевидно, затрачивается на нагрев электронов плазмы:

$$dv_e/dt \sim v_{eff} m_e u_0^2 = (1/n_e) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Upsilon_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0) / \omega_{\mathbf{k}}. \quad (2.341)$$

В стационарном состоянии насыщения, достигаемого, когда рост неустойчивости ограничен нелинейными эффектами, количество движения колебаний (а вместе с тем и их энергии) передается ионам. Таким образом, в состоянии насыщения ионы должны по-

глощать энергию колебаний со скоростью порядка

В результате нагрев ионов должен происходить со скоростью

$$\int \Upsilon_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \quad (2.342)$$

Теперь разделим уравнение (2.341) на (2.342):

$$dv_e/dt \sim \int \Upsilon_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0) / \omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} / \int \Upsilon_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \quad (2.343)$$

Если в формуле (2.343) приближенно положить

$$\int \Upsilon_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0) / \omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \sim (k \cdot u_0) / \omega_{\mathbf{k}} \int \Upsilon_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} d\mathbf{k},$$

то для отношения скорости нагрева электронов к скорости нагрева ионов получим оценку

$$dv_e/dw_i \sim u_0 (\omega/k). \quad (2.344)$$

Это соотношение в том виде, в котором оно получено, не зависит от типа неустойчивости и поэтому носит универсальный характер. Для большинства неустойчивостей оно действительно приводит к более быстрому нагреву электронов. Так, при ионно-звуковой неустойчивости, как правило,  $u_0 \gg \omega/k$  и, следовательно,  $dv_e/dw_i \gg 1$ .

Для этого примера полезно привести выражение (2.339) к более наглядному виду. Подставим в него максимум инкремента нарастания колебаний ионно-звукового типа  $\Upsilon_{\mathbf{k}}^e \approx \omega_0/\sigma_{te}$ , достигающий при  $k \sim r_D^{-1}$ . Тогда получим следующее соотношение:

$$v_{eff} \sim \omega_0 r_D W / \eta_0 T_e. \quad (2.345)$$

Таким образом, зная плотность энергии колебаний  $W$  в режиме насыщения неустойчивости, можно было бы найти  $v_{eff}$ . Для нахождения  $W$  в нелинейной теории плазмы имеется регулярный метод — теория слабой турбулентности. Но этот метод не всегда применим. Даже простейший случай неустойчивости Бунемана следует рассматривать с позиций сильной турбулентности. Существующие теории сильной турбулентности могут претендовать лишь на оценки по логарифму величины.

Ионно-звуковая неустойчивость представляет собой удобный пример исследования с помощью метода слабой турбулентности. Мнимая часть частоты в данном случае значительно меньше, чем ее действительная часть, поскольку дрейфовая скорость может быть много меньше средней тепловой скорости электронов. Нелинейной теории ионно-звуковой неустойчивости и вычислению аномального сопротивления посвящено много работ. Остановимся на этом вопросе несколько подробнее. Плотность энергии  $W_{\mathbf{k}}$  моды колебания с волновым вектором  $\mathbf{k}$  нарастает при малых амплитудах экспоненциально. Затем при больших амплитудах должна включаться эффекты нелинейного насыщения и, возможно, возник-

нет установившееся или квазистабилизированное состояние. Тогда можно найти спектр  $W_{\mathbf{k}}$ , компенсируя линейное нарастание одним из эффектов, связанных с нелинейным насыщением. Нелинейный член, исходя из соображений размерности, символически представим в следующем виде:

$$0 = \{2\gamma_{\mathbf{k}} - A_{\omega_{\mathbf{k}}} (W/n_e T_e)\} W_{\mathbf{k}}. \quad (2.346)$$

Для ионно-звуковых колебаний запрещены резонансы трехвольновых взаимодействий (см. § 1.18), поэтому единственным эффективом, который дает член порядка  $W^2$ , может быть эффект нелинейного рассеяния волны на ионах (см. § 1.17). Это эффект, который обусловлен наличием знаменателей типа  $\phi - \phi' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}$ , т. е. резонансов Ландау на нелинейных биениях, возникающих от какой-либо произвольно выбранной пары волн. Эти биения попадают в резонанс с ионами, и часть энергии поглощается, а другая часть переходит в волну с меньшей частотой. На самом деле квадратичный член представляет собой некое довольно сложное интегральное выражение, слишком громоздкое для целей данной книги. Величину этого члена оценим следующим образом: так как данный эффект связан с тепловым движением ионов, то оператор  $A$  пропорционален малому множителю  $T_i/T_e$  (поскольку речь идет об ионном звуке, то по определению необходимо, чтобы  $T_i \ll T_e$ ). Поскольку он безразмерен, предположим, что он просто равен  $A \sim T_i/T_e$ . Эту оценку подтверждает строгая теория слабой турбулентности. Итак,

$$W \approx 10^{-2} (T_e/T_i) (u_0/v_{Te}) n T_e. \quad (2.347)$$

Численный множитель дает строгая теория. Это приводит к следующей формуле для эффективной частоты соударений:

$$\nu_{eff} \approx 10^{-2} \omega_{pi} (u_0/c_s) (T_e/T_i). \quad (2.348)$$

Таким образом, если бы по плазме удавалось пропускать ток, существенно превышающий критическое значение, так что электроны теряли бы импульс из-за когерентного излучения фононов, т. е. ионно-звуковых колебаний, то в конце концов установился бы некий стационарный спектр, и частота определялась бы формулой (2.348).

Укажем, что если по плазме с первоначально изотермическими ионами и электронами (ионно-звуковые колебания невозможны) протекает ток в режиме аномального сопротивления вследствие неустойчивости Бунемана, то рано или поздно этот режим должен неустойчивости на ионно-звуковой. Это связано с тем, что электроны, смещающиеся на ионно-звуковой. Это связано с тем, что электроны, как было отмечено, нагреваются в  $k_{de}/\omega$  раз быстрее, чем ионы, и плазма в конце концов становится неизотермической. Ионно-звуковая же неустойчивость в этом смысле является самоподдерживающейся, так как при  $\omega \gg \omega_c$  электроны всегда получают большие тепла, чем ионы.

В рассмотренной модели аномального сопротивления имеется трудное место. Ни одна из четырех величин  $\omega_c$ ,  $c_s$ ,  $T_e$  и  $T_i$ , которые входят в формулу (2.348), в настоящей плазме при отсутствии реальных парных соударений (при наличии лишь рассеяния на флукутациях) уже не может иметь своего обычного смысла. Начнем с электронной температуры. Если нет парных соударений, то очень трудно ожидать, что функция распределения будет максвелловской. Даже если не требовать, чтобы функция распределения электронов была максвелловской, и характеризовать ее некоторым тепловым разбросом, то необходимо, чтобы  $f_{e0}$  имела довольно быстро сходящиеся «хвосты». В этом случае можно было бы

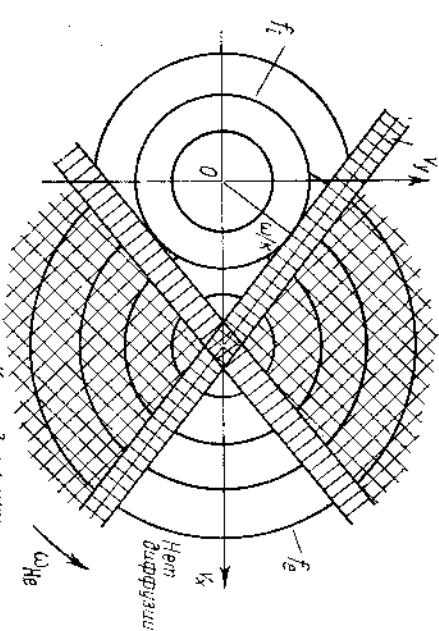


Рис. 2.58. Квазилинейная диффузия электронов при ионно-звуковой неустойчивости

бы, по крайней мере условно, говорить о температуре электронов. Но с ионами ситуация еще более сложна, если они взаимодействуют только с волнами (нет парных соударений).

Перейдем к обсуждению возможного вида функций распределения ионов и электронов. Воспользуемся двумерной картиной проекции тока, а по оси ординат — поперечная компонента.

Пусть первоначально имеется обычное максвелловское распределение электронов и ионов. Для максвелловского распределения линии равного значения функции распределения в этой плоскости являются окружностями. Центр таких окружностей для ионов (появляется в начале максимума функции распределения) находится в пачале координат. Для электронов он смешен на величину  $\omega_c$ : они переносят ток. Взаимодействие волн с частицами особенно сильно тогда, когда

да, когда осуществляется резонанс Ландау. Взята наугад волна с фазовой скоростью  $\omega/k$  взаимодействует с частицами, находящимися вблизи прямой (см. рис. 2.58). Именно для таких частиц осуществляется резонанс. Наконец, если рассмотреть волны всех возможных направлений и разных значений фазовых скоростей, то можно убедиться, что все частицы, находящиеся в окрестности линии, соответствующей условию резонанса Ландау, испытывают действие поля волн. Но в ионно-звуковом спектре отсутствуют волны со скоростями меньше некоторой ( $\omega/k \gtrsim v^*$ ) (см. § 1.11, 1.12).

Частицы с  $v < v^*$  в квазилинейном приближении не взаимодействуют с волнами. Здесь взаимодействие оказывается гораздо более слабым, оно связано с нелинейными эффектами следующего приближения. Ионы в области взаимодействия с волнами довольно мало; таким образом, лишь малая доля ионов подвергается мощному воздействию со стороны волн. В кулевом приближении функция распределения ионов в основной области практически не деформируется. В резонансной же области возникает сильная деформация из-за квазилинейной диффузии в пространстве скоростей. Когда парные столкновения не играют роли, такое изменение функции распределения ионов очень существенно. Оно сильно меняет ионную мнимую часть в дисперсионном уравнении (ионный полувычет, пропорциональный числу ионов, которые могут находиться в резонансе). Это, как правило, весьма малая величина, очень чувствительная к тому, что происходит на «хвосте» ионного распределения.

С электронами же происходит следующее: область запрещенных скоростей, внутри которой отсутствует резонанс между частичами и волнами, сравнительно невелика, потому что скорость звука в  $\sqrt{m_i/m_e}$  раз меньше средней тепловой скорости электронов. В принципе можно пренебречь тем, что происходит внутри этого небольшого кружка. Но возникает другая сложность. Очень трудно представить себе, чтобы ток раскачивал волны, почти перпендикулярные своему направлению. Действительно, из теории ионно-звуковой неустойчивости следует, что волны с волновым вектором, практически перпендикулярен направлению тока, имеют малую мнимую часть и практически их можно считать устойчивыми.

Таким образом, приходим к выводу, что здесь образуется небольшой конус в пространстве скоростей, в котором нет волн для резонанса с электронами. Эти электроны свободно ускоряются электрическим полем, вызывающим ток в плазме. Вклад таких электронов может сильно уменьшить сопротивление плазмы. Каждая же доля электронов попадает в этот конус потерять дальше свободно ускоряется? Задачу можно разбить на два предельных случая. Сначала целесообразно выделить более простой случай, когда имеется хотя бы слабое магнитное поле  $H_0$ , перпендикулярное к плоскости (см. рис. 2.58). Такое магнитное поле медленно вращает электроны (в сравнении с частотой плазменных колебаний) до тех пор, пока плазма не окажется на пороге неустойчивости. Это означает, что яслиевые члены в уравнении (2.349) играют малую роль, а насыщение колебаний определяется условием  $\Upsilon_k^e \approx \Upsilon_k^i$  для всех первоначально неустойчивых волн. Иначе говоря, для всех первоначально

ний). Но оно может быть достаточно быстрым в масштабе времени, в котором появилось бы убегание электронов в «конус потерь». И, таким образом, в среднем все электроны за один ларморовский оборот оказываются взаимодействующими с волнами. В этой задаче для электронов не возникает дополнительной трудности. Хотя  $f_0^e$  и не сводится к максвелловскому распределению, тем не менее можно говорить о средней электронной температуре.

Итак, будем считать, что если имеется слабое поперечное магнитное поле, то все результаты для эффективного числа соударений можно перенести даже и на далекие моменты времени, когда могло бы существенно сказаться искажение электронного распределения, его отклонение от максвелловского распределения. Именно такая ситуация имеет место с бесптолковательными ударными волнами поперек магнитного поля (см. § 2.20).

Однако проблемы, связанные с ионным распределением, остаются и в этом случае. Дело в том, что ионы не успевают перемещаться под действием магнитного поля, и поэтому яицтое распределение может приобрести довольно экзотическую форму и в конце концов станет сильно отличаться от максвелловского. Можно ожидать, что основная часть ионов будет холодной, а какая-то часть ионов, движущихся со скоростями, начиная от скоростей порядка скорости звука, будет нагреваться. По-видимому, в ближайшее время нельзя без использования численных методов найти вид такого сложного ионного распределения.

Более простыми должны быть закономерности при малой нелинейности, когда достаточно ограничиться только квазилинейным приближением. В таком приближении насыщенные неустойчивости достигаются вследствие квазилинейной деформации функции распределения ионов, в результате которой даже в низотермической плазме появляется группа ионов с большими скоростями  $v \gg c_s$ . Такие ионы, резонансно поглощая ионно-звуковые волны, должны уравновешивать раскачуку колебаний электронами.

Рассмотрим процесс нелинейного, в данном случае квазилинейного, насыщения колебаний. Пусть уравнение для спектра неустойчивых волн имеет символический вид [см. уравнение (2.346)]

$$dW_{\mathbf{k}}/dt = 2\gamma^e_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}} - 2\gamma^i_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}} - A(W/n_0 T_e) W_{\mathbf{k}}. \quad (2.349)$$

Нарастание колебаний при  $v > c_s$  приводит к увеличению сопротивления, т. е. возникает сила трения, действующая на электрона. Если приложенное электрическое поле, создающее ток, не слишком велико, то, как следствие реакции электронов на увеличившееся сопротивление, оно должно уменьшаться до тех пор, пока плазма не окажется на пороге неустойчивости. Это означает, что яслиевые члены в уравнении (2.349) играют малую роль, а насыщение колебаний определяется условием  $\Upsilon_k^e \approx \Upsilon_k^i$  для всех первоначально неустойчивых волн. Иначе говоря, для всех первоначально

неустойчивых волн должно выполняться условие при всех резонансных скоростях ( $\omega = kv$ )

$$\Upsilon_{\mathbf{k}} = \Upsilon_{\mathbf{k}}^e - \Upsilon_{\mathbf{k}}^i \approx [df_{\mathbf{k}}^e/dv + (m_e/m_i)(df_{\mathbf{k}}^i/dv)] = 0. \quad (2.350)$$

Условие (2.349) при пренебрежении последним членом не содержит амплитуды установившихся колебаний  $W_{\mathbf{k}}$  и, следовательно, с его помощью сразу нельзя вычислить  $v_{\text{eff}}$ . Эффективную частоту столкновений для такого режима насыщения неустойчивости (его иногда называют «пороговым» или квазилинейным) можно найти из закона Ома, подставив в него найденное выражение для  $j = e n_0 v_0 \approx e n_0 v$ . Считая  $j = e n_0 v_0 = \sigma E$ , находим

$$v_{\text{eff}} = eE/m_e v_c. \quad (2.351)$$

Теперь с помощью соотношения (2.339), связывающего  $v_{\text{eff}}$  с энергией колебаний, можно найти  $W$ :

$$W/n_e T_e \approx (e E r_e / n_e T_e) (v_{T_e} / v_c). \quad (2.352)$$

С ростом  $E$  увеличивается  $W$ , и при достаточно больших полях уже нельзя пренебречь нелинейным членом в уравнении (2.349). Кажущиеся простыми формулы для порогового (квазилинейного) режима на самом деле сложны. Казалось бы, для нахождения  $\eta \approx v_c$  достаточно линейного выражения для мнимой части частоты. Однако  $\Upsilon_{\mathbf{k}}^i$  очень чувствительно к виду ионного распределения при больших скоростях ионов, т. е. на хвосте функции распределения. Такие ионы, поглощая колебания, увеличивают свою энергию и быстро меняют вид своей функции распределения (из-за квазилинейных эффектов). В результате быстро меняется  $\Upsilon_{\mathbf{k}}^i$  и, следовательно,  $v_c$ .

Если тепловая энергия, поглощаемая частицами плазмы, не отводится наружу, то можно ожидать, что в конце концов выделятся некоторая группа ионов, поглощающая всю энергию волн. Поступим следующим образом. Ионное распределение разобьем на группу холодных и горячих ионов. В таком упрощенном (двухгрупповом) приближении можно найти величины, характеризующие протекание тока. Группа ионов, которые попадают в резонанс с ионно-звуковыми колебаниями и затем ускоряются, сравнительно невелика. Обозначим их концентрацию  $X$ . Введем эффективную температуру таких резонансных ионов  $T_i \approx m_i v_i^2$ . Тогда из (2.344) имеем

$$T_e/T_i \approx X k_B/c_s. \quad (2.353)$$

Оценивая ионный декремент как  $\eta \approx \omega_p^2 / (\omega/k^2) X c_s / (T_i/m_i)^{3/2}$  (в предположении, что  $T_i \gg T_e$ ) и сравнивая его с электронным (см. табл. 2.2 в начале параграфа), получаем

$$X \approx (m_e/m_i)^{1/4} (T_i/T_e)^{1/4}. \quad (2.354)$$

Теперь мы имеем два уравнения (2.353) и (2.354) для трех неизвестных  $X$ ,  $\eta/c_s$  и  $T_i/T_e$ . Для нахождения третьего уравнения рассмотрим импульс резонансных ионов. Импульс, теряемый электронами при рассеянии, переходит к ионам. Поэтому распределение ионов по скоростям должно быть анизотропным. Функцию распределения ионов представим в виде  $f_i(\mathbf{v}, \theta) = f_{i0}(v) + f_{i1}^a(\mathbf{v}, \theta)$ , где анизотропная часть  $f_{i1}^a(v)$  может быть оценена из следующих соображений. При поглощении колебаний резонансный ион в среднем поворачивается на угол  $\Delta\theta \approx W/m_i c_s v_i$ . Относительное приращение энергии ионов в том же процессе имеет порядок величины  $\Delta T_i/T_i \approx W/T_i$ . Таким образом, размешивание по углу, стремящееся сделать распределение изотропным, в  $v_i/c_s$  раз сильнее. Тогда

$$|\mathbf{P}_i| \approx \left| \int m_i \mathbf{v}_{i0} f_{i0} d\mathbf{v} \right| \approx n_e X m_i c_s. \quad (2.355)$$

Недостающее уравнение получим из условия, что работа силы трения  $dP_i/dt$  затрачивается на нагрев электронов  $(dP_i/dt)_{i0} \approx -n_e dT_e/dt$ , т. е.

$$X m_i c_s \eta \approx T_e. \quad (2.356)$$

Окончательный результат решения полученной системы уравнений имеет вид

$$\eta \approx c_s (m_i/m_e)^{1/4}, \quad T_i \approx T_e, \quad X \approx (m_e/m_i)^{1/4}. \quad (2.357)$$

Итак, средняя хаотическая энергия этих горячих ионов по порядку величины близка к средней хаотической энергии основной массы электронов. Это своего рода скейлинг для квазилинейного режима аномального сопротивления.

Этот скейлинг относится к случаю тока, попеченного или почти попеченного к магнитному полю. Представим себе теперь, чтомагнитное поле у нас либо совсем отсутствует, либо действует в направлении протекания тока. Тогда сразу исчезает тот механизм, который перемещивает все электроны, и задача об электронной функции распределения усложняется. Как поступить в этом случае? По-видимому, невозможно ввести двухгрупповое распределение электронов, потому что нет явно выраженных двух групп электронов, как это было в случае с ионами. Наоборот, возникает плавный переход от медленных электронов ко все более быстрым, и в конце концов с течением времени, как показывает качественный анализ, практически нет волн. Это явление напоминает убегание электронов в газе с Лоренцевскими столкновениями, когда частота соударений падает со скоростью  $v^{-3}$ . Взаимодействие электронов с ионно-звуковыми волнами обладает именно такими свойствами.

Вопрос о том, какой вид в конце концов примет закон Ома в такой плазме, на сегодняшний день остается открытым. Одна из распространенных точек зрения такова: значительная доля электронов попадает в режим убегания, функция распределения электронов в проекции на параллельную полю скорость оказывается

сильно вытянутой в направлении тока, отношение средней дрейфовой скорости электронов к средней тепловой скорости электронов может стать равным единице.

Рассмотрим теперь аномальное сопротивление из-за какой-нибудь другой неустойчивости (см. табл. 2.2 в начале § 2.19). Наиболее низким порогом возбуждения (малым значением  $i_0$ ) обладают электростатические неустойчивости с  $k_z \ll k_{\perp}$  в плазме с током, текущим поперек магнитного поля. Нелинейное насыщение этих видов неустойчивости не поддается рассмотрению с помощью методов теории слабой турбулентности. Обратимся, например, к слу-чаям модифицированной неустойчивости Бунемана [см. формулу (2.334)].

Дисперсионное уравнение (2.334) отличается от обычного уравнения Бунемана лишь заменой  $\omega_{pi}/\sqrt{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{He}^2}$  на  $\omega_{pe}k_z/k\sqrt{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{He}^2}$ . Можно оценить амплитуду колебаний в ре-жиме насыщения так, как это часто делается в теории сильной турбулентности. Сравним линейный  $\partial\mathbf{u}/\partial t$  и нелинейный  $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$  члены в уравнении для электронов

$$\partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = e/m \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] \right\}.$$

В нелинейной стадии эти члены должны конкурировать друг с другом, приводя к квазистационарному режиму насыщения неустойчивости. Приравнивая их по порядку величины, получаем

$$ku_0 \sim (ke/H_0) \sum_{\mathbf{q}} q\varphi_{\mathbf{q}}.$$

Отсюда можно сделать следующую оценку плотности энергии колебаний:

$$\sum_{\mathbf{k}} m_e e^2 |\Phi_{\mathbf{k}}|^2 / 2T_e \approx m_e u_0^2, \quad kr_{He} \approx 1. \quad (2.357)$$

Теперь с помощью формулы (2.339) получим

$$v_{te} \approx \Omega n_0 / v_{te}. \quad (2.358)$$

Эта неустойчивость, как правило, раскачивается медленнее, чем ионно-звуковая (при  $T_e \gg T_i$ ), но она может иметь место в плазмах с большой ионной температурой. В отличие от ионного звука для этой неустойчивости не требуется выполнения условия  $T_e \gg T_i$ . Явление аномального сопротивления, как это следует из приведенного обсуждения, по-прежнему остается одним из самых трудных разделов физики коллективных процессов в плазме. По сути дела, на сегодняшний день в арсенале теории кроме некоторых полукалических соображений и оценок имеется несколько моделей для частных предельных случаев. Общий же сценарий ре-

ализовать не так-то просто. Анализ даже квазилинейного режима аномального сопротивления, освобожденный от учета нелинейного взаимодействия волн, в общем виде не проведен. Здесь полезным оказывается численный эксперимент (рис. 2.59).

Подводя итоги, отметим, что качественный ход аномального закона Ома  $j=j(E)$ , т. е. вольт-амперная характеристика, должен иметь вид, изображенный на рис. 2.60. При докритической плотности тока  $(i_0/v_{te}) < (i_0/v_{te})_{cr}$  все устойчиво, линейная часть графика  $j=j(E)$  соответствует классической электропроводности из-за столкновений. Вблизи порога токовой неустойчивости  $i_0/v_{te} \approx (i_0/v_{te})_{cr}$  резко возрастают флуктуации, а следовательно, и эф-

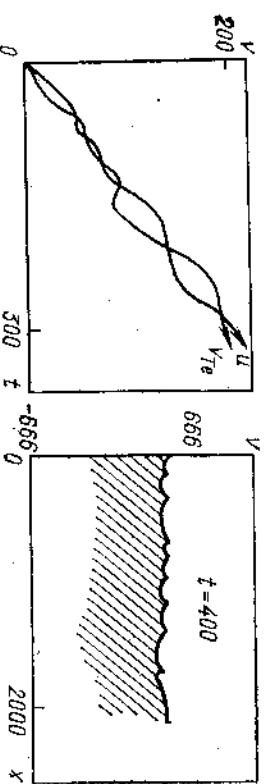


Рис. 2.59. Численное моделирование асимптотического по-ведении ионно-звуковой не-устойчивости [Morse R. L., Nelson C. W. «Phys. Rev. Lett.», 1971, v. 26, p. 3]. Показана зависимость от времени дрейфовой скорости  $u$  и тепло-вой скорости  $v_{te}$  электронов, а также фазовая плоскость и функции распределения элек-тронов при  $t=400$ .

Эксперимент проводился с реальным отношением масс электронов и ионов, при напряже-нии электрического поля  $E_0 = 0.02v_{te}^2 \omega_{pe}^2 / e$  и начальном отношении температур  $T_e/T_i = 1$ . Время измерялось в обратных плазменных частотах  $t_{10} \omega_{pe}$ , скорости — в единицах  $v_{te}^2/2\pi$ . Графики иллюстрируют появление излома на кривой  $j(E)$  в асимптотическом режиме электронов «скрипом» ( $j_1$ ) группы колебаний электронов ( $j_2$ ) в возникновении ионно-звуковой неустойчивости в результате пренебрежимо малого потока электронов.

Фективная частота соударений (в результате рассеяния электронов на флюктуациях). Конкретное значение порога  $(i_0/v_{te})_{cr}$  зависит от того, какой из типов токовой неустойчивости оказывается существенным. Резкое увеличение  $v_{te}$  при достижении порога неустойчивости приводит к появлению излома на кривой  $j(E)$ . В масштабах, принятых для измерения классической электропроводности, кривая зависимости  $j(E)$  в области неустойчивости практически параллельна оси абсцисс. Для того чтобы создать ток, существенно превышающий критический, потребовалось бы приложить громад-

ное электрическое поле. Ход  $j(E)$  в этой закритической области существенно нелинеен. Так, например, в ранее рассмотренном режиме ионно-звуковой неустойчивости из (2.348) можно получить зависимость  $j \sim E^{1/2}$ .

Эксперименты по аномальному сопротивлению с трудом поддаются интерпретации, так как параметры плазмы при изменении  $j$  и  $E$  сильно меняются. Для ориентировки ниже на рис. 2.61 приводятся экспериментальные данные по аномальному сопротивлению при больших  $j$ .

До сих пор при исследовании турбулентности плазмы в электрическом поле и механизмах аномального сопротивления предполагалось, что приложенная к плазме разность потенциалов равномерно (или почти равномерно) распределяется по всему объему, т. е. электрическое поле в плазме является почти однородным.

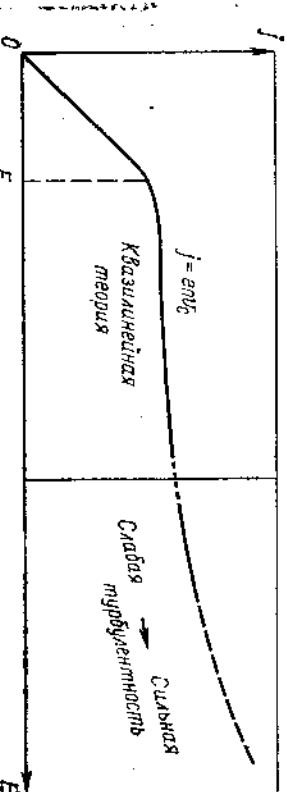
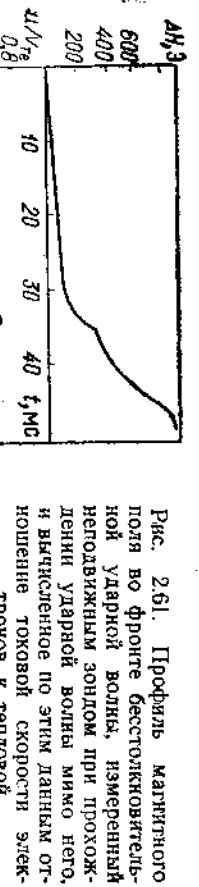


Рис. 2.60. Закон Ома в случае ионно-звуковой турбулентности

Однако в реальных ситуациях с граничными условиями картина может быть совсем другой. Мысленно выделим в плазме элементарную токовую трубку, т. е. трубку, ограниченную линиями электрического тока. Пусть по какой-либо причине вдоль линий тока имеется такая неоднородность параметров плазмы, из-за которой безразмерное отношение  $u_0/v_{Te}$  меняется вдоль трубы.



На переднем участке фронта токовая скорость расчет по тех пор, пока, разумеется, токовая неустойчивость (появляющуюся бунчуманской) не приводит к разогреву электрона. Затем она резко падает из-за перехода в квазинейный режим ионно-звуковой неустойчивости, в котором токовая скорость практически не зависит от электрического поля. Эксперимент выполнен в вакуумной плазме с плотностью  $n=1.5 \cdot 10^14 \text{ см}^{-3}$ , помещенной в магнитное поле  $H_0=700 \text{ Гс}$ . Число Маха  $M=2$  (Белов В. Г., Еськов А. Г., Кутмуллаев Р. Х., Малютин А. И. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 60, с. 2079).

Если неоднородность такова, что разные участки вдоль линии тока соответствуют различным режимам  $j=j(E)$  (см. рис. 2.60), то произойдет следующее. Разность потенциалов, приложенная к концам трубы, распределится неравномерно. Основное падение потенциала придается на зоны с максимальным отношением  $u_0/v_{Te}$ . В силу резко нелинейного характера  $j(E)$  различие в  $E$  между областями с минимальным и максимальным значениями отношения  $u_0/v_{Te}$  может стать громадным. Однако такой профиль потенциала с течением времени должен еще более обостриться. Действительно, утром выпадение джоулева тепла при аномальном сопротивлении (турбулентный нагрев). В зонах с наибольшими значениями

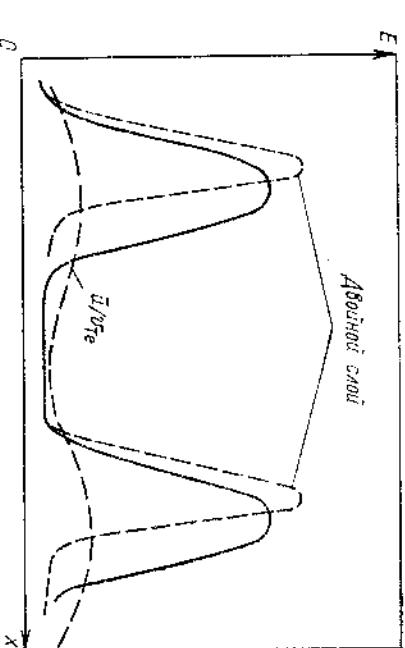


Рис. 2.62. Образование двойных слоев при протекании тока с аномальным сопротивлением

отношения  $u_0/v_{Te}$ , а значит и с  $E$ , оно резко увеличено. Это теплоэнергетический перенос учитывается в выражении для потока тепла членом  $i\partial T_e/\partial x$  [см. уравнение (1.87)]. Перераспределение температуры вдоль линий тока, вызванное этим эффектом, меняет  $v_{Te}$  и, следовательно,  $u_0/v_{Te}$ . Нетрудно увидеть, что уменьшение  $u_0/v_{Te}$  «вызывает» (по направлению движения электронов, переносящих ток) в зонах максимального  $E$  должно вести к новому распределению  $E$ . Качественно последовательность процессов, протекающих после включения тока, показана на рис. 2.62.

Резкое сужение зон аномально большого электрического поля с образованием скачков потенциала напоминает образование ударных волн при нелинейной эволюции профиля в газодинамике. Эта аналогия, в действительности, является очень глубокой: скачок потенциала, или двойной слой, сопровождается также скачком параметров плазмы, например температуры электронов. Хотя, как уже указывалось, о температуре при аномальном сопротивлении следует говорить, соблюдая известную осторожность,

двойной слой с полным основанием можно назвать своего рода электростатической ударной волной в плазме, рассматриваемой как двухкомпонентная среда.

Любопытно отметить, что простейшим предельным случаем такого скачка потенциала является классический двойной слой Ленгмюра. Он возникает, например, вблизи катода, поставляющего электроны со средней скоростью  $u_k$ , меньшей токовой скорости  $i_0$  в результате разряда. По этой причине необходим начальная разгон электронов электрическим полем в слое, чтобы преодолеть своего рода порог  $(i_0/u_k) \sim 1$ .

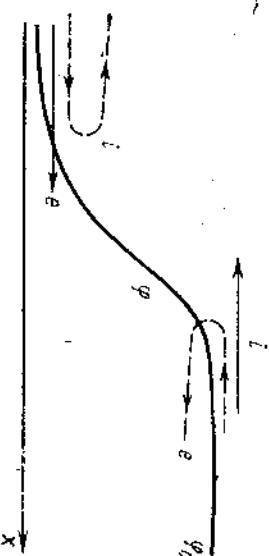


Рис. 2.63. Распределение потенциала и траектории частиц внутри двойного слоя

Эта старая модель двойного слоя очень проста и заслуживает того, чтобы ее воспроизвести. В стационарном случае ускорение электронов в слое находится из уравнения движения

$$m_e u_{ed} dx = e d\Phi / dx - (T_e / n_e) dn_e / dx. \quad (2.35)$$

Если скачок потенциала  $\epsilon\Phi_0 \gg T_e$ , то в уравнении движения электронов можно пренебречь силой газокинетического давления. Тогда скорость электронов в слое находится из закона сохранения энергии:

$$u_e = \sqrt{u_0^2 + 2e\Phi_0/m_e}. \quad (2.36)$$

$u_0$  — скорость, с которой электроны инжектируются в двойной слой. Плотность электронов внутри слоя определяется условием постоянства тока:

$$n_e = j_e / u_e. \quad (2.361)$$

Аналогичным образом для ионной компоненты имеем

$$u_i = \sqrt{(2e/m_i)(\Phi_0 - \varphi)}; \quad n_i = j_i / u_i, \quad (2.362)$$

где мы предположим, что на анодной стороне слоя, т. е. при  $\varphi = \Phi_0$ , скорость ионов обращается в нуль (рис. 2.63) (ускорение ионов происходит вверх по течению). Распределение потенциала внутри двойного слоя определяется из уравнения Пуассона

$$d^2\Phi / dx^2 = 4\pi e (j_e / \sqrt{u_0^2 + 2e\Phi_0/m_e} - j_i / \sqrt{(2e/m_i)(\Phi_0 - \varphi)}). \quad (2.363)$$

Первый интеграл этого уравнения дает электрическое поле в слое:

$$\frac{1}{2} E^2 = 4\pi (j_e m_e \sqrt{u_0^2 + 2e\Phi_0/m_e} - j_i m_i u_0 + j_i \sqrt{2em_i(\Phi_0 - \varphi)} -$$

$$- j_i \sqrt{2em_i\Phi_0}). \quad (2.364)$$

Отсюда с помощью очевидного условия  $E = -d\Phi/dx \rightarrow 0$  при  $\Phi \rightarrow \Phi_0$  получили некий аналог вольт-амперной характеристики двойного слоя — соотношение, связывающее скачок потенциала с плотностью электронного и ионного токов:

$$j_e = j_i \sqrt{2e\Phi_0 m_i / (m_e \sqrt{u_0^2 + 2e\Phi_0/m_e} - m_i u_0)}. \quad (2.365)$$

В наиболее важном случае  $\epsilon\Phi_0 \gg m_e u_0^2$  из (2.365) приходим к так называемому условию Ленгмюра

$$j_e = j_i \sqrt{m_i / m_e}. \quad (2.366)$$

Распределение потенциала, определяемое интегрированием уравнения (2.364), см. на рис. 2.63, распределение плотности зарядов в слое находим по формуле  $\rho = -1/4\pi e^2 \Phi / dx^2$ . Слева, в катодной части двойного слоя, имеется избыток электронов ( $\rho < 0$ ). Внутри слоя происходит ускорение электронов, их плотность падает, и в анодной части двойного слоя — стационарная структура. Как уже упоминалось выше, двойной слой Ленгмюра — структура, в значительной степени аналогичная петлевой электростатической волнам (см. § 1.20). Однако имеются и некоторые важные различия. Прежде всего двойной слой — стационарная структура. Кроме того, в двойном слое электрический заряд локализован в узкой области пространства, вне слоя имеет место квазинейтральность. Поскольку плотность электронов в слое падает вниз по течению, а плотность ионов — в обратном направлении, то очевидно, что с помощью только двух компонент — ускоренных электронов и ионов — нельзя обеспечить квазинейтральность по обе стороны от двойного слоя. Для этого необходимы еще две группы частиц — холодные ионы в катодной части двойного слоя и холодные электроны в его анодной части (см. рис. 2.63). Обе эти группы частиц отражаются от потенциальных горбов, каким является для них распределение потенциала в слое. При  $\epsilon\Phi_0 \gg T_e$  эти частицы не проникают глубоко внутрь слоя и не влияют существенно на распределение потенциала в нем, они нужны только для обеспечения квазинейтральности по обе стороны от слоя.

Еще одну важную особенность двойного слоя легко усмотреть из уравнения (2.359). Воспользовавшись условием (2.361), это уравнение можно записать в виде

$$(m_e u - T_e / u) du / dx = e d\Phi / dx.$$

Отсюда следует, что ускорение электронов в направлении возрастания  $\Phi$ , необходимое для возникновения двойного слоя, можно

обеспечить только при выполнении условия

$$m_e v_0 > T_e \quad (2.368)$$

Уже известно, что это неравенство одновременно определяется условием возникновения бунемановской неустойчивости. Таким образом, в окрестности слоя Лентгмора можно ожидать возбуждения интенсивных электростатических колебаний с частотой порядка ионной плазменной. Строгая теория двойного слоя, учитывавшая турбулентность, которая возникает вследствие бунемановской неустойчивости, еще не построена. По всей видимости, развитие не-

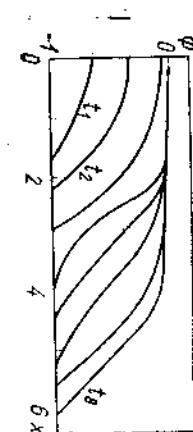


Рис. 2.64. Профили потенциала электрического поля на фронте тепловой ударной волны, измеренные через время  $\Delta t = 10^{-8}$  с.  
Тепловая волна возбуждалась в аргоновой плазме ( $n_0 = 2 \cdot 10^{14}$  см<sup>-3</sup>,  $T_e = 10$  эВ) локальными нагревами до температур, корректирующиеся от времени  $t$  (Иванов А. А. и др. «Плазма Жэгфа», 1971, т. 13, с. 691).

устойчивости не останавливает процесс инерционного ускорения электронов электрическим полем, однако в результате взаимодействия с турбулентными пульсациями у электронов появляется также хаотическая скорость  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ . Если считать, что внутри двойного слоя направленная скорость электронов растет пропорционально хаотической  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ , то остаются качественно справедливыми все старые формулы Лентгмора с заменой  $m_e \rightarrow m_{\text{eff}} \sim 2m_e$ .

Вне двойного слоя в области, примыкающей к нему «снизу по течению», следует ожидать раскачки чисто электронной плазменной ветви колебаний быстрыми электронами, ускоренными по линии внутри слоя. Эти электроны играют роль пучка на фоне более медленных электронов плазмы. Правдоподобная качественная картина двойного слоя с учетом неустойчивостей изображена на рис. 2.63.

Любопытное явление, по сути дела представляющее собой движущийся двойной электрический слой, было получено в лабораторных экспериментах (рис. 2.64) по так называемым электронным бесстолкновительным тепловым волнам.

### § 2.20. Бесстолкновительные ударные волны

Другой интересный пример важной роли коллективных процессов в плазме — бесстолкновительные ударные волны. В обычной газодинамике толщина фронта ударной волны ограничена снизу величиной порядка длины свободного пробега Молекул в газе, в плазме же благодаря «коллективным» свойствам возможно существование специфических ударных волн, толщина которых зна-

чительно меньше длины свободного пробега. Простейшим примером являются уже рассмотренные в § 1.20 решения для ионно-звуковых солитонов.

Рассмотрим теперь ситуацию при наличии магнитного поля. Представим себе (рис. 2.65) ударную волну с толщиной  $\Delta$ , значительно меньшей длины свободного пробега  $l$ . Более быстрые частицы ( $v > u$ ) из области слева (нагретая ударной волной плазма), казалось бы, могли, свободно двигаясь в сторону невозмущенной плазмы, размыть переднюю область до толщины  $l$ , равной длине свободного пробега. Какие эффекты могут предотвратить такое распыливание переходной области?

1. Самый простой случай имеет место при наличии магнитного поля, параллельного плоскости фронта. Такое магнитное поле заворачивает ионы и электроны плазмы на расстояниях порядка их ларморовского радиуса  $r_H$ . Следовательно, можно ожидать, что  $\Delta \ll r_H$ . Достаточно сильно магнитное поле ( $H^2/8\pi \gg nT$ ) препятствует размыванию даже в том случае, если оно не обязательно лежит в плоскости фронта. Это связано с тем, что скорость ударной волны при  $H^2/8\pi \gg nT$  намного превышает тепловую скорость частиц, и, следовательно, доля ионов (электронов), обгоняющих волну, экспоненциально мала. В задачах этого типа возникает следующий кажущийся парадокс. Состояния с обеих сторон фронта ударной волны связаны соответствующими законами сохранения (алибатой Гюгонио), согласно которым энергия поступательного движения невозмущенной плазмы трансформируется во внутреннюю энергию плазмы после прохождения ударной волны.

Что же приводит к диссириации, если  $\Delta \ll r_H$ ? В возмущенном состоянии за фронтом волны основная доля внутренней энергии плазмы приходит на интенсивные плазменные колебания. Присоединение таких нелинейных колебаний не обязательно связано с неустойчивостью плазмы. Оно тесно связано со специфическими дисперсионными свойствами плазмы (см. § 1.20). Иначе говоря, как и в нелинейной динамике ионно-звуковых волн, главную роль здесь играет конкуренция нелинейного укручивания и отклонения от линейного закона дисперсии.

2. Когда магнитное поле мало, вообще отсутствует или перпендикулярно к фронту волны, механизм, механизма распыливанию вследствие распыливания некоторая доля быстрых частиц проникает в невозмущенную плазму перед фронтом ударной волны. Тогда состояние плазмы в этой области представляет собой смесь равновесного невозмущенного распределения частиц и некоторой

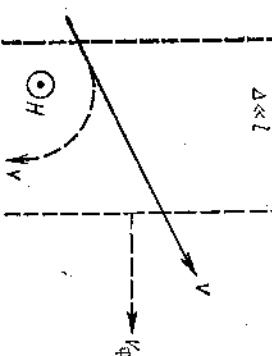


Рис. 2.65. Схематическое изображение фронта бесстолкновительной ударной волны

группы быстрых частиц, т. е. станет неравновесным (в итоге расположение частиц по скоростям будет отличаться от максвелловского). Неравновесная плазма неустойчива по отношению к раскачке различного рода колебаний. Флуктуирующие электрическое и магнитное поля колебаний, возникающих вследствие неустойчивости, приводят к рассеянию ионов и электронов. Иначе говоря, при наличии такого sorta флукутирующих полей нужно переопределить понятие длины свободного пробега, подобно тому как это было сделано в задаче об аномальном сопротивлении.

Путь построения теории ударной волны без столкновений (представлении о регулярных нелинейных колебаниях (солитоны решения), затем исследуется устойчивость таких решений. Наконец, в неустойчивых случаях (а также тогда, когда ламинарных решений вообще не существует) строится «турбулентная» теория.

В ламинарной теории следует учесть влияние затухания на характер нелинейных установившихся волн, так как в отсутствие затухания эти волны описываются обратимыми движениями. Так, состояния плазмы до и после прохождения уединенной волны (солитонов) одно и то же. Ясно, что учет диссиляции должен нарушить обратимость, и состояния плазмы до и после уединенной волны будут различны. Если воспользоваться для нелинейных движений плазмы уравнениями сохранения потоков массы, импульса и энергии, то для установившихся движений, по определению, должны связывать состояния, подчиняющиеся уравнениям адиабаты Гюгонио. Состояния до и после уединенной волны без учета затухания принципально удовлетворяют адиабате Гюгонио. Как изменится форма уединенной волны, если учесть диссиляцию? Состояние после прохождения уединенной волны должно отличаться от исходного, причем разница это, конечно, определяется конкретным механизмом и величиной диссиляции.

Кроме того, адиабата Гюгонио не зависит от конкретного механизма диссиляции. В теории толщины ударной волны в обычной газодинамике этот кажущийся парадокс разрешается следующим образом. В зависимости от коэффициентов вязкости, теплопроводности и других величин, характеризующих диссиляцию, меняется и сама форма переходной зоны (ее толщина). В разреженной же плазме «толщина» уединенной волны (при малой диссиляции) задается независимо от адиабаты Гюгонио дисперсионными свойствами. Решение кажущегося парадокса в случае разреженной плазмы заключается в том, что состояния плазмы остаются «возмущенными»: в плазме остаются интенсивные колебания, вклад которых в потоки импульса и энергию нужно учитывать. Это означает, что внутри фронта ударной волны самопроизвольно нарастают регулярные колебания конечной амплитуды.

В случае разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле, когда длина свободного пробега значительно больше среднего ларморовского радиуса ионов, формальное газодинамическое описание

применимо (для движений поперек силовых линий) и внутри пространственных областей, меньших свободного пробега. Необходимо только, чтобы все величины мало менялись на расстояниях порядка ларморовского радиуса.

Рассматривая структуру фронта ударной волны, распространяющейся перпендикулярно к магнитному полю в разреженной плазме, будем считать, что вследу внутри фронта выполнено условие малости ларморовского радиуса по сравнению с любым характерным размером. Рассмотрим более простой случай «холодной» плазмы ( $\rho \ll H^2/8\pi$ ). Пусть механизм затухания будет некоторое условно введенное трение между ионами и электронами. Его конкретный механизм (при определенных условиях он может быть связан с аномальным сопротивлением) обсудим позже. Задача заключается в том,

чтобы составить систему дифференциальных уравнений для величин, характеризующих плазму и самосогласованные электромагнитные поля внутри фронта ударной волны, и исследовать ее. Введем систему координат, в которой фронт волны покоятся: магнитное поле направим по оси  $z$ ; пусть  $2y$  — плоскость фронта. Электрический ток переносится электронами в направлении  $y$  (рис. 2.66). Инерция электронов в этом направлении будет существенно влиять на структуру фронта, так как она определяет отклонение закона дисперсии магнитного звука от линейного (см. § 2.6). Наконец, для простоты примем, что внутри фронта выполняется условие квазинейтральности  $n_i = n_e$ , где  $n_i$ ,  $n_e$  — плотность числа ионов и электронов в соответствии с аналогичной задачей о линейных магнитозвуковых колебаниях поперек магнитного поля (см. § 2.6).

В набор величин, определяющих плазму и поля, входят:  $n$ ,  $H$ ,  $v_x$  (скорость плазмы в направлении распространения волны, т. е. по оси  $x$ ),  $v_y$  (скорость электронов, переносящих ток),  $E_x$  (напряженность электрического поля вдоль оси  $y$ ). Поле  $E_z$  можно исключить, пользуясь условием квазинейтральности. В системе отсчета, где фронт волны покойится, для этих пяти неизвестных имеется пять уравнений: 1) уравнение сохранения потока частиц; 2) уравнение сохранения потока импульса; 3) уравнение движения электронов в направлении переноса электрического тока — по оси  $y$ ; 4) и 5) уравнения Максвелла для соответствующих компонент  $E$  и  $B$ . Исходную систему после несложных преобразований можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка для одной из переменных, например  $H$ . Выпишем эти уравнения с учетом сделанных приближений:

$$\begin{aligned} (d/dx)nu &= 0; \quad (d/dx)(Mnu^2/2 + H^2/8\pi) = 0; \\ mnu(du_y/dx) &= -enE_y + (e/c)nuH - umu_y; \\ dE_y/dx &= 0; \quad dH/dx = (4\pi ne/c)u_y. \end{aligned} \quad (2.369)$$

Последний член в правой части уравнения движения для электрона соответствует силе трения электронного газа об ионный.

Исключая из этих уравнений все переменные, кроме  $H$ , можно получить одно уравнение второго порядка для  $H$ . Если на время не учитывать вклад силы трения, это уравнение примет вид (с точностью до членов с  $m_e/m_i$ )

$$\begin{aligned} -\frac{mc^2}{4\pi n_0 e^2 v_\Phi} \frac{d}{dx} \left[ \frac{dH}{dx} \left( \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 m_i v_\Phi} - v_\Phi \right) \right] \left( \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 m_i v_\Phi^2} - v_\Phi \right) = \\ = \left( \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 m_i v_\Phi^2} - v_\Phi \right) H + v_\Phi H. \end{aligned} \quad (2.370)$$

Это уравнение определяет профиль изменения  $H$  в исследуемой установившейся волне. Интегрируя один раз, приведем его к виду

$$-a^2 H^3 \left( \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 m_i v_\Phi^2} - v_\Phi \right)^2 = \frac{(H^2 - H_0^2)^3 - 16\pi n_0 m_i v_\Phi^2 (H - H_0)^2}{16\pi n_0 m_i} + C, \quad (2.371)$$

(здесь  $a^2 = m_e c^2 / 4\pi n_0 e^2 = c^2 / \omega_{pe}^2$ ). В зависимости от выбора константы интегрирования  $C$  мы получаем различные решения. Удобно проследить за характером решений в зависимости от  $C$ , построив (рис. 2.67) интегральные кривые на фазовой плоскости  $(H, H')$ .

Решения уравнения (2.371) должны описывать периодические волны конечной амплитуды (квадральные волны). Исключение составляет решение, соответствующее частному случаю  $C=0$ . Этот случай относится к решению типа магнитозвуковых волн. Действительно, такой выбор соответствует условию  $dH/dx=0$  при  $H=H_0$ . При этом уравнение принимает вид

$$\pm a \frac{dH}{dx} = \frac{(H - H_0)}{(H^2 - H_0^2)/8\pi n_0 m_i v_\Phi^2 - v_\Phi} (16\pi n_0 m_i)^{-1/2} \times \\ \times \sqrt{16\pi n_0 m_i v_\Phi^2 - (H + H_0)^2}. \quad (2.372)$$

Если выбрать определенный знак перед корнем в равенстве (2.372), то получим, что нельзя построить физически разумное решение для  $H$  на всей оси  $x$ . Однако существуют решения всюду

непрерывные (до второй производной включительно), в которых при некоторых  $x=x_1$  производная  $H'$  меняет знак. В этой точке  $H$  достигает своего максимального значения  $H_{max}$ . Уравнение  $(dH/dx)(x_1)=0$  связывает амплитуду магнитного поля  $H_{max}$  со скоростью распространения волны и играет роль, аналогичную дисперсионному уравнению

$$16\pi n_0 v_\Phi^2 - (H_{max} + H_0)^2 = 0. \quad (2.373)$$

Отсюда находим для скорости солитона

$$v_\Phi^2 = (H_{max} + H_0)^2 / 16\pi n_0 m_i. \quad (2.374)$$

В предельном случае малых амплитуд ( $H_{max} \rightarrow H_0$ ) находим скорость магнитного звука.

Характерный пространственный масштаб солитона  $\delta \sim c/\omega_{pe}$ , что соответствует длини волн, при которых появляется дисперсия фазовой скорости. Простое аналитическое выражение для профиля магнитного поля в уединенной волне легко получить для малых амплитуд ( $H_{max} - H_0 \ll H_0$ ). Оно имеет вид

$$H = H_0 \left\{ 1 + 2 \left( \frac{v_\Phi^2}{(H_0^2/V\sqrt{4\pi n_0 m_i})^2} - 1 \right) \operatorname{sh}^2 \left( \frac{x}{c/\omega_{pe}} \sqrt{\frac{v_\Phi^2}{(H_0/V\sqrt{4\pi n_0 m_i})^2} - 1} \right) \right\}. \quad (2.375)$$

На рис. 2.68 показаны профили солитона для различных значений числа Маха  $M = v_\Phi |H_0| / \sqrt{4\pi n_0 m_i}$ .

Решение солитонного типа исчезает при достаточно больших  $v_\Phi$  и  $H$ . Критической является амплитуда  $H_{max} = 3H_0$  (т. е.  $v_\Phi = \sqrt{2}H_0 / \sqrt{4\pi n_0 m_i}$ ). При приближении амплитуды волны к критической плотность ионов на гребне волны стремится к бесконечности. Физически это означает следующее. Уединенная волна представляется собой «горб» электрического потенциала  $\Phi$ . В системе координат, связанной с волной, поток ионов из  $x=\infty$  набегает на этот потенциальный барьер со скоростью  $v_\Phi$ . При не слишком больших амплитудах начальная кинетическая энер-

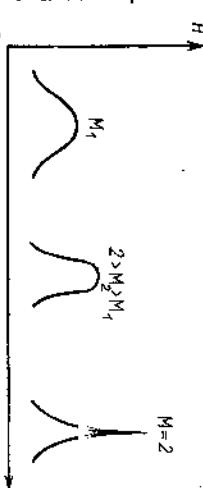


Рис. 2.67. Фазовые кривые для нелинейных магнитозвуковых волн.

на. Действительно, такой выбор соответствует условию  $dH/dx=0$  при  $H=H_0$ . При этом уравнение принимает вид

$$\pm a \frac{dH}{dx} = \frac{(H - H_0)}{(H^2 - H_0^2)/8\pi n_0 m_i v_\Phi^2 - v_\Phi} (16\pi n_0 m_i)^{-1/2} \times \\ \times \sqrt{16\pi n_0 m_i v_\Phi^2 - (H + H_0)^2}. \quad (2.372)$$

Если выбрать определенный знак перед корнем в равенстве (2.372), то получим, что нельзя построить физически разумное решение для  $H$  на всей оси  $x$ . Однако существуют решения всюду говоря, критическое число Маха равно двум). На гребне такой

волны ионы, потеряв скорость, «останавливаются», а их плотность возрастает до бесконечности. При еще больших амплитудах ионы просто «отражались» бы от барьера, но соответствующей таковой картине движение уже не описывается в рамках рассмотренной исходной системы уравнений, так как после отражения течение становится «многолоковым» (взаимопроникающие потоки набегающих и отраженных ионов).

Таким образом, видим, что, как и для ионно-звуковых волн (см. § 1.20), эффекты дисперсии не могут остановить «опрокидывание» магнитного звука с достаточно большой амплитудой в холдиной плазме.

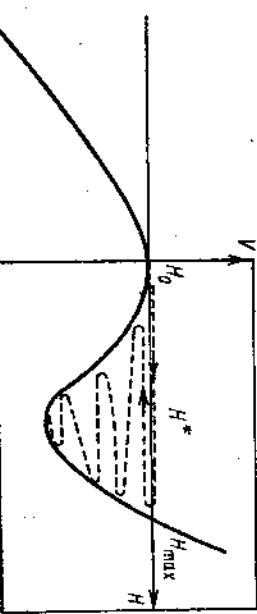


Рис. 2.69. Эффективная потенциальная яма для магнитозвуковых солитонов в уларной волне

Если бы мы учли тепловой разброс скоростей ионов, то даже при малых амплитудах волны могли бы найти ионы, отражающиеся от барьера (это ионы с малой относительной скоростью  $v_{\phi} - v_x$ ), т. е. двигавшиеся первоначально в направлении распространения волны со скоростью, близкой к  $v_{\phi}$ ; их можно назвать резонансными. Они дают лишь один из возможных механизмов диссиации, который мал, если мало число резонансных ионов.

Другой механизм диссиации дает сила трения электронов об ионы. Для волн небольшой амплитуды анализ можно упростить и посмотреть, к чему приводит диссиация. Вместо (2.370) в этом случае имеем

$$-\alpha^2 \frac{d^2 H}{dx^2} = H_s - H + H \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi m_i n_i v_{\phi}^2} + \frac{d^2}{v_{\phi}} v \frac{dH}{dx}. \quad (2.376)$$

Рассуждая, как и в § 1.20, видим, что уравнение (2.376) представляет собой уравнение движения антармонического осциллятора при наличии трения, роль обобщенной координаты здесь играет  $H$ , роль времени  $x$ .

Форма ямы определяется потенциалом

$$V(H) = (1/2)(H - H_0)^2 [(H + H_0)^2 / 16\pi m_i n_i v_{\phi}^2 - 1]. \quad (2.377)$$

На рис. 2.69 изображен вид функции  $V(H)$ . При

$$H = H^* = -H_0/2 + \sqrt{8\pi n_i m_i v_{\phi}^2 + H_{\bullet}^2}/4$$

$H$  достигает минимума. Аналогия с осциллятором легко позволяет установить профиль  $H$  внутри фронта ударной волны;  $H$  осциллирует вокруг значения  $H^*$  с затухающей амплитудой до тех пор, пока не устанавливается  $H = H^*$ , соответствующее магнитному полю позади фронта ударной волны. Для того чтобы  $H_0$  соответствовало минимуму магнитного поля в волне, т. е. чтобы  $V(H)$  имело вид, изображенный на рис. 2.69, необходимо, чтобы выполнялось условие  $v_{\phi}^2 > H_0^2 / 4\pi m_i n_i$ .

Профиль изменения  $H$  внутри фронта волны можно представить следующим образом (рис. 2.70). Сначала в невозмущенной плазме появляется солитон, на гребне которого магнитное поле достигает максимального значения; вследствие наличия неборатной диссиации (трение или резонансные ионы) состояние плазмы после прохождения такой волны будет отличаться от исходного. На расстоянии порядка

$$\delta \approx (a/\sqrt{M-1}) \ln [(v_{\phi}/va)\sqrt{M-1}] \quad (2.378)$$

(число Маха  $M = v_{\phi}/v_A$ ) вслед за первой волной движется вторая волна и т. д. Если не интересоваться тонкой структурой осцилляций во фронте ударной волны и усреднить магнитное поле по расстояниям, предвыходящим  $\delta$ , то можно говорить о  $\delta$  как об эффективной толщине фронта ударной волны, связывающей два состояния плазмы: неизмененной (до прихода волны) и возмущенной (модулированной интенсивными колебаниями), вклад которых при таком подходе нужно включить в законы сохранения на «разрыве». В этом смысле роль затухания действительно частично символическая, так как в выражение для  $\delta$  (2.378) (ширина тангенциальной ударной волны) затухание входит под знаком логарифма.

Картина затухания нелинейных осцилляций позади фронта ударной волны имеет следующий характер. В последующих «ударных» волнах амплитуда все уменьшается и расстояние между двумя соседними «возвышениями» магнитного поля сокращается до  $a/\sqrt{M-1}$ , когда совокупность возвышений и впадин становится затухающей синусоидой. Полная длина затухания осцилляций будет порядка  $v_{\phi}/v$  или  $\sqrt{(H_0^2/8\pi m_i T)(m_e/m_i) \lambda}$  ( $\lambda$  — длина свободного пробега электронов).

При достаточно большой силе трения (частота столкновений  $\bar{v}$ )

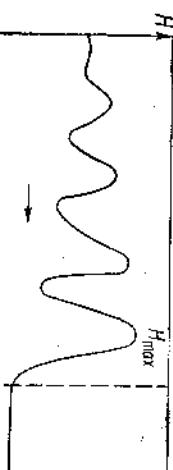


Рис. 2.70. Осцилляторная структура магнитозвуковой ударной волны

характер решения уравнения (2.376) полностью меняется. Этот случай в бесстолкновительной плазме очень важен при аномальном сопротивлении. До сих пор мы считали затухание [последний член в уравнении (2.376)] малым. В противоположность этому случаю при  $c/\omega_{pi} \ll c^2 m_e v_A / k T_{pe}$  можно пренебречь дисперсией, т. е. членом со второй производной в (2.376). Толщина фронта ударной волны тогда дается выражением

$$\Delta \sim c^2 / 4 \log \phi (M - 1). \quad (2.379)$$

Конкретную величину  $\Delta$  получим, если для  $\sigma$  воспользуемся выражением из теории аномального сопротивления при ионно-звуковой неустойчивости.

До сих пор речь шла о структуре волн, распространяющейся строго поперек магнитного поля. Нетрудно обобщить предыдущее рассмотрение на случай волн, не перпендикулярных к  $H$ . Дисперсионные эффекты резко чувствительны к направлению распространения волн. Если волна распространяется не строго поперечно, то характерной длиной дисперсии является  $(c/\omega_{pi})\theta$  (при  $\sqrt{m_e/m_i} \ll \theta \ll 1$ ). Инерция электронов для таких волн несущественна, но зато учитывается гиротропия плазмы. Уравнение для  $H$  в этом случае можно угадать из простых соображений о роли дисперсии. Действительно, для этого достаточно в уравнении (2.376) подставить  $\alpha$  и дисперсию  $\sigma$  понимать  $(c/\omega_{pi})\theta$ . В результате получим для  $H$  следующее уравнение:

$$\frac{c^2}{(\omega_{pi})^2} \theta^2 \frac{d^4 H}{dx^4} = H \left\{ 1 + \frac{H^2_0}{8\pi n_0 m_i v^2 \Phi} - \frac{H^2}{8\pi n_0 m_i v^2 \Phi} \right\} - H_0 + \alpha \frac{dH}{dx}. \quad (2.380)$$

Но здесь меняется не только длина, но и характер дисперсии  $(\omega/k)$  с ростом  $\theta$  увеличивается). В уравнении (2.380) изменился знак «эффективной массы». В предыдущем случае мы имели  $\partial dH / \partial x$ , а теперь  $\partial dH / \partial x$  мы снова имеем

нелинейные периодические установившиеся волны. Особый интерес представляет и здесь явление, которое называется «затуханием» (рис. 2.71). Профиль же удлиненные волны, но в этом случае это удлиненные волны «разрежения» (рис. 2.71). Профиль же удлиненных волни будет иметь вид, показанный на рис. 2.71. Любопытно, что внутри фронта ударной волны магнитное поле достигает минимального значения, меньшего, чем в невозмущенной плазме. Отличие от предыдущего случая заключается и в том, что передний фронт осцилляций не является резким.

Таким образом, задача о ламинарной структуре неллинейных осцилляций внутри фронта ударных волн сводится к двум различ-

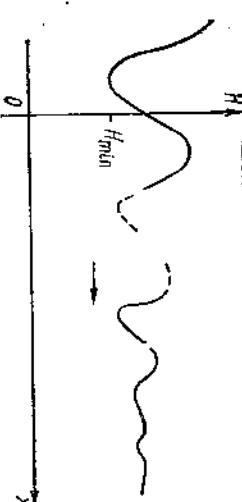


Рис. 2.71. Осцилляторная структура «ко-сой» ударной волны

ним постановкам (рис. 2.72): 1) когда дисперсионная кривая  $\omega(k)$  имеет вид типа I (волны, перпендикулярные к  $H$  в холодной плазме); в этом случае передний фронт осцилляций резкий (все начинается с солитонов) и 2) когда короткие волны имеют большую скорость распространения, чем длинные (тип II). В этом случае передний фронт осцилляций вытягивается, так как короткие волны обгоняют фронт. Для существования бесстолкновительной ударной волны здесь уже необходимо аномальное затухание таких осцилляций.

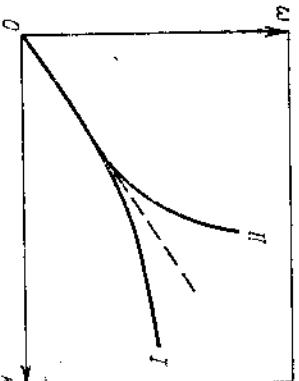


Рис. 2.72. Два предельных случая законов дисперсии

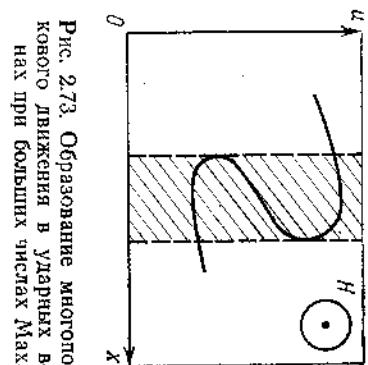


Рис. 2.73. Образование многопотокового движения в ударных волнах при больших числах Маха

Мы еще совсем не разбирали случаев, когда ламинарную теорию фронта ударной волны вообще невозможно построить. Такая ситуация в уже приведенных выше примерах осуществляется при достаточно больших амплитудах, когда нет установившихся неллинейных волн. Рассмотрим сначала случай, когда ударная волна идет поперек сильного магнитного поля в холодной плазме. Приближении амплитуды магнитного поля в волне к значению, второе большему начального магнитного поля, ламинарная структура нарушается. Физически это означает, что как только амплитуда волны достигает критического значения ( $H_{max} = 3H_0$ ), происходит «опрокидывание». В некотором участке пространства ионы, двигавшиеся первоначально позади, настигают передние и обгоняют их (рис. 2.73). Профиль скорости в этом случае становится многозначным.

Заметим, что аналогичное явление хорошо изучено в теории волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости в начале конечной глубины. Здесь существуют неллинейные установившиеся движения типа удлиненных или периодических волн. При достаточно больших амплитудах такие волны разрушаются вследствие «опрокидывания». Ясно, что строгий математический анализ картины, возникающей после опрокидывания, чрезвычайно труден. Можно попытаться лишь качественно установить наиболее существенные черты явления, проводя аналогию с волнами в жидкости. Основной вопрос состоит в том, будет ли после опрокидывания движение плазмы стремиться к какому-либо установившемуся ре-

жиму или же переходная область (заштрихованная, см. рис. 2.73) будет неограниченно размываться, как это имело бы место в обычном газе без столкновений. В теории поверхностных волн через некоторое время после опрокидывания возникает установившееся течение, называемое прыжок волны или бор, представляющее собой некоторую переходную область конечной толщины, которая обычно заменяется идеализированной математической поверхностью, разделяющей два дилоскопараллельных потока. При переходе через эту поверхность удовлетворяются соответствующие законы сохранения. В известном смысле «бор» представляет собой аналог ударной волны. Стационарность ширины переходного слоя физически обеспечивается тем, что участки профиля, выдвигающиеся вперед при опрокидывании, в конце концов, описав дугу, под действием силы тяжести падают и «смешиваются» с покопавшимися. В плазме роль силы тяжести выполняет магнитное поле, зavorачивающее ионы. Хотя распределение их по скоростям еще далеко от максвелловского, состояния плазмы с обеих сторон переходной области можно связывать законами сохранения потоков массы, импульса и энергии. Ширину переходной области можно оценить как радиус кривизны ионов после опрокидывания в магнитном поле. Так как волна с числом Маха больше двух амплитуда скорости  $v_{\text{бор}} \gg v_A$ , то ширина переходного слоя (или ширина бесстолкновительной ударной волны)  $\delta \sim v_{\text{бор}} c / eH \sim c/\omega_{ci}$ .

Однако многоскоростное течение со скоростями, перпендикулярными к магнитному полю, возникающее после опрокидывания, должно быть неустойчиво. Действительно, если для простоты рассмотреть двухлучковое распределение ионов при разности скоростей  $v_{\text{бор}} > v_A$ , то возникает неустойчивость, превышающей тепловую. Для простоты рассмотрения будем считать, что ионы движутся в магнитном поле с плотностью  $n > 10^{13} \text{ см}^{-3}$  в режиме аномального сопротивления. (Альхов С. Г. и др. — In: «Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fus. Res.,» 1, Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1969, p. 47)

Рис. 2.74. Типичные профили бесстолкновительных ударных волн, генерируемых в лабораторной плазме с помощью метода «магнитного поршня»:

- волна, распространяющаяся перпендикулярно к магнитному полю (плотность плазмы  $n = 5 \cdot 10^{12}$  атомов  $H_{\alpha} \sim 1 \text{ кГц}$ ). Внутри фронта волны токовая скорость электронов превышает тепловую. Однако даже искусственно не удаётся развить: — — — «вспышка» ударной волны ( $\theta > 10^\circ$ ); — . . . волна, распространяющаяся перпендикулярно к магнитному полю в плазме с плотностью  $n > 10^{13} \text{ см}^{-3}$  в режиме аномального сопротивления. (Альхов С. Г. и др. — In: «Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fus. Res.,» 1, Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1969, p. 47)

ная корона выбрасывается с большой скоростью огромные массы горячей плазмы, которые, попадая в межпланетную плазму, создают бесстолкновительные ударные волны. Проблема здесь заключается в том, чтобы найти механизмы, способные остановить свободное растекание инжектируемого струек плазмы в межпланетной среде.

Рассмотрим несколько более подробно лишь наиболее понятный механизм, связанный с развитием «килановой» неустойчивости. Пусть поток плазмы инжектируется вдоль невозмущенного магнитного поля во фронте косой ( $\theta \approx 60^\circ$ ) межпланетной ударной волны с числом Маха  $M = 2,5$ , по измерениям на борту спутника ISEE 26 октября 1977 г.

Большое значение отношения газокинетического давления к магнитному ( $\beta = 3$ ) способствует устойчивости уходящей вперед осцилляторной структуры. Толщина ударного фронта порядка  $\Delta \approx 90 \text{ км}$ , что составляет примерно  $2c\omega_{ci}$  (Russell C. T., Greenstadt E. W. — «Report of Inst. of Geophys. and Planet. Phys.», 1978, № 1847).

Но поле. Тогда в каждом элементе объема полное распределение частиц можно представить в виде суперпозиции невозмущенной плазмы и возмущенных частиц, втекающих в данный элемент объема. Такое распределение является, очевидно, анизотропным с параллельным давлением, нарастающим быстрее, чем перпендикулярное давление. При анизотропии давления, превышающей пороговое значение  $\Delta p > H_0^2/4k$ , развивается «килановая» неустойчивость, существенно влияющая на дальнейшее растекание плазмы.

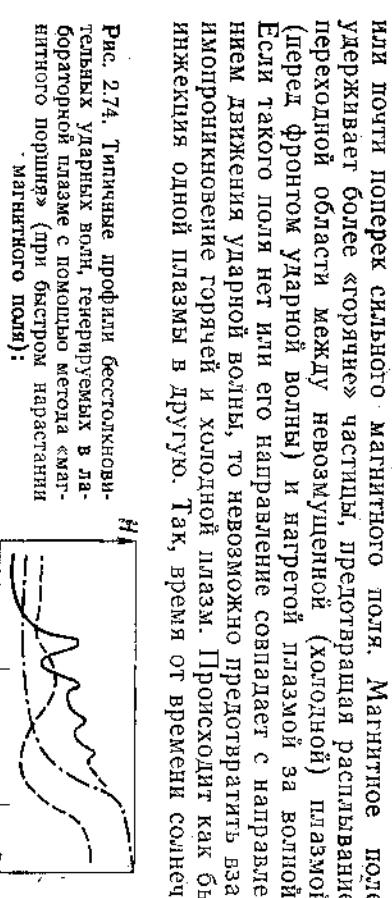


Рис. 2.74. Типичные профили бесстолкновительных ударных волн, генерируемых в лабораторной плазме с помощью метода «магнитного поршня»:

- волна, распространяющаяся перпендикулярно к магнитному полю (плотность плазмы  $n = 5 \cdot 10^{12}$  атомов  $H_{\alpha} \sim 1 \text{ кГц}$ ). Внутри фронта волны токовая скорость электронов превышает тепловую. Однако даже искусственно не удаётся развить: — — — «вспышка» ударной волны ( $\theta > 10^\circ$ ); — . . . волна, распространяющаяся перпендикулярно к магнитному полю в плазме с плотностью  $n > 10^{13} \text{ см}^{-3}$  в режиме аномального сопротивления. (Альхов С. Г. и др. — In: «Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fus. Res.,» 1, Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1969, p. 47)

или почти поперец сильного магнитного поля. Магнитное поле удерживает более «горячие» частицы, предотвращая распыление переходной области между невозмущенной (холодной) плазмой (перед фронтом ударной волны) и нагретой плазмой за волной. Если такого поля нет или его направление совпадает с направлением движения ударной волны, то невозможно предотвратить взрывомагнитование горячей и холодной плазм. Происходит как бы инъекция одной плазмы в другую. Так, время от времени солнеч-

## § 2.21. Генерация и усиление магнитного поля

До сих пор, рассматривая поведение плазмы в магнитном поле, мы молчаливо считали, что само существование последнего задается извне внешними источниками, хотя, разумеется, принималось во внимание влияние электрических токов, текущих по плазме.

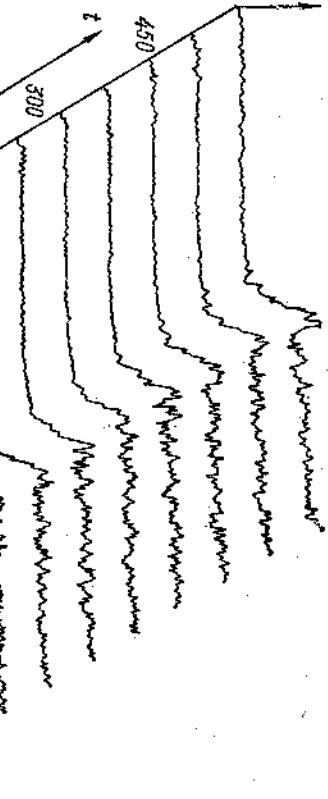


Рис. 2.76. Структура бесстолкновительной ударной волны, распространяющейся параллельно магнитному полю в плазме с большим  $\beta$  (H. Völk, D. Auer, 1971). Показаны профили плотности в волне в различные времена  $t$ , расстояние измеряется в ионных ларморовских радиусах, время — в обратных частотах ларморовского вращения ионов. Вследствие сжатия на фронте волны продолжение ионов превышает поперечное. Развивающаяся при этом шланговая неустойчивость создает эффективную диссипацию. Составляется квазистационарная структура фронта шириной порядка нескольких ионных ларморовских радиусов.

**Вследствие развития «шланговой» неустойчивости магнитные силовые линии будут извиваться беспорядочным образом, так что магнитное поле становится турбулентным. Обратное влияние этой турбулентности на растекание частиц учитывается квазилинейными уравнениями для функций распределения частиц. С точки зрения сохранения адиабатических инвариантов**

$$\mu = mv^2_{\perp}/2H \text{ и } J = \oint dv_{\parallel}$$

( $dv$  — элемент силовой линии магнитного поля) по мере нарастания турбулентного магнитного поля уменьшается продольное и увеличивается поперечное давление плазмы. Иными словами, рассеяние частиц на нерегулярностях магнитного поля играет роль эффективных соударений, приводящих к изотропизации давления плазмы.

Аналитическая теория этого явления построена для слабых ударных волн. В общем же случае используют численное моделирование (рис. 2.76). Толщина ударной волны без столкновений оказывается, как и следовало ожидать из размерностных соображений, порядка нескольких ларморовских радиусов иона.

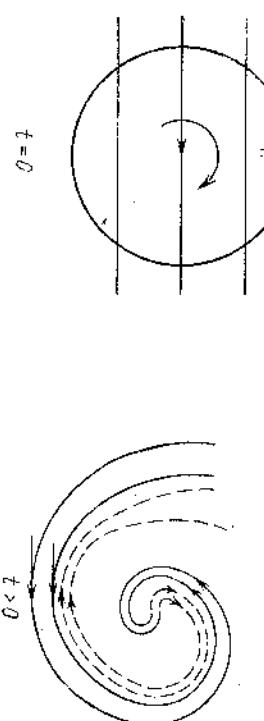


Рис. 2.77. Схема усиления магнитного поля в процессе дифференциального вращения плазмы вместе с вморооженными силовыми линиями

движении проводящего вещества вместе с вморооженными в него силовыми линиями магнитного поля. В частности, при турбулентном движении плазмы различные точки, пронизываемые силовой линией, со временем удаляются друг от друга, приводя к растягиванию и запутыванию силовых линий. При этом, однако, возникают сильные градиенты магнитного поля, а в некоторых областях даже образуются конфигурации со встречным направлением магнитного поля. Поэтому ясно, что в таких конфигурациях становится важной диссипация поля из-за взаимной диффузии («аннигиляции», по терминологии § 2.15 о тиринг-моде) магнитных силовых линий. Эти же процессы медленно усиливают поле в случае растягивания силовых линий в процессе регуляризации движения в одной плоскости. Классическим примером ламинарного движения такого рода является дифференциальное вращение, когда силовые линии, соединяющие две точки, лежащие на различном расстоянии по радиусу от оси вращения, со временем растягиваются в спирали (рис. 2.77). Из-за условия  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  число силовых линий, направленных по спирали к оси вращения, должно быть равным числу силовых линий, уходящих по спирали от оси вращения. Поэтому при сильном закручивании спиралей пучки силовых линий, имею-

шие противоположные направления (к оси и от оси), находятся на близком расстоянии друг от друга и быстро анилируют вследствие взаимной диффузии полей. Кроме того, обратное воздействие сил натяжения магнитных силовых линий на вращающуюся плазму рано или поздно приводит к ее торможению, т. е. к прекращению дальнейшего усиления поля.

Невозможность длительного усиления поля в двумерном случае нетрудно доказать и на математическом языке. Для этого воспользуемся уравнением (2.70) для магнитного поля с учетом движения проводящей плазмы. Это уравнение является основным в теории так называемого кинематического динамо, в которой движение (поле скорости  $v(r, t)$ ) задано. В двумерном случае удобно вместо напряженности магнитного поля ввести векторный потенциал

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

В случае двумерного движения в плоскости  $(x, y)$  векторный потенциал имеет только одну компоненту вдоль оси  $z$ , так что уравнение (2.70) сводится к виду

$$\partial A_z / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_z = (c^2 / 4\pi \rho) \Delta A_z. \quad (2.381)$$

Второй член в левой части (2.382) описывает усиление магнитного поля при движении его силовых линий с плазмой, а правая часть учитывает диффузию магнитных силовых линий. Эффект усиления доминирует при условии  $4\pi \rho V L \gg 1$ , где  $V, L$  — характерные скорость и масштаб движения соответственно. Однако само усиление не может длиться бесконечно долго, так как в таком процессе не создается новых силовых линий, а старые в конечном счете должны исчезнуть в результате взаимной диффузии. Последнее несложно понять из аналогии (замеченный Я. Б. Зельдовичем) уравнения (2.382) с уравнением теплопроводности, которое, как известно, имеет только одно стационарное решение, соответствующее  $A_z = \text{const}$ .

Учитывая огромные пространственные масштабы, характерные для космической плазмы, и ее достаточно высокую проводимость, можно показать, что для нее условия усиления поля часто выполняются с хорошим запасом. В качестве классического примера обычно ссылаются на Крабовидную туманность, магнитное поле которой, по-видимому, претерпело зволнение указанного типа. Следует отметить, что примерно так. Около тысячи лет назад в результате взрыва сверхновой в центре Крабовидной туманности образовалась нейтронная звезда, вращающаяся с угловой частотой порядка 30 об/с, а внешняя проводящая оболочка старой звезды была сброшена и разлетается теперь примерно со скоростью 1500 км/с. В результате магнитные силовые линии, вмороженные, с одной стороны, в разлетающуюся оболочку, а с другой, в быстро врачающуюся нейтронную звезду, за время, прошедшее с момента взрыва, должны были совершить  $N = 30 \text{ об/с} \times 3 \cdot 10^{10} \text{ с} \approx 10^{12}$  об. Магнитный поток, пронизывающий старую звезду, по-видимому, по-

порядку величины составлял величину, равную потоку через такую типичную звезду, как наше Солнце, т. е.

$$\Phi = 2\pi R_\odot^2 B_\odot \approx 10^{24} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2,$$

где  $B_\odot \approx 1 \text{ Гс}$  — среднее по поверхности магнитное поле Солнца, а  $R_\odot = 7 \cdot 10^8 \text{ км}$  — радиус Солнца. Если теперь предположить, что примерно один процент этого потока остался вмороженным в разбегающуюся оболочку, то к настоящему моменту магнитный поток, пронизывающий Крабовидную туманность, с учетом многократного закручивания силовых линий составит около  $10^{33} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ .

Учитывая, что размер Крабовидной туманности примерно равен, расстоянию, которое пролетела оболочка за тысячу лет, т. е. примерно  $3 \cdot 10^8 \text{ см}$ , находим

магнитное поле в Крабовидной туманности  $H = 10^{-4} \text{ Гс}$ . Оценка синхротронного излучения энергичных электронов в таком магнитном поле дает поток энергии излучения, по порядку величины совпадающий с наблюдаемым. Сторонники такой модели считают это аргументом в пользу изложенной простой модели усиления поля.

Точно так же, как и для плоского движения, было доказано, что и некоторые другие регулярные движения, обладающие высокой симметрией, не могут усиливать и поддерживать поток в течение длительного времени. К такого рода движением относится дифференциальное вращение проводящего ядра вместе с вмороженным в него полоидальным магнитным полем. Дифференциальное вращение ядра (обычно более быстрое в центре) приводит к защурчиванию в тор полоидальных магнитных силовых линий (рис. 2.78). Напряженность торoidalного поля при этом растет линейно со временем, так как каждый новый оборот силовых линий увеличивает магнитный поток через меридиональную плоскость.

Однако полоидальное поле при этом экспоненциально затухает

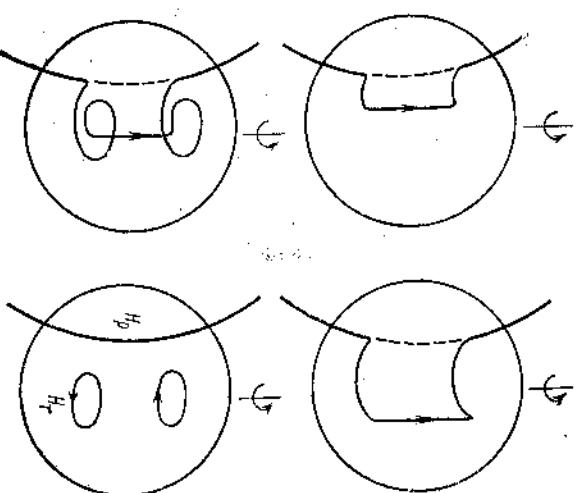


Рис. 2.78. Генерация торoidalного поля при дифференциальном вращении проводящей среды с вмороженным в нее полоидальным магнитным полем

из-за магнитной вязкости (диффузии силовых линий). В конце концов начнет затухать и торoidalное поле. Следовательно, чтобы генерировать стационарное магнитное поле, нужно найти подходящий механизм поддержания именно полоидального магнитного поля. Более того, это поле важно для объяснения дипольного магнитного поля некоторых планет и звезд. Что же касается внутреннего торoidalного поля, то его наличие не оказывается на характере внешнего поля.

Буллард и Эльзассер предложили в качестве такого механизма использовать преобразование торoidalного магнитного поля в полоидальное в процессе конвекции проводящей среды. Такое движение дополняет уже рассмотренное неоднородное вращение и снимает цилиндрическую симметрию задачи. Возникновение же конвекции, например в ядре Земли и в атмосферах звезд, является результатом обычной гидродинамической неустойчивости среды, подогреваемой снизу в поле тяжести. Рассматривая процесс подъема петли торoidalного поля в восходящих конвекционных потоках, можно показать, что силы Кориолиса поворачивают такую петлю в меридиональную плоскость и таким образом поддерживают полоидальное магнитное поле. Итак, в системе полоидальное поле  $\mathbf{H}_p$  и тородальное  $\mathbf{H}_T$  Ю. Паркер предложил феноменологические уравнения, реализующие обратную связь между полоидальным  $H_p$  и тородальным  $H_T$  полями. Эти уравнения имеют следующий наглядный вид:

$$\left. \begin{aligned} \partial H_T / \partial t &= \Gamma_R H_p + (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta H_T; \\ \partial H_p / \partial t &= \Gamma_C H_T + (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta H_p, \end{aligned} \right\} \quad (2.383)$$

где  $\Gamma_R$  — коэффициент генерации торoidalного магнитного поля из полоидального вследствие дифференциального вращения, а  $\Gamma_C$  — коэффициент генерации полоидального поля из тородального вследствие конвекции. Нетрудно убедиться, что в пределе слабой диффузии эти уравнения описывают экспоненциальное нарастание полей во времени при условии, что знаки коэффициентов связи торoidalного и тородального полей одинаковы:

$$H_{T,p} = \exp(\Psi); \quad \Psi^2 = \Gamma_R \Gamma_C. \quad (2.384)$$

Задачу о генерации магнитного поля планет и звезд в строгой аналитической постановке решить не так-то просто. Поэтому часто пользуются численными методами, предложенными еще Буллардом и Эльзассером. Однако задача о генерации магнитного поля значительно упрощается в случае, когда турбулентное движение с мелкими масштабами возбуждает существенно более гладкое магнитное поле. Тогда в разложениях Фурье поля скоростей и магнитного поля главные вклады определяются совершенно разными

масштабами. Это означает, что в формулах Фурье-разложения

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{u}_k(t) \exp(i\mathbf{qr}) d^3 q, \quad (2.385)$$

следует иметь в виду, что  $q^2 \ll k^2$ . По этой причине имеет смысл усреднение магнитного поля по мелкомасштабному движению среды (чертка сверху над  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ ).

Итак, существенное различие масштабов позволяет представить магнитное поле в виде суммы медленно меняющегося («крупномасштабного») поля  $\bar{\mathbf{H}}$  и мелкомасштабных флуктуаций  $\mathbf{h}$  (являющихся мгновенным откликом на движение среды). Здесь полезно отметить некоторую аналогию с квазилинейным приближением (§ 1.17). Представим магнитное поле в виде

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t). \quad (2.387)$$

Из уравнения (2.70) нетрудно получить уравнение для быстрых меняющейся части

$$\partial \mathbf{h} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{u} \times \bar{\mathbf{H}}] + \Delta \mathbf{h} c^2 / 4\pi\sigma. \quad (2.388)$$

Воспользуемся медленностью изменения  $\bar{\mathbf{H}}$  по сравнению с  $\mathbf{v}$ . Считая для простоты, что магнитная вязкость достаточно велика, перепишем это уравнение в виде

$$(\bar{\mathbf{H}} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (c^2 / 4\pi\sigma) \bar{k}^2 \mathbf{h}, \quad (2.389)$$

где  $\bar{k}^2$  — некоторый средний по спектру турбулентных пульсаций скорости квадрат волнового вектора.  
Уравнение для медленно меняющейся части магнитного поля получаем, усредняя уравнения (2.70) по мелкомасштабным флюктуациям, подобно тому как это делалось при выводе квазилинейного уравнения для функции распределения:

$$\bar{\mathbf{H}} / \partial t = \text{rot} [\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{H}}] + (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta \bar{\mathbf{H}},$$

Подставив сюда найденное выше выражение для  $\mathbf{h}$ , получим

$$\bar{\mathbf{H}} / \partial t = (4\pi\sigma / c^2 \bar{k}^2) \text{rot} [\bar{\mathbf{u}} \times (\bar{\mathbf{H}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}] + (c^2 / 4\pi\sigma) \bar{\Delta} \bar{\mathbf{H}}. \quad (2.390)$$

Черта сверху в этом уравнении означает усреднение по турбулентным пульсациям скорости. В теории кинематического динамо поля скоростей считается заданным. Для турбулентного движения задание усредненных характеристик движения осуществляется обыч-

но с помощью корреляционной функции для скоростей

$$K_{\alpha\beta}(r, r') = \overline{u_\alpha(r) u_\beta(r')}$$

Так как  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  соответственно числу измерений в пространстве, то  $K_{\alpha\beta}$  является тензором. Естественно считать, что он зависит только от  $(r - r')$ . Проще всего такой тензор можно представить в следующем виде:

$$K_{\alpha\beta}(r, r') = A(r - r')\delta_{\alpha\beta} + B(r - r')x_\alpha x_\beta + C(r - r')\epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\gamma, \quad (2.91)$$

где  $A, B$  и  $C$  — некоторые функции  $(r - r')$ ;  $\delta_{\alpha\beta}$  — полностью антисимметричный единичный тензор;  $x_\alpha, x_\beta$  — компоненты радиус-вектора  $(r - r')$ . Если положить  $r - r' = 0$ , то в правой части (2.91) остается только первый член. Тогда свертывание тензора по индексам  $\alpha$  и  $\beta$  дает  $\sigma^2 = 3A(0)$ . Средний квадрат скорости является самой общей характеристикой турбулентного движения. Часто при описании изотропной турбулентности этим и ограничиваются, т. е. в правой части (2.91) сохраняют лишь член  $\epsilon A$ . Если провести усреднение в интересующем нас уравнении (2.390), сохранив лишь вклад, содержащий  $A$ , то получится тождественный нуль. Удержание третьего члена в (2.391) придает турбулентному движению своеобразную особенность. Проведем сначала вычисления, а затем вернемся к обсуждению физического смысла. Умножая обе стороны выражения (2.390) на  $\epsilon \frac{\partial \delta}{\partial x_\alpha}$  и свертывая по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ , получаем  $C(0) = -(1/3)(v \cdot \text{rot } v)$ . Именно этот член дает неисчезающий вклад при усреднении в рассматриваемой модели динамики. Проводя несложные выкладки, получаем

$$\partial \bar{H} / \partial t = -(4\pi\sigma/c^2 k^2) (\bar{v} \cdot \text{rot } v) \text{rot } \bar{H} + (c^2/4\pi\sigma) \Delta \bar{H}. \quad (2.392)$$

Турбулентное движение с  $(v \cdot \text{rot } v) \neq 0$  удобно представлять на- глядно как статистический ансамбль вихрей, каждый из которых в среднем имеет преимущественное направление вращения (знак  $v$ ) в зависимости от направления своего поступательного движения (знак  $v$ ). Любопытна аналогия с поляризацией нейтрино и антинейтрино, которая, конечно, является чисто внешней.

Распишься уравнение (2.392) по компонентам, находим, что между различными компонентами появляется обратная связь. Правда, она несколько отличается от предложенной Паркером. Итак, как это было показано Стенбеком и Краузем, гиротропная турбулентность, в которой  $(v \cdot \text{rot } v) \neq 0$ , способна обеспечить усиление и поддержание магнитного поля. Характерное время нарастания можно получить, оценивая коэффициент связи из уравнения (2.392) и используя выражение для темпа нарастания в упрощен-

$$\Upsilon \approx 4\pi\sigma q/c^2 k. \quad (2.393)$$

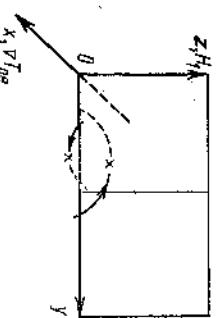
Поскольку при выводе уравнения для мелкомасштабных флуктуаций магнитного поля главным считается член, описывающий диффузию поля, то на темп роста поля накладывается следующее ограничение:  $\Upsilon \ll c^2 k^2 / 4\pi\sigma$ , т. е.  $c^2 / 4\pi\sigma \gg \sqrt{\sigma^2 q / k^2}$ .

Наконец, выше поле скоростей считалось заданным. На самом же деле с ростом напряженности магнитного поля возрастает воздействие его на движение среды. Тем самым мы выходим за рамки кинематического приближения. Верхний предел магнитного поля, который еще можно достичь, определяется из условий приближенного равенства энергии магнитного поля и кинетической энергии плазмы.

Кроме динамо существуют механизмы генерации магнитного поля, связанные с так называемыми сторонними силами (сторонними ЭДС). Такую роль могут играть термоэлектрические эффекты в плазме. Так, в уравнении (2.69) для магнитного поля существует слагаемое, которое в плазме с неколлинеарными градиентами давления и температуры приводит к появлению вихревой компоненты электрического поля. Этот эффект связан с учетом сил давления в обобщенном законе Ома. В отсутствие движения среды и магнитной вязкости уравнение (2.69) принимает простой вид:

$$\partial \bar{H} / \partial t = (c/e n) [\nabla T_e \times \nabla n]. \quad (2.394)$$

Отсюда следует, что при неколлинеарных градиентах  $\nabla T_e$  и  $\nabla n$  в плазме самопроизвольно нарастает магнитное поле. Из общих соображений следовало бы ожидать, что магнитное поле может нарастать до тех пор, пока плотность энергии магнитного поля станет сравнимой с плотностью тепловой энергии плазмы ( $H^2 / 8\pi \sim nT$ ). Однако гораздо раньше магнитное поле замагничивает электроны, и поэтому в законе Ома появляются дополнительные члены, связанные с так называемой термосигналом в направлении полерек градиента температуры и направления магнитного поля. Физический смысл такой термосигнала и порядок ее величины можно



уяснить из рис. 2.79. Здесь электроны, движущиеся из области с большей температурой в область с меньшей температурой, имеют соответственно большую длину пробега относительно кулоновских соударений. Вращаясь в магнитном поле, они передают в процессе столкновений импульс плазме в направлении полерек гради-

ента температуры и магнитного поля, создавая термосилу порядка

$$\mathbf{R}_T = -0,81 \tau_e [\Phi_{He} \times \nabla T_e],$$

где  $\Phi_{He} = e\mathbf{H}/m_e c$ , а численный коэффициент можно получить из более строгой теории явлений переноса, выходящей за рамки книги. Включая эту термосилу в закон Ома (2.65), преобразуем уравнение для магнитного поля к виду

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = -0,81 [\tau_e / m_e] \text{rot} [\mathbf{H} \times \nabla T_e] + (c/e n) [\nabla T_e \times \nabla n]. \quad (2.395)$$

Дополнительный член слева можно интерпретировать как улучшение магнитного поля тепловыми потоками со скоростью

$$\mathbf{u} = -0,81 \tau_e \nabla T_e / m_e, \quad (2.396)$$

Именно этот процесс оказывает стабилизирующее воздействие на рост поля и приводит к насыщению поля на уровне, определяемом по порядку величины условием  $\Phi n T_e \sim 1$ .

Здесь же следует отметить, что в плазме с первоначально коллинеарными градиентами  $n$  и  $T$  к неколлинеарности последних могут привести малые возмущения градиента температуры при наличии возмущений магнитного поля. Для того чтобы убедиться в этом, в уравнение теплопроводности следует включить так называемые косые потоки тепла (за счет явления, аналогичного эффекту Холла). В итоге получим уравнение

$$\mathbf{q}_\perp = -5,7 (n T_e \tau_e^2 / m_e) [\Phi_{He} \times \nabla T_e],$$

где численный коэффициент находит обоснование в строгой теории переноса. В результате уравнение теплопроводности принимает вид

$$(3/2) n (\partial T_e / \partial t) = 3,16 \text{div} [(n_e T_e \tau_e / m_e) \mathbf{grad} T_e] - 5,7 \text{div} (n_e T_e \tau_e^2 [\Phi_{He} \times \nabla T_e] / m_e). \quad (2.397)$$

Выбирая ось  $x$  вдоль невозмущенных градиентов  $n_0$  и  $T_{0e}$ , а возмущение магнитного поля вдоль оси  $z$  в виде  $H_z = H_1 \exp(-i\omega t + ik_y z)$ , линеаризуем уравнения (2.395) и (2.397) относительно малых возмущений:

$$\begin{aligned} -i\omega H_1 &= -(ikc T_{1e} / en_0) (\partial n_0 / \partial x); \\ -(3/2) i\omega n_0 T_{1e} &= -3,16 n_0 T_{0e} \tau_e k^2 T_{1e} / m_e - \\ &- 5,7 i k n_0 T_{0e} \tau_e^2 \Omega_1 \partial T_{1e} / \partial x m_e. \end{aligned}$$

Пренебрегая членом в левой части последнего уравнения по сравнению с членом, описывающим незамагниченную теплопроводность, и разрешая систему уравнений относительно  $H_1$ , находим, что магнитное поле нарастает экспоненциально с инкрементом

$$\gamma \approx 1,8 (\tau_e / m_e n) (\text{grad } n \cdot \text{grad } T_e). \quad (2.398)$$

Описанная выше самопроизвольная генерация магнитного поля предсказана А. Дыхне и В. Большовым в задаче о плазменной короне капельной мишени, облучаемой лазерным светом. Подавление теплопроводности плаэмы в результате роста магнитного поля су-

щественно сказывается на гидродинамике сжатия мишени и может оказаться препятствием на пути к осуществлению лазерного термоядерного синтеза. Кроме того, если мишень облучается сферически-несимметричным потоком лазерного света, то импульс световой волны, поглощаемой электронами скин-слоя, может иметь компоненту вдоль скин-слоя. Это приводит к генерации тока электронов и соответственно магнитного поля, охватывающего область поглощения излучения. Поскольку напряженность магнитного поля при этом оказывается пропорциональной интенсивности излучения, то эффект становится существенным лишь при очень больших потоках лазерного излучения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ \*

1. Арилович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1960.
2. Арилович Л. А. Закрученные плазменные конфигурации. М., «Наука», 1969.
3. Веденов А. А., Великов Е. П., Сагдеев Р. З. Устойчивость плазмы.—«Успехи физ. наук», т. 73, с. 701, 1961.
4. Sagdeev R. Z., Galeev A. A. Nonlinear plasma theory. Benjamin, NY—L. 1968.
5. Альян Х. Космическая электродинамика. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
6. Альшевер А. И. и др. Электродинамика плазмы. М., «Наука», 1974.
7. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1960.
8. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. М., «Наука», 1967.
9. Голант В. Е. Основы физики плазмы. М., Атомиздат, 1975.
10. Иванов А. А. Физика сильнодеяния плазмы. М., Атомиздат, 1977.
11. Каломидзе Б. Б. Коллективные явления в плазме. М., «Наука», 1976.
12. Ломинадзе Д. Г. Циклотронные волны в плазме. Тбилиси, «Мединерба», 1975.
13. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. Неустойчивости однородной плазмы. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., Атомиздат, 1975; Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., Атомиздат, 1977.
14. Пикельнер С. Б. Основы космической электродинамики. М., Физматгиз, 1961.
15. Paddington. *Cosmical Electrodynamics*. Wiley Inters. NY-L, 1966.
16. Салин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М., «Наука», 1973.
17. Силин В. И., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Атомиздат, 1961.
18. Сигнор Л. Физика полностью ионизованного газа. Пер. с англ. М., Изд-во настор. лит., 1957.
19. Стик Т. Х. Теория плазменных волн. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1965.
20. Чубович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М., «Наука», 1967.

## АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- A**лгебраические инварианты 135, 150  
Альвестовские волны 168  
Аномальная вязкость 300  
Аномальное сопротивление 76, 273,  
277, 284, 285  
Ариловича формула 267  
Бома — Коэффициент диффузии 249,  
257  
Булларда — Эльзассера механизмы  
генерации магнитного поля 306  
**B**ласова уравнение 54  
Вмогренность магнитного поля 161  
Волны бесстолкновительные ударные  
— — — без магнитного поля 139  
— — — в магнитном поле 292, 299  
— — — дрейфовые 244  
— — — квондальные 127  
— — — магнитогидродинамические (аль-  
бертесовские) 168  
— — — магнитозумкуевые 165  
— — — отрицательной энергии 77  
— — — электромагнитные необыкновен-  
ные 174  
— — — обычные 174  
Время свободного пробега электро-  
на 21  
— — — иона 23  
— — — фотона 49  
Вязкость магнитная 162  
**G**идродинамика магнитная 157  
— — — плазмы без магнитного поля 59  
— — — бесстолкновительная 64  
— — — двухжидкостная 61  
— — — одножидкостная 62  
— — — в магнитном поле 157  
— — — бесстолкновительная 164  
— — — двухжидкостная 157  
**D**авление высокочастотное 34  
— — — магнитного поля 157  
Дебаевский радиус экранирования 9  
Декремент затухания колебаний (волн) электронный, плазменных 79  
— — — ионно-звуковых 75  
Динамо-механизм генерации магнит-  
ного поля в движущейся плазме 304  
Дисперсионная кривая 12  
Дистерсионное соотношение (упав-  
нение) колебаний плазмы 37  
Диффузии коэффициент Бома 249,  
257  
— — — в магнитном поле 199  
— — — в торoidalных ловушках 261  
Диффузии аномальной 249, 255, 257  
— — — «бакановская» 262  
— — — в пространстве скоростей (квази-  
линейная) 104  
— — — магнитного поля 162  
— — — неокласическая 262  
— — — плазмы в магнитном поле 199  
Диэлектрической проницаемости тен-  
зор 170  
Длина свободного пробега ионов 21  
— — — электронов 21  
Дрейф заряженной частицы в скре-  
щенных полях 14  
— — — магнитный 136  
**Z**аманическости плазмы критерий  
Запас устойчивости 227, 231  
Запертые частицы в торoidalных  
магнитных ловушках 205, 262  
Захват частиц волной 14  
**I**ндукционное рассеяние колеба-  
ний (волн) 109, 110

\* Изложение в этой книге следует в значительной степени содержанию и стилю [1—4].

Инкремент нарастания неустойчивости (см. Неустойчивости)  
 Ионизация 17  
 Ионизационное равновесие по Саха 18  
 Интеграл стояночный 55  
 — — в Ферме — Ландау 58  
 Квазилинейная теория 102  
 — — циклотронной неустойчивости 193  
 — — ионо-звуковой неустойчивости 279  
 — — дрейфовых неустойчивостей 254  
 Квазигравитальность 7  
 Квантовая плазма 16  
 Кинетическое уравнение для заряженных частиц 54  
 — — для волн 115  
 Коллапс плазменных волн 122  
 Коллективный метод ускорения 77  
 Комогорова — Обухова спектр турбулентности 117  
 Критерий замагниченности плазмы 155  
 — — Сайзма 228  
 — — устойчивости плазмы Крускала — Шаффранова 225  
 Кулоновский логарифм 21  
 Ландau затухание колебаний 12  
 Ларморовская орбита 134  
 — — частота 134  
 Ленгмюровская двойной слой 287  
 Ленгмюровская плазменная частота, электронов 10  
 — — — ионов 68  
**Магнитный момент заряженной частицы** 135  
 Магнитная зеркало 143  
 Магнитная ловушка 143  
 Магнитная термоэлектрическая 163  
 — Поверхности 209  
 Магнитная яма 221  
 Магнитное (бегатронное) излучение 271  
 Магнитного поля генерации (см. Диамагнитизм) 309  
 — — — за счет термосоды 309  
 Максимальное число 130  
 — — — для ионо-звукового сопротивления 130  
 — — — для магнитозвукового соотношения 295  
 Минимума Н<sub>z</sub> принципи 221  
 Точке силы 157

Неизотермическая плазма 9  
 Неокогасческая диффузия 262  
 Низкотемпературная плазма 19  
 Неустойчивость. Будкера — Бунтмана 76  
 — Драномонда — Розенблуга 274  
 — ионно-звуковая 75  
 — комичная 195  
 — модулиционная 119  
 — пучковая 15, 84  
 — расцветная параметрическая 91, 98  
 — шланговая 184  
 — циклотронная 180  
 — мазерная 182  
 — равновесия плазмы в магнитном поле 213  
 — — баллонная 230  
 — — гравитационная 231  
 — — дрейфовая 248  
 — — диссипативная 249  
 — — запертых частиц 253  
 — — примесная 252  
 — — температурная 251  
 — — токово-конвективная 235  
 — — жалобкова 218  
 — Крускала — Шварцишильда 215  
 — тиринг-Моды 236  
 «Олимпийцы» затухания 80

— магнитозауковкой 294  
 Стабилизация неустойчивости пучко-  
 вой 88  
 — прямолинейным полем 225  
 — широком 228  
 Степень ионизации 17  
 Температура электронов 9  
 — ионов 9  
 Теплообмен между электронами и  
 ионами 26  
 Тормозное излучение электронов 43  
 Трансформаторы электромагнитной  
 Волны в плазменную 43  
 Теплопроводность (температуру про-  
 водности) 57  
 ... Заманиченная 201  
 ... некласическая 265  
 Трансформации волна коэффициент 43  
 Турбулентность 99  
 ... ионо-звуковая 118  
 — слабая 100  
 Токамак 204  
 Убегания электронов эффект 30  
 Устойчивости плазмы Запас 227, 231  
 — критерий Крускала — Шаффра-  
 нова 225  
 — энергетический принцип ЭИ

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>1. ПЛАЗМА БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ</b>	6
§ 1.1. Общие сведения о плазме . . . . .	6
§ 1.2. Плазменные колебания . . . . .	6
§ 1.3. Классификация видов плазмы . . . . .	10
§ 1.4. Столкновения частиц в плазме . . . . .	15
§ 1.5. Явления переноса в плазме . . . . .	20
§ 1.6. Плазма в высокочастотном поле . . . . .	27
§ 1.7. Проникновение электромагнитной волны в плазму. Трансформация	31
<b>2. ПЛАЗМЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ</b> . . . . .	36
§ 1.8. Излучение плазмы . . . . .	43
§ 1.9. Кинетическое уравнение для плазмы . . . . .	53
§ 1.10. Гидродинамическое описание плазмы . . . . .	59
§ 1.11. Звук в плазме . . . . .	64
§ 1.12. Кинетическая теория волн в плазме . . . . .	69
§ 1.13. Кинетическая теория волн в плазме (Лентгировские колебания) . . . . .	78
§ 1.14. Пучковая неустойчивость . . . . .	84
§ 1.15. Параметрическая неустойчивость . . . . .	91
§ 1.16. Резонансное взаимодействие волн и частиц (квазилинейная теория) . . . . .	99
§ 1.17. Резонансное взаимодействие волн и частиц (индуцированное расщепление) . . . . .	109
§ 1.18. Нелинейное взаимодействие волн в слабой турбулентности . . . . .	114
§ 1.19. Модуляционная неустойчивость и колапс лентгировских волн . . . . .	119
§ 1.20. Стационарные немененные волны . . . . .	125
<b>2. ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ</b> . . . . .	134
§ 2.1. Движение заряженных частиц в магнитном поле . . . . .	134
§ 2.2. Примеры движения частиц в магнитном поле . . . . .	142
§ 2.3. Адабатические инварианты движения частиц в магнитном поле . . . . .	148
§ 2.4. Кинетическая теория плазмы в магнитном поле . . . . .	152
§ 2.5. Гидродинамика плазмы в магнитном поле . . . . .	156
§ 2.6. Колебания и волны в плазме с магнитным полем . . . . .	164
§ 2.7. Кинетическая теория волн в плазме . . . . .	177
§ 2.8. Взаимодействие волн с частицами плазмы в магнитном поле . . . . .	187
квазилинейная диффузия . . . . .	198
§ 2.9. Равновесие плазмы в магнитном поле . . . . .	198
§ 2.10. Примеры равновесия плазмы в магнитном поле. Токамак . . . . .	202
§ 2.11. Устойчивость граний плазмы в магнитном поле . . . . .	212
§ 2.12. Желобковая неустойчивость плазмы и энергетический принцип устойчивости в магнитной гидродинамике . . . . .	218
§ 2.13. Стабилизация магнитогидродинамических неустойчивостей в термо-заданных ловушках . . . . .	223
§ 2.14. Магнитогидродинамическая неустойчивость равновесия при конечной электропроводности . . . . .	231
§ 2.15. Неустойчивость тиринг-моды . . . . .	236
§ 2.16. «Прейфовая» неустойчивость плазмы . . . . .	244
§ 2.17. Микро неустойчивость плазмы и аномальная диффузия . . . . .	254
§ 2.18. Энергетический баланс плазмы в токамаке . . . . .	258
§ 2.19. Аномальное сопротивление в плазме и образование двойных слоев . . . . .	273
§ 2.20. Бесстолкновительные ударные волны . . . . .	290
§ 2.21. Генерация и усиление магнитного поля . . . . .	303
Список литературы . . . . .	312
Алфавитно-предметный указатель . . . . .	313

личные сорта частиц с различными скоростями и длинами свободного пробега, перенос тепла частицами разного сорта происходит не одинаково. Поэтому не случайно в плазме вводят разделное понятие об электронной и ионной теплопроводности (так же, как и диффузии).

Важнейшим свойством плазмы является способность перенести ток под действием электрического поля. Основные черты этого явления с точностью до тонких деталей можно разобрать, даже не прибегая к кинетической теории. Под действием электрического поля в плазме возникают направленные потоки заряженных частиц; иначе говоря, через плазму течет электрический ток. Если геометрические масштабы движения плазмы гораздо больше средней длины свободного пробега частиц, а характерное время движения значительно превышает среднее время свободного пробега, то столкновения должны играть здесь значительную роль.

При прохождении тока через плазму ионы, как правило, можно считать неподвижными. Ток создается потоком электронов. В простейшем случае, когда сила тока постоянна, должно устанавливаться равновесие между силой, с которой действует на электроны электрическое поле, и силой торможения, обусловленной столкновениями между электронами и ионами. Последняя равна среднему значению направленного импульса, теряемого электроном при столкновении с ионами. Электрон испытывает за  $t$  с  $v_i$ , где  $v$  — направлена скорость электрона. Следовательно, сила торможения равна  $m_e v_i^2$  и условие равновесия имеет вид

$$-eE = m_e v_i^2.$$

Плотность тока в плазме определяется выражением

$$\mathbf{j} = -nev_i \quad (1.19)$$

Следовательно,

$$\mathbf{j} = (ne^2/m_e v_i) E = (ne^2 \tau_{ei}/m_e) E. \quad (1.21)$$

Это закон Ома для плазмы.

Величина  $\sigma = (ne^2/m_e) \tau_{ei}$  — электропроводность плазмы. Поставляя в эту формулу выражение для  $\tau_{ei}$  и численные значения констант, получаем (при  $L_K = 15$ )

$$\sigma \approx 10^7 (T_e^\infty)^{3/2} e^{-1}. \quad (1.22)$$

Эта формула применима для полностью ионизованной плазмы с однозарядными ионами (водородная плазма). Заметим, что проводимость не зависит от плотности плазмы и с увеличением  $T_e$  быстро возрастает. При температуре около 100 млн. градусов электропроводность водородной плазмы должна более чем на порядок превосходить электропроводность меди при комнатной температуре. Присутствие многозарядных ионов значительно снижает электропроводность плазмы. В общем случае, если относительные

концентрации ионной компоненты плазмы с зарядами  $Z_1, Z_2, \dots$  равны  $a_1, a_2, \dots$ , приведенную выше формулу (1.22) для  $\sigma$  надо заменить следующей:

$$\sigma \approx 10^7 (\sum a_k Z_k / \sum a_k Z_k^2) (T_e^\infty)^{3/2}. \quad (1.23)$$

Для плазмы с очень высокой электронной температурой формулу (1.23) следует видоизменить. Для быстрого электрона эффективное сечение рассеяния  $\sigma_{ei}$  при слишком большом заряде иона становится значительно меньше геометрического сечения иона. В этом случае существенную роль в процессе рассеяния начинает играть взаимодействие электрона с внутренним атомным полем, в результате чего сечение рассеяния значительно увеличивается по сравнению с тем значением, которое получим, рассматривая ион как точечный заряд. При достаточно больших  $w_e$  эффективное сечение рассеяния электрона определяется уже не зарядом иона  $Z_a$ , а порядковым номером атома  $Z_a$ , возрастаая пропорционально  $Z_a^2$ .

В промежуточной области энергий, где происходит переход от зависимости  $\sigma_{ei} \sim Z_i^{2/3}$  к  $\sigma_{ei} \sim Z_i^{2/3}$ , эффективное сечение рассеяния падает медленнее, чем  $1/T_e^2$ . Поэтому электропроводность высокотемпературной плазмы при наличии в ней тяжелых компонент возрастает медленнее, чем по закону  $T_e^{3/2}$ , и оказывается очень чувствительной даже по отношению к малой доле примесей. В водородной плазме при  $T_e \sim 10^{10}$  вклад одного атома или иона ртути в процесс торможения электронов в несколько тысяч раз превышает вклад иона водорода. В слабоионизованной плазме формула (1.23) уже несправедлива, если электроны сталкиваются с нейтральными частицами чаще, чем с ионами. По физическому смыслу ясно, что в этом случае следует вернуться к выражению для проводимости (1.21), но вместо  $\tau_{ei}$  подставить туда  $\tau_{en}$  — среднее время столкновений электронов с нейтральными атомами и молекулами:

$$\sigma = ne^2 \tau_{en} / m_e. \quad (1.24)$$

Температурный ход коэффициентов электропроводности такой плазмы будет зависеть, в частности, от поведения эффективного сечения рассеяния электронов на нейтральных частичках. Однако в слабоионизованной плазме определяющим температурную зависимость фактором является степень ионизации. Действительно,  $\tau_{en} \sim 1/n_0$ , следовательно, пропорционально отношению  $n/n_0$ , значит, при небольших температурах ( $T \ll T_c$ )  $\sigma$  пропорционально сильно меняющемуся экспоненциальному множителю  $e^{-T/T_c}$ .

Рассмотрим вкратце применимость закона Ома для плазмы. Этот закон справедлив, если в плазме устанавливается равновесие между силами, действующими на электроны со стороны электрического поля, и силами торможения. Однако должно ли такое равновесие устанавливаться при любых условиях?

Сила торможения, испытываемая электроном в полностью ионизованной плазме, находящимся под действием ускоряющего поля, имеет тем меньшее значение, чем больше скорость электрона. Рас-

сматрим поведение электрона, принадлежащего к далекому ходу максвелловского распределения  $w_e \gg T_e$ . Приращение скорости, приобретаемое электроном в промежутке между двумя «столкновениями» с ионами, пропорционально  $T_e$  и, следовательно, растет как  $v^2$ . Поэтому если скорость теплового движения  $v$  у выбранного иона электрона достаточно велика, то приращение скорости и может оказаться того же порядка, что и  $v$ , или даже превысить ее. При такой ситуации нетривиальная упрощенная модель процесса, в которой считается, что электрон набирает на длине пробега относительно небольшую упорядоченную скорость и полностью теряет ее при мгновенном сильном ударе. В действительности ускорение и торможение электрона происходят одновременно. В то время как электрон приобретает упорядоченную скорость, резерфордовское рассеяние на ионах постепенно изменяет направление его движения. Электрическое поле стремится распрымить траекторию, в то время как взаимодействие с ионами изгибает ее. Если прирост упорядоченной составляющей скорости не компенсируется рассеянием, то равновесие сил не может установиться и электрон должен перейти в состояние непрерывного ускорения, при котором это энергия будет все время возрастать. С увеличением энергии сила торможения падает, и поэтому электрон, вовлеченный в процесс непрерывного разгона полем, будет продолжать ускоряться, пока он находится в области действия поля. В состояние разгона полем переходят те электроны плазмы, которые успевают набрать на длине свободного пробега дополнительную скорость  $v$ , превышающую их начальную скорость. Указанное условие разгона можно записать в виде

$$eE_{te}/m_e > v^2. \quad (1.25)$$

Поскольку  $\tau_{te}$  пропорционально  $v^2/n$ , то из (1.25) следует, что непрерывное ускорение происходит в том случае, когда  $Ew_e/n$  превышает некоторое граничное значение. Как нетрудно убедиться, для водородной плазмы это граничное значение порядка  $3 \cdot 10^{-2}$ , если  $E$  изменяется в вольтах на сантиметр, а  $w_e$  — в электронвольтах. В экспериментах с плазмой условие (1.25) обычно удовлетворяется только для электронов с энергией, во много раз превышающей  $T_e$ . Эти электроны составляют очень небольшую долю всей электронной компоненты. Поскольку в указанном случае основной вклад в электрический ток дают составляющие большинство тепловые электроны плазмы, закон Ома верен с высокой точностью.

Однако наряду с обычным током проводимости в плазме будет существовать дополнительный ток ускоренных электронов, для которого закон Ома не применим. При большом значении отношения  $E/n$  условие (1.25) будет выполняться также и для электронов со средней тепловой скоростью. В этом случае в процессе непрерывного ускорения может перейти основная часть электронной компоненты плазмы, и тогда закон Ома должен резко нарушиться, так как, вообще говоря, мы имеем дело с нестационарным процессом ускорения электронов. Расчет показывает, что процесс элек-

тронного разгона заметно развивается тогда, когда отношение среднего значения  $v$  для плазмы в целом к средней тепловой скорости электронов становится больше одной десятой. Отношение  $v/v_e$  растет пропорционально  $v_e^2$ , и поэтому если для электронов со средней тепловой энергией  $w_e = T_e u/v_e = 0.1$ , то для электронов с энергией  $10T_e$  и сравнивается по значению с  $v_e$ , и такие электроны оказываются близкими к порогу непрерывного ускорения. Переход электронов в состояние непрерывного ускорения можно наблюдать в колцевых электрических разрядах, когда плазма обрамляется внутри торoidalной камеры и ускоряется вихревым электрическим полем. В экспериментах такого рода при некоторых условиях действительно наблюдаются разгон определенной (относительно небольшой) группы электронов плазмы до очень высокой энергии при сравнительно небольших напряжениях на плазменном витке.

Более глубокий анализ поведения потоков разогнанных электронов показывает, что такие потоки способны возбуждать и раскачивать в плазме различные колебания и волны, передавая им всю энергию или заметную часть ее. В результате этого появляется новый механизм торможения ускоренных частиц, прекращающий разгон после того, как электроны плазмы наберут определенную порцию избыточной энергии направленного движения. Этот автоматический механизм не позволяет всем электронам плазмы перейти в состояние непрерывного ускорения. Ясно, что электропроводность плазмы в указанном случае нельзя вычислить по формуле (1.22) и что торможение электронов при взаимодействии с волнами должно приводить к увеличению сопротивления. К настоящему времени накоплен большой экспериментальный материал по аномалии электропроводности плазмы в сильном электрическом поле. Однако для его анализа требуется привлекать более глубокие и детальные представления нелинейной теории плазменных переходных свойств (см. § 2.19). При высокой плотности плазмы и относительно небольшой напряженности электрического поля найденные экспериментально значения в пределах погрешностей измерений совпадают со значениями, определенными по формуле (1.23).

### § 1.6. Плазма в высокочастотном поле

Своебразные свойства плазмы выражаются очень отчетливо в том случае, когда рассматривается ее поведение под действием электрического поля высокой частоты. В этих условиях существенную роль начинает играть механическая инерция электронов. Рассмотрим простейший случай. Пусть в плазме действует электрическое поле  $E$ , напряженность которого равна  $E_0 \exp(-i\omega t)$ . Если частота настолько велика, что за время одного периода изменения поля  $U$  отдельного электрона вероятность столкновения с ионами достаточно мала, то, рассматривая движение электронов, можно в первом приближении пренебречь силой торможения.

Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} = -eE_0 \exp(-i\omega t), \quad (1.26)$$

где  $x$  — координата в направлении электрического поля. Интегрируя (1.26), получаем

$$u_0 = \dot{x} = (eE_0 t + m\omega) \exp(-i\omega t). \quad (1.27)$$

Полученное соотношение можно записать в следующей форме:

$$E = (-im_e\omega/mc^2), \quad (1.29)$$

Таким образом, высокочастотное напряжение сдвинуто по фазе на  $90^\circ$  назад по сравнению с током. Это означает, что в высокочастотном поле плазма обладает собственной «немагнитной» индуктивностью, которая обусловлена энергией электронов. Применяя низких концентраций немагнитная индуктивность плазменного проводника может превосходить его обычную («магнитную») индуктивность. Выясним условия, при которых это может иметь место. Для однородного цилиндрического плазменного проводника с радиусом  $a$  магнитная индуктивность на единицу длины в единицах СГСЭ равна

$$(1/\omega) |E/J| = (1/m^2\omega) |E/J|. \quad (1.30)$$

Обычная индуктивность (коэффициент самоиндукции) в единицах СГСМ для проводника длиной 1 см порядка единицы, в СГЭ она составляет величину порядка  $1/c^2$ . Следовательно, для плазмы отношение обычной индуктивности к немагнитной индуктивности будет порядка  $\Pi e/m_ec^2 \approx 3 \cdot 10^{-13}$ , где  $\Pi$  — число электронов на 1 см плазменного проводника. Эта величина имеет очень простой смысл. Она равна полному числу электронов, которые находятся внутри отрезка плазменного проводника длиной, равной классическому радиусу  $r_0 = e/m_ec^2$ . Формулу (1.29), связывающую плотность тока с напряженностью высокочастотного поля, можно обобщить, если учесть торможение электронов, вызванное столкновениями. В этом случае получаем

$$E = j((1/\sigma) - i\omega L_e). \quad (4.31)$$

Здесь  $I_{\text{дем}} = n_e / ne^2$  — немагнитная индуктивность. Такой характер движения электронов и переносимого ими тока под действием высокочастотного электрического поля играет решающую роль в формировании диэлектрических свойств плазмы. В рассмотренном выше простейшем случае, когда в плазме существует электрическое поле  $E_0 \exp(-i\omega t)$ , ускорение электрона  $\ddot{x}$  и его скорость  $v$  определяются выражениями (1.26) и (1.27). Интегрируя по времени еще раз, находим смещение

(1.32)

Из (1.32) следует, что смещение электрона сдвинуто по фазе относительно действующей силы ( $F = -eE$ ) на  $180^\circ$ . Это случай, противоположный тому, с которым мы встречаемся, изучая поведение обычных твердых диэлектриков. При свиге по фазе на  $180^\circ$  между силой, действующей на заряд, и его смещением поляризация вещества направлена против поля и, следовательно, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon < 1$ . Диэлектрическую проницаемость можно выразить через величину электрического момента елиптицы обь-  
екта  $P$ , а также константу Фаренгейта  $\kappa$ :

и — ионами, (1.54)

$\delta = 1 - \alpha^2 / \beta \alpha^2$  (135)

глазме не могут распространяться электротоки меньшей силы, чем в стекле.

каза чель препомлснн  $N = \sqrt{\varepsilon} = (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$ , а волновое число  $k = 2\pi/\beta$ , равнно  $k = N_0/c = (\varepsilon/c)(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$ .

Дисперсионная кривая для электромагнитных волн приведена на рис. 1.5. Для электро-

стремительно-однородной плазме без магнитного поля, распределенной в пространстве.

Ландау». Это связано с тем, что фазовая скорость волн  $\omega/k = c/\sqrt{1 - \alpha^2 n/(n^2)^{1/2}}$  превышает

скорость света в вакууме и, следовательно, нет частиц, которые могли бы находиться в ре-

запасов, — какими возможностями, гигантским единицамъ очевидный механизм затухания электрическихъ колебаний.

можение электронов, вызванное столкновениями. В формуле для диэлектрической прони-

паемости учет этого эффекта дает минимум частич. Действительно, если в уравнении дви- рис. 15. Дисторсионная кривая электронной машины вспомогательной

плязма      ячесів      волны      ионов      электронов      ядро

то для смещения  $x$  получаем

Используя (1.33) и (1.34), находим

$$\varepsilon = -\omega_p^2 / (\omega + i\kappa_1). \quad (1.36)$$

ся неравенство  $\omega \gg \nu_{ei}$ . Действительно, для нижней границы частот

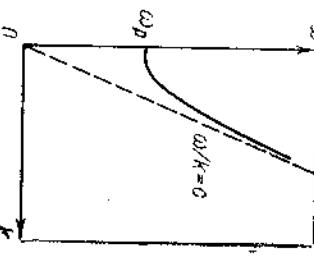


Рис. 1.5. Дисперсионная кривая электромагнитных волн в плазме

$\omega \approx \omega_p$ , оно эквивалентно условию  $\omega_{pT_{ei}} \gg 1$  (условию идеальности плазмы  $nT^3 \gg 1$ , см. § 1.3). По этой причине формулу (1.36) с достаточною степенью точности можно представить двумя первыми членами разложения в ряд по величине  $v_{ei}/\omega$ :

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2 + i\omega_{pT_{ei}}/\omega^3, \quad (1.36a)$$

До сих пор мы рассматривали движение электронов в электрическом поле волны в линейном по амплитуде приближении. В этом приближении электроны совершают быстрые колебания в направлении электрического поля со скоростью  $v$ , определяемой соотношением (1.27). В следующем порядке по амплитуде усредненный эффект квадрата быстрых осцилляций приводит для электромагнитной волны с пространственно неоднородной амплитудой к вытеснению из областей, занятых электромагнитным полем.

Физику такого вытеснения можно объяснить следующим образом. Электромагнитное поле, вызывая высокочастотные колебания электронов со скоростью  $v(t)$ , создает как бы дополнительное высокочастотное давление  $\rho_{e,T} \sim n m_e v^2$ , в результате чего электроны плазмы стремятся перемещаться к минимуму поля.

Рассмотрим для определенности стоячую электромагнитную волну. В такой волне электрическое и магнитное поля лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению неоднородности (ось  $z$ ):

$$E_x = (1/2) E_z(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}$$

$$H_y = (1/2) H_z(z) \exp(-i\omega t) \pm \text{к. с.}$$

Здесь к. с. означает слагаемое, комплексно сопряженное первому.

$$dE_x/dz = i(\omega/c) H_y,$$

вытекающим из уравнения Максвелла:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{H} / \partial t.$$

В соответствии со сделанными выше замечаниями электроны плазмы в волне конечной амплитуды участвуют в двух движениях — быстрых колебаниях в направлении электрического поля и медленном смещении вдоль неоднородности:

$$\mathbf{r} = (1/2) \mathbf{x} \exp(-i\omega t) + \mathbf{z}(t) + \text{к. с.}$$

Уравнение движения электронов вдоль оси  $z$  имеет вид

$$m_e \ddot{\mathbf{z}} = -(e/c) u H_y = -(1/4) (e/c) (u \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}) \times$$

$$\times (H_y \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}). \quad (1.37)$$

В последней формуле мы учили, что скорость электронов — вещественная величина, и представили ее в виде

$$u = (1/2) u(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.},$$

где величина  $u(z)$  определяется формулой (1.27). Проведя вправой части (1.37) усреднение по быстрым колебаниям, получим сле-

дующее уравнение для медленного движения электронов по оси  $z$ :

$$m_e \ddot{\mathbf{z}} = -(e^2/4m_e \omega^2) (E \partial E^* / \partial z + \text{к. с.}) = \\ = -(e^2/4m_e \omega^2) \partial |E|^2 / \partial z. \quad (1.38)$$

Это уравнение означает, что в поле электромагнитной волны с пространственно неоднородной амплитудой на электроны плазмы действует сила высокочастотного давления, направленная против гradienta электрического поля.

$$F_z = -\partial \rho_{e,T} / \partial z.$$

Высокочастотное давление, создаваемое электромагнитной волной, равно

$$\rho_{e,T} = (e^2 n / 4m_e \omega^2) E^2(z). \quad (1.40)$$

Эта формула получена для стоячей монохроматической электромагнитной волны, однако в действительности она имеет достаточно универсальный характер. В частности, такая же формула для высокочастотного давления получается при рассмотрении движения электронов в неоднородном продольном электрическом поле конечной амплитуды:  $E_z = (1/2) E_z(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}$  Пусть частицы колеблются около точки  $z_0$  в поле с амплитудой, возрастающей в сторону увеличения  $z$ . При колебательном движении сила направлена против смещения. Поэтому когда электрон смещается направо, на него действует возвращающая сила большей величины, чем при смещении налево. В итоге возникает результирующая сила, действующая в сторону уменьшения  $z$ , т. е. в направлении, обратном градиенту электрического поля.

Ограничиваясь членами, квадратичными по амплитуде поля, действующую на электроны силу можно представить в виде

$$F = -(e/2) [E \exp(-i\omega t) + \\ + \delta z (\partial E / \partial z) \exp(-i\omega t)] + \text{к. с.}$$

Соответственно этому движение электронов по  $z$  представляется в виде суммы быстрых колебаний

$$\delta z = -(eE / 2m_e \omega^2) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.} \quad (1.41)$$

и медленного смещения под действием силы, усредненной по быстрым осцилляциям:

$$\langle F_z \rangle = -(e/2) \langle \delta z [\partial E_z / \partial z] \exp(-i\omega t) + \text{к. с.} \rangle.$$

Подставляя в правую часть этого соотношения  $\delta z$  и проводя усреднение по быстрым колебаниям, вновь приDEM к формуле (1.40) для силы высокочастотного давления. Эта сила обращается в нуль для бегущей плоской волны, во всех других случаях она отлична от нуля и приводит к вытеснению плазмы из областей, занятых высокочастотным полем. По этой причине для удержания плотной