Численное интегрирование уравнений геодезических в поле Шварцшильда в различных системах отсчета

В.Н. Строков [1], А.А. Попов [1], Ш.Г. Хлгатян [2]

[1] Астрокосмический центр ФИАН
[2] Московский физико-технический институт

strokov@asc.rssi.ru

Аннотация

Мы изучали, как выбор системы отсчета, в которой записываются уравнения движения фотона в гравитационном поле черной дыры, влияет на качество численного решения системы. Мы выяснили, что так называемые координаты Эддингтона–Финкельштейна улучшают свойства системы при численном счете методами Рунге–Кутты 2-го и 4-го порядков.

Введение

Благодаря развитию методов радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (VLBI) все более реальной выглядит возможность наблюдений ближайших окрестностей кандидатов в сверхмассивные черные дыры. Данная задача решается на сети телескопов Event Horizon Telescope [Doeleman, 2010], а также входит в список задач проекта «Миллиметрон» [*Обзор научных задач обсерватории Миллиметрон*, 2014]. Для интерпретации подобных наблюдений используются теоретические модели так называемых теней черных дыр — визуальных очертаний, которые приобретает расположенный рядом с черной дырой источник после прохождения света в гравитационном поле самой черной дыры. Такие тени моделируют численно путем прямого расчета множества ($\sim 10^9$) траекторий отдельных фотонов (см. статью [Dexter, 2016] и ссылки в ней).

Эффективный потенциал, в котором движутся фотоны таков, что при определенных начальных условиях уравнения движения фотона (уравнения геодезических) представляют собой численно жесткую систему. А именно, в метрике черной дыры Шварцшильда существуют траектории, которые многократно “наматываются” вокруг черной дыры при почти неизменном радиусе [Новиков, Фролов, 1986], а затем либо уходят на бесконечность, либо падают в саму черную дыру. Чтобы правильно смоделировать такую траекторию, необходимо выбирать шаг, который позволит проследить медленное изменение радиуса. Обычно в таких случаях применяются специальные методы, в частности, методы Гира [Gear, 1971] с переменным шагом.

Постановка задачи

В данной работе нами был исследован вопрос: возможно ли записать метрику Шварцшильда в такой системе отсчета, в которой бы решаемая численно система уравнений стала нежесткой (так чтобы можно было бы применять более простые численные схемы с постоянным шагом)? Оказывается, что координаты Эддингтона–Финкельштейна, построенные на радиально падающих фотонах [Новиков, Фролов, 1986], несколько улучшают свойства системы уравнений при численном счете.

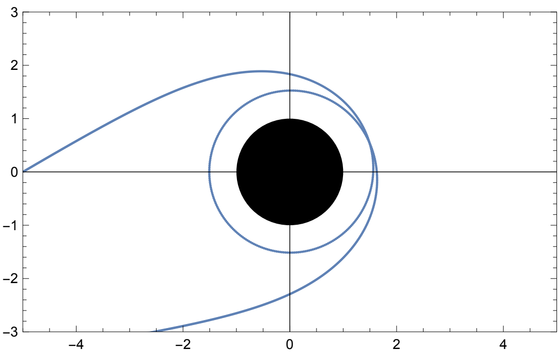

Рис. 1: Пример “наматывающейся” световой траектории. Всего фотон сделал два витка вокруг черной дыры, причем их радиусы отличаются на $\sim 0{,}01$. Черным кругом показан размер горизонта черной дыры.

Координаты кривизны и Эддингтона–Финкельштейна

Итак, метрика Шварцшильда традиционно представляется в координатах кривизны $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, в которых она имеет вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{1}{r}} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{1}$$

где r и t измеряются в единицах удвоенной массы черной дыры $2M$ (мы используем систему единиц $G = c = 1$; G — гравитационная постоянная, c — скорость света). Соответствующие уравнения геодезических выписываются стандартным образом [Ландау, Лифшиц, 1988] (точка обозначает производную по аффинному параметру):

$$\begin{aligned}
\dot t &= u^t\\
\dot r &= u^r\\
\dot\theta &= u^\theta\\
\dot\phi &= u^\phi\\
\dot{u}^t &= \frac{u^t u^r}{r - r^2}\\
\dot{u}^r &= -\frac{(r-1)\left(u^t\right)^2}{2r^3} + \frac{(u^r)^2}{2(r-1)r} + (r-1)\left(u^\theta\right)^2 + (r-1)\left(u^\phi\right)^2 \sin^2\theta\\
\dot{u}^\theta &= \left(u^\phi\right)^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{2u^r u^\theta}{r}\\
\dot{u}^\phi &= -\frac{2u^\phi(ru^\theta\cot\theta + u^r)}{r}
\end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь координаты Эддингтона–Финкельштейна (V, r, θ, φ), в которых t заменено на V с помощью преобразования $t = -r - \ln(r-1) + V$. С физической точки зрения такая связь между t и r при постоянном V задает траекторию радиально падающего фотона. Приведем выражение для интервала и уравнения в этих координатах:

$$ds^2 = dV^2\left(1 - \frac{1}{r}\right) - 2dr\, dV - r^2(d\theta^2 + d\phi^2 \sin^2\theta)\,. \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\dot V &= w^V\\
\dot r &= w^r\\
\dot\theta &= w^\theta\\
\dot\phi &= w^\phi\\
\dot{w}^V &= -\frac{\left(w^V\right)^2}{2r^2} + r\left(w^\theta\right)^2 + r\left(w^\phi\right)^2 \sin^2\theta\\
\dot{w}^r &= -\frac{(r-1)\left(w^V\right)^2}{2r^3} + \frac{w^V w^r}{r^2} + (r-1)\left(w^\theta\right)^2 + (r-1)\left(w^\phi\right)^2 \sin^2\theta\\
\dot{w}^\theta &= \left(w^\phi\right)^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{2w^r w^\theta}{r}\\
\dot{w}^\phi &= -\frac{2w^\phi(rw^\theta\cot\theta + w^r)}{r}
\end{aligned} \tag{4}$$

Результаты

Мы сравнили, насколько эффективными являются классические методы Рунге–Кутты 2-го и 4-го порядков для решения полученных систем ОДУ, и пришли к следующим результатам. Во-первых, за траекториями с одним витком в системе (4) удается проследить уже на уровне метода Рунге–Кутты 2-го порядка, тогда как аналогичная схема в системе (2) расходится. Во-вторых, на траекториях с двумя намотками в системе (2) при недостаточно малом шаге в методе Рунге–Кутта 4-го порядка меняется сам тип траектории: вместо ожидаемого ухода на бесконечность фотон падает на черную дыру. Таким образом, будучи записанными в координатах Эддингтона–Финкельштейна, уравнения геодезических лучше поддаются численному счету методами Рунге–Кутты 2-го и 4-го порядков

Список литературы

Dexter J. A public code for general relativistic, polarised radiative transfer around spinning black holes // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2016. — Т. 462, № 1. — С. 115—136.

Doeleman S. Building an event horizon telescope: (sub)mm VLBI in the ALMA era // Proceedings of Science (10th EVN Symposium). — 2010. — Т. 53.

Gear G. W. Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. — Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1971.

Ландау Л., Лифшиц Е. М. Теория поля. — Москва : Наука, 1988.

Новиков И. Д., Фролов В. П. Физика черных дыр. — Москва : Наука, 1986.

Обзор научных задач обсерватории Миллиметрон / Н. С. Кардашев [и др.] // Успехи Физических Наук. — 2014. — Т. 184, № 12. — С. 1319—1352.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 16-32-00740 и 15-02-00554, а также научной школы НШ-6595.2016.2, финансируемой грантом Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ.