

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## К проблеме граничных условий для уравнений смешанного типа, возникающих при описании астрофизических трансзвуковых течений

В.С. Бескин, Т.И. Халилов

На примере точно решаемой задачи показано, что число граничных условий, необходимое для определения трансзвукового гидродинамического течения вблизи так называемой "нестандартной" особой точки, не зависит от того, проходит или не проходит через эту точку сепаратрисная характеристика. Тем самым подвергнуто сомнению достаточно популярное утверждение, согласно которому критическая поверхность, условие регулярности на которой определяет структуру течения, в общем случае совпадает с поверхностью сепаратрисных характеристик, а не со звуковой поверхностью.

**Ключевые слова:** гидродинамика

PACS number: 95.30.Lz

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2022.07.039217>

Бурное развитие аналитических исследований сильно замагниченных течений, которые проводились в 1970–1990-х годах [1–7] (они были связаны с необходимостью определения структуры течения вещества в окрестности компактных астрофизических объектов), неизбежно потребовало вернуться к вопросам, лежащим в самом основании гидродинамического подхода. В частности, это было связано с тем, что для астрофизических приложений было необходимо исследовать трансзвуковую версию гидродинамических уравнений, которая неизбежно возникает в астрофизических задачах.

Действительно, даже в простейших сферически-симметричных гидродинамических моделях (аккреция на гравитирующий центр Бонди [8], солнечный ветер Паркера [9]) необходимо учитывать критические условия на звуковой поверхности  $v = c_s$ . В этом случае задача требует нахождения трёх неизвестных величин (двух любых термодинамических функций, например плотности  $\rho(r)$  и скорости звука  $c_s(r)$ , а также радиальной компоненты скорости  $v_r(r)$ ) как функций радиуса  $r$ . При этом три определяющих структуру течения скалярных уравнения (уравнение непрерывности, радиальная компонента уравнения Эйлера и уравнение энергии) легко интегрируются, что приводит к сохранению потока  $\Phi = 4\pi\rho v_r r^2$ , нерелятивистского интеграла Бернул-

ли  $E_n = v_r^2/2 + w(\rho, s) + \varphi_g$  и энтропии  $s$ . Здесь  $w(\rho, s)$  — энтальпия, а  $\varphi_g(r)$  — гравитационный потенциал. Задача, как мы видим, является трёхпараметрической. Однако соотношение

$$\frac{r}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{2v_r^2 + \varphi_g}{v_r^2 - c_s^2} \quad (1)$$

для трансзвуковых течений требует выполнения дополнительного условия — равенства нулю числителя на звуковой поверхности  $v_r = c_s$ . В результате число необходимых граничных условий оказывается на единицу меньше, чем число уравнений и неизвестных. Обычно в качестве таких граничных условий выбирают плотность и скорость звука на бесконечности (для аккреции Бонди) или на поверхности звезды (для солнечного ветра). Подчеркнём, что в обоих случаях граничные условия ставятся в дозвуковой области.

Что же касается многомерных трансзвуковых течений, то для них, как известно, не существует общих методов построения решения прямой задачи, т.е., например, задачи определения структуры течения по известной границе в области трансзвукового течения или же по граничным условиям на некоторой поверхности в области дозвукового течения [10–12], в том числе и для стационарных гидродинамических уравнений, зависящих лишь от двух пространственных координат, рассмотрением которых мы здесь и ограничимся. Такая неопределённость, неизбежно возникавшая снова и снова при решении конкретных задач, явно или неявно присутствовала во всех работах этого направления.

Рассмотрим, например, хрестоматийный случай плоского потенциального течения, для которого можно ввести потенциал  $\phi(x, y)$ , определяющий скорость течения как  $\mathbf{v} = \nabla\phi$  (см. [12], гл. XII). В этом случае уравнения

**В.С. Бескин** <sup>(1,2,\*), Т.И. Халилов</sup> <sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,  
Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация

<sup>(2)</sup> Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет),  
Институтский пер. 9, 141701 Долгопрудный, Московская обл.,  
Российская Федерация

E-mail: <sup>(\*)</sup> beskin@lpi.ru

Статья поступила 2 февраля 2022 г., после доработки 4 июля 2022 г.

гидродинамики можно свести к одному уравнению второго порядка:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \frac{(\phi_y)^2 \phi_{xx} - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + (\phi_x)^2 \phi_{yy}}{(\nabla\phi)^2 D} = 0, \quad (2)$$

где

$$D = -1 + \frac{c_s^2}{v^2}, \quad (3)$$

а индексы обозначают частные производные. Приведем его к каноническому виду  $A\phi_{xx} + 2B\phi_{xy} + C\phi_{yy} = 0$ , получаем  $AC - B^2 = D(D + 1)$ , так что уравнение меняется от эллиптического в дозвуковой области до гиперболического в сверхзвуковой области.

Для нас, однако, здесь будет важно то, что для замыкания этого уравнения, как хорошо известно, нужно ещё воспользоваться интегралом Бернулли  $E_n = (\nabla\phi)^2/2 + w(c_s, s)$ , чтобы выразить скорость звука  $c_s$ , входящую в уравнение (2), через неизвестную функцию  $\phi$ . Для этого, как мы видим, необходимо, чтобы граничные условия задавали ещё два интеграла движения  $E_n$  и  $s$ . Для дозвукового течения трудности не возникает, так как для полного определения решения нам нужно задать две термодинамические функции, а также две компоненты скорости (т.е. потенциал  $\phi$  и его производную). Эти четыре граничных условия соответствуют четырём скалярным уравнениям (непрерывности, двум компонентам уравнения Эйлера и уравнению энергии), полностью определяющим структуру течения.

Однако если мы попытаемся в такой постановке определить структуру трансзвукового течения, для которого, как мы уже видели, необходимо наложить дополнительное критическое условие (локализация которого, кстати, нам заранее неизвестна!), то достаточно будет ограничиться лишь тремя граничными условиями — как и в простейших случаях, рассмотренных выше, на одно меньше по сравнению с задачей для дозвукового течения. Фундаментальная же сложность здесь состоит в том, что в этом случае граничные условия не позволяют определить интеграл Бернулли, так как он зависит от всех четырёх величин. Поэтому неопределённым окажется само уравнение (2), явно содержащее величину  $E_n$ .

Это утверждение в полной мере относится и к осесимметричным течениям, для которых уже пять алгебраических уравнений (непрерывности, три компоненты уравнения Эйлера и уравнение энергии) сводятся к трём интегралам движения (добавляется интеграл удельного углового момента  $L_n = rv_\phi$ ) и уравнению второго порядка на потенциал  $\Phi(r, \theta)$  [13]

$$\begin{aligned} & -r^2 \sin^2 \theta \nabla_k \left( \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \nabla^k \Phi \right) - \frac{\nabla^i \Phi \nabla^k \Phi \nabla_i \nabla_k \Phi}{(\nabla\Phi)^2 D} + \\ & + \frac{\nabla(r^2 \sin^2 \theta) \nabla\Phi}{2r^2 \sin^2 \theta D} - 4\pi\rho^2 r^2 \sin^2 \theta \frac{\nabla\varphi_g \nabla\Phi}{D(\nabla\Phi)^2} - \\ & - 4\pi^2 \rho^2 \frac{D+1}{D} L_n \frac{dL_n}{d\Phi} + 2\pi^2 \rho^2 \frac{\nabla(r^2 \sin^2 \theta) \nabla\Phi}{r^2 \sin^2 \theta (\nabla\Phi)^2 D} L_n^2 + \\ & + 4\pi^2 \rho^2 r^2 \sin^2 \theta \frac{D+1}{D} \frac{dE_n}{d\Phi} - \\ & - 4\pi^2 \rho^2 r^2 \sin^2 \theta \left[ \frac{D+1}{D} \frac{T}{m_p} + \frac{1}{D\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_\rho \right] \frac{ds}{d\Phi} = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

определяющему поток  $\rho\mathbf{v}$ ,

$$\rho\mathbf{v} = \frac{\nabla\Phi \times \mathbf{e}_\phi}{2\pi r \sin \theta}. \quad (5)$$

Уравнение (4) представляет собой обобщение уравнения Грэда – Шафранова [14, 15] на случай ненулевых скоростей. Несмотря на громоздкий вид (4), ключевая характеристика  $AC - B^2$  по-прежнему равна  $D(D + 1)$ , так что это уравнение также меняется от эллиптического к гиперболическому на звуковой поверхности.

В дальнейшем нам понадобится ещё одно важное свойство трансзвуковых течений, подробно исследованное для плоского потенциального течения, т.е. для уравнения (2); это свойство, естественно, имеет место и для осесимметричного течения, т.е. для уравнения (4). Оно касается так называемой особой точки, где линии тока перпендикулярны звуковой поверхности. Анализ, проведённый на основе точно решаемой задачи Трикоми, к которой вблизи этой точки сводятся уравнения (2) и (4), показал, что течение аналитично вблизи этой точки [16]. Более того, задача точно решается, если задать граничное условие не в дозвуковой области, а на линии тока, проходящей через эту особую точку:

$$v_x(x) = c_* + k(x - x_*). \quad (6)$$

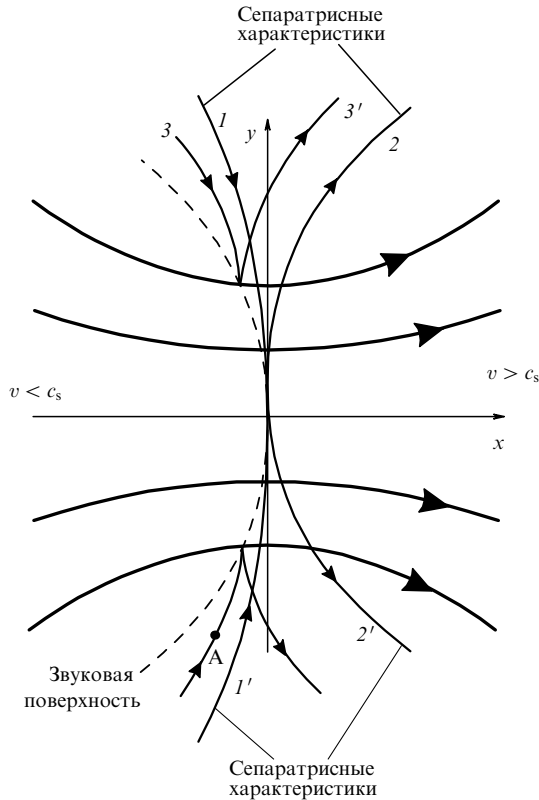
Для политропного уравнения состояния  $P \propto \rho^\Gamma$  ( $\Gamma = \text{const}$ ) вблизи особой точки решение уравнения (2) имеет вид [12]

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & c_*(x - x_*) + \frac{k(x - x_*)^2}{2} + \\ & + \frac{k^2(\Gamma + 1)}{2c_*} (x - x_*)y^2 + \frac{k^3(\Gamma + 1)^2}{24c_*^2} y^4. \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь скорость звука на звуковой поверхности  $c_*$  выражается через интеграл Бернулли как  $E_n = c_*^2/2 + w(c_*, s)$ .

Анализ этого решения показал, что в большинстве точек на звуковой поверхности, в которых линии тока и звуковая поверхность не перпендикулярны, две ветви характеристик направлены в разные стороны (линии 3 и 3' на рис. 1). Однако в особой точке существуют уже две характеристики, касающиеся звуковой поверхности и продолжающиеся в том же направлении (характеристика 1 переходит в характеристику 2', а характеристика 1' — в характеристику 2).

Надо сказать, что на начальном этапе работ, посвящённых астрофизической тематике, вопросу о количестве граничных условий не уделялось достаточного внимания. Дело в том, что имел место определённый отрыв этих работ от ведущихся с начала XX века интенсивных исследований в этой области [16, 17]. В частности, обобщение уравнения Грэда – Шафранова на случай ненулевых скоростей плазмы, впервые полученное Л.С. Соловьёвым в 1963 г. [18], фактически было вновь выполнено в 1970-х годах в работах [2, 3, 6]. Так было и в случае магниторотационной неустойчивости, найденной ещё в 1950-х годах Е.П. Велиховым [19] и С. Чандрасекаром [20], но для астрофизических приложений переоткрытых С. Балбусом и Дж. Холи только в 1991 г. [21]. Неудивительно поэтому, что в тех случаях, когда вопросы корректной постановки задачи выходили на передний



**Рис. 1.** Классическая особая точка трансзвукового течения, соответствующая сходящимся линиям тока (жирные линии) на звуковой поверхности (штриховая линия). Показаны также характеристики в гиперболической области течения, в том числе и две сепаратрисные характеристики, касающиеся звуковой поверхности в особой точке. Гиперболическая область между звуковой поверхностью и сепаратрисной характеристикой (например, точка А) влияет на дозвуковую область вдоль характеристик, заканчивающихся на звуковой поверхности.

план, в астрофизической литературе применялись в целом упрощённые подходы, основанные в значительной степени на эвристических соображениях.

Ещё одну злую шутку сыграло то, что для уравнения (4) довольно быстро было найдено большое семейство автомодельных подстановок вида  $\Phi(r, \theta) = r^\alpha \Theta(\theta)$  [4, 22–29], приводящих к обыкновенному дифференциальному уравнению  $Kd^2\Theta/d\theta^2 + \dots = 0$ , многие ключевые свойства которого существенно отличались от свойств двумерных уравнений. В частности, особенность (условие  $K = 0$  для коэффициента при старшей производной) имела место не на звуковой поверхности (в магнитной гидродинамике — не на быстрой и медленной магнито-звуковых поверхностях), а как раз на сепаратрисной характеристике. На основании этого важного свойства (которое, впрочем, было хорошо известно в классической гидродинамике [11]) было сформулировано принятое сейчас большинством исследователей утверждение, что именно сепаратрисная характеристика, а не звуковая поверхность является особой поверхностью, критические условия на которой и определяют единственное решение [27, 30].

Здесь, безусловно, следует сделать несколько уточнений. Прежде всего, мы не подвергаем сомнению само количество граничных условий, необходимое для определения структуры трансзвукового течения. В общем случае число граничных условий  $b$  может быть записано

в виде [13]

$$b = 2 + i - s', \quad (8)$$

так как для уравнения второго порядка на потенциал  $\phi(x, y)$  или же на потенциал  $\Phi(r, \theta)$  нужно зафиксировать  $i$  интегралов движения, а  $s'$  критических условий (отсутствий особенностей) будут играть роль дополнительных связей, фиксирующих структуру течения. В случае идеальной гидродинамики, когда существует только одна критическая поверхность ( $s' = 1$ ), мы получаем  $b = 4$  при необходимых трёх интегралах движения (интеграл Бернулли  $E_n$ , удельный угловой момент  $L_n$  и энтропия  $s$ ). Отметим кстати, что формула (8) неприменима для сферически-симметричного течения, так как в данном случае нет необходимости решать уравнение второго порядка. Сферически-симметричное течение является вырожденным ещё и потому, что звуковая поверхность совпадает с сепаратрисной характеристикой.

Далее, не подвергается сомнению и тот факт, что именно поверхность сепаратрисных характеристик, а не звуковая поверхность определяет границу влияния на решение в дозвуковой области. Как показано на рис. 1, гиперболическая область между звуковой поверхностью и сепаратрисными характеристиками оказывает воздействие на дозвуковую область вдоль характеристик, заканчивающихся на звуковой поверхности. С этим свойством фактически и была связана аргументация в пользу особенности на сепаратрисной характеристике.

Действительно, предположим, что два условия на некоторой границе в дозвуковой области вместе с условием регуляризации решения на звуковой поверхности полностью определяют решение вверх по течению от критической поверхности. Но по утверждению, например, работы [30], это приводит к противоречию, так как сигналы, которые могут распространяться от возмущений между критической и сепаратрисной поверхностями, будут влиять на решение в области, ограниченной критической поверхностью, и, следовательно, полученное решение не будет единственным. Проще говоря, предполагая, что единственное решение для гидродинамического течения построено, в область между звуковой поверхностью и сепаратрисными характеристиками вносится возмущение ("камень" в точке А, изменение границы течения в сверхзвуковой области), которое неизбежно изменит течение и в дозвуковой области.

Как мы видим, в качестве основного аргумента в пользу особенности не на звуковой поверхности, а на сепаратрисной характеристике выступает не существование самой особенности, а соображение, связанное с причинностью. И это тоже интересный момент. На сепаратрисной характеристике нельзя сформулировать никакого критического условия, в то время как на звуковой поверхности в производной плотности  $\rho$  по координатам,

$$\nabla_i \rho = \frac{N_i}{D}, \quad (9)$$

должны быть выполнены условия  $N_i = 0$ . И во всех случаях, когда были построены точные решения конкретных задач [1, 31–36] (все они строились как малые возмущения известных сферически-симметричных течений, когда само положение звуковой поверхности было известно), именно условие на звуковой поверхности  $N_r = 0$  и определяло структуру течения. Правда, во всех

этих случаях, благодаря малости возмущения сферического течения, в нулевом приближении сепаратрисная характеристика совпадала со звуковой поверхностью. Поэтому данное обстоятельство не могло служить аргументом против утверждения о том, что сепаратрисная характеристика является сингулярной поверхностью.

Однако в приведённом выше рассуждении есть одно неявное предположение, которое, на наш взгляд, нарушает его строгость. Это предположение о том, что положение звуковой поверхности не изменится при добавлении возмущения. Решение в дозвуковой области предполагается заданным. Однако даже в хрестоматийном случае плоского потенциального течения при известных двух интегралах  $E_n$  и  $s$  есть свобода в выборе двух констант,  $x_*$  и  $k$ , в выражении для скорости вдоль оси  $x$  (6), полностью задающей, как было показано выше, гладкое трансзвуковое течение. То есть на самом деле существует бесконечно много течений с заданными интегралами, не имеющими особенности на критической поверхности, где бы она ни находилась.

Действительно, рассмотрим течение (7), соответствующее условию (6), и выберем его границу, совпадающую с некоторой линией тока, в виде параболы

$$y_b = y_0 + A(x - x_0)^2 \tag{10}$$

с заданными значениями  $x_0, y_0$  и  $A$ . Тогда с квадратичной точностью имеем решение прямой задачи (т.е. решение уравнения (7) с заданной границей течения) со значениями

$$x_* = x_0 + \frac{k(\Gamma + 1)}{6c_*} y_0^2, \tag{11}$$

$$k = \left( \frac{2Ac_*^2}{(\Gamma + 1)y_0} \right)^{1/2}. \tag{12}$$

"Возмущая" теперь границу течения, в том числе и в области между звуковой и сепаратрисной поверхностью (но оставаясь в рамках квадратичного приближения!), мы просто переходим к другим значениям постоянных  $x_*$  и  $k$ . Это и понятно, поскольку само положение звуковой поверхности не определяется из условия  $D = 0$ .

В работе [37] показано, что прямая задача может быть решена и для следующего приближения для границы течения  $y_b = y_0 + A(x - x_0)^2 + B(x - x_0)^3$ , если учесть квадратичный член разложения в (6). Правда, в таком случае для определения коэффициентов, определяющих течение, следует решать нелинейную систему алгебраических уравнений. Однако сути это не меняет. Изменение границы течения в сверхзвуковой области, и даже помещение в эту область "камня" (когда требуется рассмотреть бесконечный ряд в (6)), просто изменит положение особой поверхности.

В качестве ещё одного аргумента в пользу нашей точки зрения мы ниже проанализируем построение решения для осесимметричного стационарного течения в окрестности "нестандартной" особой точки. Здесь, безусловно, также следует сделать небольшой экскурс в историю. Дело в том, что указанные выше исследования астрофизической направленности всё же внесли существенный вклад в теорию трансзвуковых течений. Стало понятно, что при отсутствии границ течения (аккреция на компактный объект, звёздный ветер) на звуковой поверх-

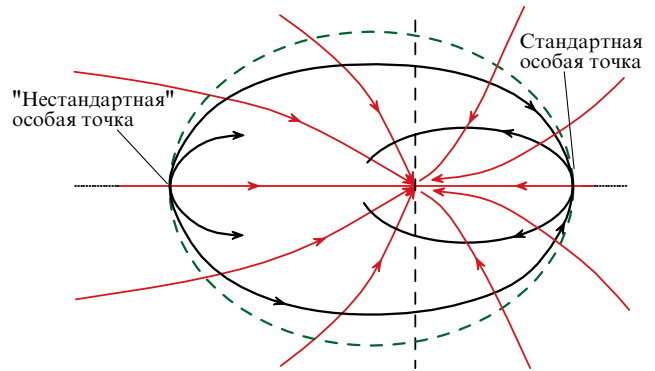


Рис. 2. Поведение характеристик в случае аккреции Бонди–Хойла. Сепаратрисная характеристика выходит из "нестандартной" особой точки на звуковой поверхности (штриховая линия), которая соответствует расходящимся (относительно звуковой поверхности) линиям тока.

ности должна существовать ещё одна особая точка, в которой линия тока перпендикулярна звуковой поверхности. Однако, в отличие от стандартной особой точки, показанной на рис. 1, она соответствует расходящимся линиям тока относительно звуковой поверхности. Такая особая точка невозможна для плоских потенциальных течений, и поэтому она не обсуждалась в классических трудах, посвящённых трансзвуковым течениям<sup>1</sup> [10–12, 16].

Как оказалось, течение вблизи "нестандартной" особой точки обладает удивительными свойствами. Прежде всего отметим, что поскольку сепаратрисная характеристика не может возникнуть в самой гиперболической области, она должна начинаться в какой-то другой точке на звуковой поверхности (рис. 2). И оказалось, что как раз вблизи "нестандартной" особой точки, где, как мы сейчас покажем, характеристические поверхности имеют совершенно иную структуру.

Действительно, рассмотрим осесимметричное стационарное течение, подобное аккреции Бонди–Хойла, показанное на рис. 2. Важным упрощающим предположением, которое, впрочем, не повлияет на ход наших рассуждений, будет отсутствие осевого вращения ( $L_n = 0$ ), а также постоянство интеграла Бернулли ( $E_n = \text{const}$ ) и энтропии ( $s = \text{const}$ ) во всём объёме. В этом случае уравнение Грэда–Шафранова (4) на потенциал  $\Phi$ , входящий в определение (5), в компактной форме имеет вид [13]

$$r^2 \sin^2 \theta \nabla_k \left( \frac{1}{\rho r^2 \sin^2 \theta} \nabla^k \Phi \right) = 0. \tag{13}$$

Напомним, что это уравнение должно быть дополнено уравнением Бернулли

$$\frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi^2 \rho^2 r^2 \sin^2 \theta} + \frac{c_s^2}{\Gamma - 1} + \varphi_g(r) = \frac{(\Gamma + 1)c_*^2}{2(\Gamma - 1)} + \varphi_g(r_*), \tag{14}$$

где

$$\varphi_g(r) = -\frac{GM}{r}. \tag{15}$$

<sup>1</sup> Более точно, авторам неизвестны работы по этой тематике, за исключением работ, посвящённых астрофизическим течениям.

Оно неявно задаёт зависимость  $\rho = \rho(\Phi)$ , учёт которой приводит к дополнительным вторым производным потенциала  $\Phi$ .

Записав теперь уравнение (13) в стандартной форме  $A\Psi_{rr} + 2B\Psi_{r\theta} + C\Psi_{\theta\theta} + \dots = 0$ , можно переписать уравнение на характеристики  $dr/d\theta = [B \pm (B^2 - AC)^{1/2}]/C$  в виде

$$\frac{dR}{d\vartheta} = a\vartheta \pm \sqrt{R}. \tag{16}$$

Здесь угол  $\vartheta = \theta - \theta_*$ ,

$$R = \frac{r_*(\vartheta) - r}{r_*D_1}, \tag{17}$$

$D_1 = r_*(\partial D/\partial r)_*$  при  $r = r_*$ , а  $r_*$  и  $\theta_*$  — координаты особой точки. Наконец [38],

$$a = -\frac{(\partial^2 D/\partial \theta^2)_*}{D_1^2} - \frac{r_*(\partial^2 \Phi/\partial r \partial \theta)_*}{(\partial \Phi/\partial \theta)_* D_1}. \tag{18}$$

При этом положительные значения  $a$  соответствуют стандартной особой точке (сходящиеся линии тока), а отрицательные значения  $a$  — "нестандартной" особой точке (расходящиеся линии тока).

Легко проверить, что уравнение (16) имеет решение в виде двух парабол:

$$R(\vartheta) = w_{1,2}^2 \vartheta^2, \tag{19}$$

где

$$w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8a}}{4}. \tag{20}$$

Однако если при  $a > 0$  меньший корень  $w$  соответствует двум сепаратрисным характеристикам, входящим в стандартную особую точку, а больший корень — двум характеристикам, выходящим из неё (рис. 3), то при  $a < 0$ , т.е. для "нестандартной" особой точки, ситуация оказывается принципиально иной.

Во-первых, действительные корни для  $w_{1,2}$  существуют лишь при  $-1/8 < a < 0$ . В этом случае обе параболы соответствуют характеристикам, выходящим из особой точки. Как показано на рис. 3а, вблизи параболы, отвечающей меньшему корню  $w$ , существует бесконечно много выходящих характеристик, касающихся параболической направляющей в особой точке. Одна из них и является сепаратрисной характеристикой, однако какая, определить вблизи "нестандартной" особой точки невозможно, так как для этого нужно находить траекторию характеристики вплоть до стандартной особой точки. Впрочем, для нас существенным будет лишь то, что при  $-1/8 < a < 0$  сепаратрисная характеристика проходит через "нестандартную" особую точку.

Во-вторых, при  $a < -1/8$  выражения для  $w$  (20) становятся комплексными. Это означает, что при медленном изменении параметров сетка характеристик скачком меняет свою структуру. В этом и состоит замечательное свойство бифуркации характеристик [27, 30, 38]. Как показано на рис. 3б, гиперболическая область около особой точки начинает влиять на дозвуковую область, поскольку возмущения от точки А вдоль характеристики достигают звуковой поверхности. Существенным же для нас здесь является то, что при  $a < -1/8$  через "нестан-

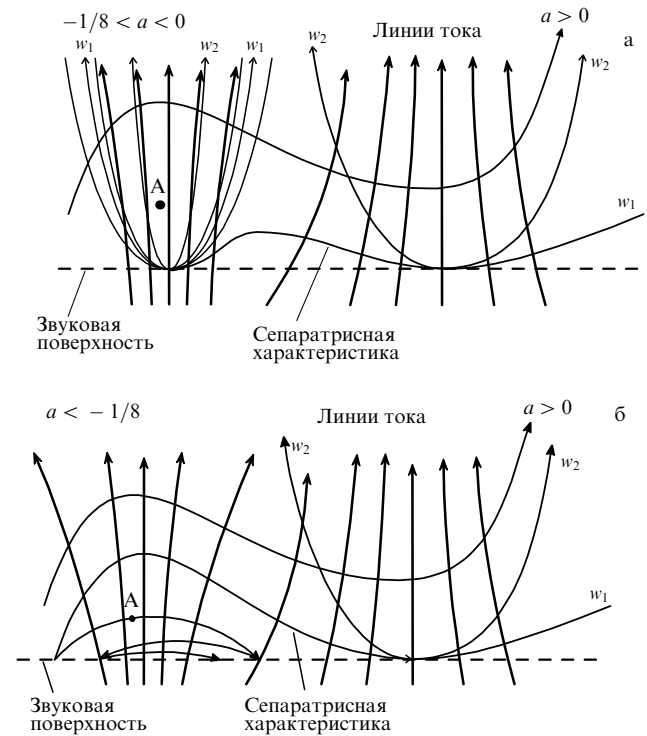


Рис. 3. (а) Поведение характеристических поверхностей в случае, когда параметр  $a$  для "нестандартной" особой точки (слева) удовлетворяет условию  $-1/8 < a < 0$ . Более жирной линией отмечены сепаратрисная характеристика, а также решения, соответствующие  $w = w_1$  и  $w = w_2$ . Стандартная особая точка  $a > 0$  показана справа. Точка А не оказывает влияния на дозвуковую область. (б) То же для  $a < -1/8$ . Возмущение от точки А вдоль характеристики достигает звуковой поверхности.

дартную" особую точку не проходит ни одна характеристика, в том числе и сепаратрисная характеристика, которая теперь располагается выше по течению относительно "нестандартной" особой точки.

Таким образом, мы уверены, что при  $a > -1/8$  сепаратрисная характеристика проходит через "нестандартную" особую точку, а при  $a < -1/8$  — уже нет. С другой стороны, если бы сепаратрисная характеристика действительно была критической поверхностью, т.е. определяла необходимое число граничных условий, то при переходе через значение  $a = -1/8$  построение решения в окрестности "нестандартной" особой точки потребовало бы разное количество свободных функций, задающих единственное решение. Легко показать, однако, что это не так.

Действительно, аналитичность особой точки позволяет вновь искать решение уравнения (13) в виде разложения по целым степеням отклонений от особой точки. При этом мы, как и в стандартном подходе, будем считать заданной продольную скорость  $v_r$  вдоль оси течения<sup>2</sup>:

$$v_r(r) = -c_*(1 - kh). \tag{21}$$

Здесь по определению

$$h = \frac{r - r_*}{r_*}. \tag{22}$$

<sup>2</sup> В работе [38] рассматривался другой подход.

Такой выбор знаков соответствует случаю  $k > 0$  (скорость увеличивается при приближении к гравитационному центру). Далее, легко проверить, что благодаря определению (5) уравнение (13) есть не что иное, как условие  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ , которое в нашем случае, безусловно, должно быть тождественно выполнено. Тогда мы можем сразу определить компоненты скорости  $\mathbf{v}$  в виде

$$v_r(r, \theta) = -c_* \left( 1 - kh - \frac{1}{2} \varkappa \theta^2 \right), \quad (23)$$

$$v_\theta(r, \theta) = c_* \varkappa \theta. \quad (24)$$

Соответственно, должна быть определена и функция потока  $\Phi(r, \theta)$ , которую мы запишем в виде

$$\Phi(r, \theta) = -\Phi_* \left( \frac{\theta^2}{2} + bh\theta^2 - \frac{q}{24} \theta^4 + \dots \right). \quad (25)$$

Здесь  $\Phi_* = 2\pi r_*^2 n_* c_*$ . При этом для монополярного решения  $\Phi(r, \theta) = \Phi_*(1 - \cos \theta)$  мы имеем  $q = 1$  и  $b = 0$ . Если ещё записать плотность  $\rho(r, \theta)$  как

$$\rho(r, \theta) = \rho_* \left( 1 + \eta_1 h + \frac{1}{2} \eta_2 \theta^2 \right), \quad (26)$$

то все остальные коэффициенты разложения можно найти из уравнения Бернулли (14) и самого определения (5).

Действительно, разлагая радиальную компоненту соотношения (5) до первых степеней  $h$  и  $\theta^2$ , а также используя лидирующую ( $\propto \theta$ )  $\theta$ -компоненту этого соотношения, получаем

$$\eta_1 = k + 2b - 2, \quad (27)$$

$$\eta_2 = \varkappa + \frac{1}{3} - \frac{q}{3}, \quad (28)$$

$$\varkappa = b. \quad (29)$$

Разлагая же уравнение Бернулли (14) до первых степеней  $h$  и  $\theta^2$ , получаем с учётом соотношений (28) и (29)

$$b = 1 - \frac{GM}{2r_* c_*^2}, \quad (30)$$

$$\eta_2 = b - b^2. \quad (31)$$

Соответственно, знаменатель  $D$  (3) запишется как

$$D = [(\Gamma + 1)k - 2(\Gamma - 1)(1 - b)]h + b(\Gamma + 1)(1 - b) \frac{\theta^2}{2}. \quad (32)$$

В итоге получаем

$$a = -b \frac{2(\Gamma + 1)k + (1 - b)(5 - 3\Gamma)}{D_1^2}, \quad (33)$$

где

$$D_1 = (\Gamma + 1)k - 2(\Gamma - 1)(1 - b). \quad (34)$$

Как и следовало ожидать, все коэффициенты выражаются через величину  $c_*$ , определяемую из величины интеграла Бернулли  $E_n$ , положения особой точки  $r_*$ , задающей значения  $b$  и  $k$ . При этом для сферически-

симметричного решения ( $b = 0$ ) мы имеем  $a = 0$ . С другой стороны, для особой точки, лежащей дальше от гравитирующего центра по сравнению со сферически-симметричным случаем ( $b > 0$ ), получаем  $a < 0$ , т.е. именно то, что и нужно для "нестандартной" особой точки (см. рис. 2). Соответственно, для стандартной особой точки имеем  $a > 0$ .

Но самое главное для нас, конечно же, заключается в том, что процедура построения решения никак не связана со значением  $a$ . Для "нестандартной" особой точки и при  $a > -1/8$ , и при  $a < -1/8$  решение строится совершенно одинаково и для его нахождения в обоих случаях (помимо двух интегралов движения) необходимо задать лишь одну функцию, в нашем случае — радиальную скорость  $v_r(r)$ . Для нулевого углового момента  $L_n$  такое количество граничных условий в точности соответствует соотношению (8). Поэтому по крайней мере для рассматриваемой здесь точно решаемой задачи ясно, что сепаратрисная характеристика не является критической поверхностью, накладывающей дополнительную связь на параметры сверхзвукового течения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-02-00469).

## Список литературы

1. Blandford R D, Znajek R L *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **179** 433 (1977)
2. Heinemann M, Olbert S J *Geophys. Res.* **83** 2457 (1978)
3. Okamoto I *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **185** 69 (1978)
4. Blandford R D, Payne D G *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **199** 883 (1982)
5. Pudritz R E, Norman C A *Astrophys. J.* **301** 571 (1986)
6. Heyvaerts J, Norman C *Astrophys. J.* **347** 1055 (1989)
7. Pelletier G, Pudritz R E *Astrophys. J.* **394** 117 (1992)
8. Bondi H *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **112** 195 (1952)
9. Parker E N *Astrophys. J.* **128** 664 (1958)
10. Guderley K G *Theorie schallnaher Strömungen* (Berlin: Springer, 1957); Пер. на русск. яз.: Гудерлей К Г *Теория околзвуковых течений* (М.: ИЛ, 1960)
11. von Mises R *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow* (New York: Academic Press, 1958); Пер. на русск. яз.: Мизес Р *Математическая теория течений сжимаемой жидкости* (М.: ИЛ, 1961)
12. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
13. Бескин В С *Оссимметричные стационарные течения в астрофизике* (М.: Физматлит, 2005); Пер. на англ. яз.: Beskin V S *MHD Flows in Compact Astrophysical Objects* (Heidelberg: Springer, 2010)
14. Grad H *Rev. Mod. Phys.* **32** 830 (1960)
15. Шафранов В Д *ЖЭТФ* **33** 710 (1957); Shafranov V D *Sov. Phys. JETP* **6** 545 (1958)
16. Франкль Ф И *Избранные труды по газовой динамике* (Под ред. Г И Майкапара) (М.: Наука, 1973)
17. Чаплыгин С А *О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (к теории аэроплана)* (М.: Тип. Имп. Моск. ун-та, 1910)
18. Соловьев Л С, в сб. *Вопросы теории плазмы* Т. 3 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Атомиздат, 1963) с. 245; Пер. на англ. яз.: Solov'ev L S, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 3 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1967) p. 277
19. Велихов Е П *ЖЭТФ* **36** 1398 (1959); Velikhov E P *Sov. Phys. JETP* **9** 995 (1959)
20. Chandrasekhar S *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford: Oxford Univ. Press, 1961)
21. Balbus S A, Hawley J F *Astrophys. J.* **376** 214 (1991)
22. Бисноватый-Коган Г С и др. *Астрон. журн.* **56** 359 (1979); Bisnovatyi-Kogan G S et al. *Sov. Astron.* **23** 201 (1979)

23. Lovelace R V E, Berk H L, Contopoulos J *Astrophys. J.* **379** 696 (1991)
24. Tsinganos K, Sauty C *Astron. Astrophys.* **255** 405 (1992)
25. Li Z-Y, Chiueh T, Begelman M C *Astrophys. J.* **394** 459 (1992)
26. Contopoulos J, Lovelace R V E *Astrophys. J.* **429** 139 (1994)
27. Sauty C, Tsinganos K *Astron. Astrophys.* **287** 893 (1994)
28. Tsinganos K et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **283** 811 (1996)
29. Ostriker E C *Astrophys. J.* **486** 291 (1997)
30. Bogovalov S V *Astron. Astrophys.* **323** 634 (1997)
31. Боговалов С В *Письма в Астрон. журн.* **18** 832 (1992); Bogovalov S V *Sov. Astron. Lett.* **18** 337 (1992)
32. Бескин В С, Пидопрыгора Ю Н *ЖЭТФ* **107** 1025 (1995); Beskin V S, Pidoprygora Yu N *J. Exp. Theor. Phys.* **80** 575 (1995)
33. Бескин В С, Малышкин Л М *Письма в Астрон. журн.* **26** 253 (2000); Beskin V S, Malyskin L M *Astron. Lett.* **26** 208 (2000)
34. Pariev V I *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **283** 1264 (1996)
35. Бескин В С, Пидопрыгора Ю Н *Астрон. журн.* **75** 82 (1998); Beskin V S, Pidoprygora Yu N *Astron. Rep.* **42** 71 (1998)
36. Beskin V S, Okamoto I *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **313** 445 (2000)
37. Рябоконт М П *Ученые записки ЦАГИ* **13** (6) 97 (1982)
38. Бескин В С, Кузнецова И В *ЖЭТФ* **113** 771 (1998); Beskin V S, Kuznetsova I V *J. Exp. Theor. Phys.* **86** 421 (1998)

### On the problem of boundary conditions for mixed type equations arising in the description of astrophysical transonic flows

V.S. Beskin<sup>(1,2,\*), T.I. Khalilov<sup>(2)</sup></sup>

(1) *Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation*

(2) *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation*

E-mail: (\*) [beskin@lpi.ru](mailto:beskin@lpi.ru)

Using the example of an exactly solvable problem, it is shown that the number of boundary conditions which is necessary to determine the transonic hydrodynamic flow near the so-called 'nonstandard singular point' does not depend on whether the separatrix characteristic passes or does not pass through this point. Thus, a quite popular statement is called into question, according to which the critical surface, on which the regularity condition determines the flow structure, generally coincides with the surface of separatrix characteristics, and not with the sonic surface.

**Keywords:** hydrodynamics

PACS number: 95.30.Lz

Bibliography — 38 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **193** (7) 791 – 797 (2023)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2022.07.039217>

*Received 2 February 2022, revised 4 July 2022*

*Physics – Uspekhi* **66** (7) (2023)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2022.07.039217>