УДК 524.354

К природе аномального момента сил, действующего на вращающийся намагниченный шар в вакууме

Бескин В.С., Желтоухов А.А., Обухова А.К., Стройнов Е.Е.

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Москва

Московский физико-технический институт, Долгопрудный Московской обл.

Уточнена величина аномального момента сил, действующего на вращающийся намагниченный шар в вакууме. Показано, что его величина зависит от структуры магнитного поля внутри тела.

Ключевые слова: нейтронные звезды, радиопульсары, аномальный момент.

Введение.

Простейшей моделью, описывающей магнитосферу нейтронных звезд, является вакуумная модель [1, 2]. Согласно этой модели, нейтронная звезда представляет собой хорошо проводящий намагниченный шар, вращающийся в вакууме. При этом основное энерговыделение происходит за счет магнитодипольного излучения, которое приводит к замедлению вращения и к уменьшению угла χ между осью вращения и магнитным моментом $\mathfrak{m}$ [3].

Несмотря на то, что вакуумная модель известна довольно давно, по некоторым вопросам все еще не достигнута полная ясность. В частности, на данный момент нет единого мнения о т.н. аномальном моменте сил, т.е. о моменте, действующим в направлении, перендикулярном плоскости $(\mathfrak{m}\boldsymbol{\Omega})$ и приводящем к прецессии оси вращения. Такое назвавние связано с тем, что его величина

$$K = \xi \frac{\mathfrak{m}^2}{R^3} \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \sin\chi \cos\chi, \qquad (1)$$

где R — радиус шара, а ξ — численный коэффициент порядка единицы, оказывается в $(\Omega R/c)^{-1}$ раз больше, чем тормозящий момент. При этом разные авторы дают разные значения величины ξ, а именно $\xi = 1$ [3, 4] и $\xi = 3/5$ [5] (см. также работы [6, 7], в которых, однако, заведомо не учитывался вклад электрического поля). С другой стороны, согласно [8, 9] аномальный момент вообще равен нулю ($\xi = 0$), и поэтому подобная прецессия должна отсутствовать. Данная работа посвящена прояснению указанного вопроса и вычислению аномального момента сил, действующих на вращающийся намагниченный шар в вакууме.

Метод вычисления момента сил.

Для определения аномального момента необходимо определить объемные и поверхностные токи и заряды, связанные с вращением шара. Ниже мы будем считать шар идеально проводящим, так что в нем выполнено условие вмороженности

$$\mathbf{E} + \beta_{\mathrm{R}} \times \mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

где здесь и далее $\beta_{\mathrm{R}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}/c$. В результате, силы, действующие на шар, могут быть записаны в виде

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \rho_{\mathrm{e}}\mathbf{E}\ \mathrm{d}V + [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]/c\ \mathrm{d}V + \sigma_{\mathrm{e}}\mathbf{E}\ \mathrm{d}S + [\mathbf{I}_{\mathrm{S}} \times \mathbf{B}]/c\ \mathrm{d}S, \tag{3}$$

где первые два слагаемых соответствуют объемному, а вторые — поверхностному вкладу. Однако если предположить, что в объеме шара существуют лишь токи коротации $\mathbf{j} = c\rho_{\mathrm{e}}\beta_{\mathrm{R}}$, то, как легко проверить, объемная часть силы (3) будет равна нулю. Тогда, учитывая что на поверхности шара $\mathbf{r} = R \cdot \mathbf{n}$ и $\mathrm{d}S = R^2\mathrm{d}o$, где $\mathrm{d}o$ — элемент телесного угла, для полного момента сил, действующих на поверхность шара получим

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{cR^3}{4\pi} \int \Big([\mathbf{n} \times \{\mathbf{B}\}]\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]\,(\{\mathbf{E}\} \cdot \mathbf{n}) \Big) \mathrm{d}o, \tag{4}$$

где фигурными скобками обозначены скачки поля на поверхности шара. Таким образом, задача о нахождении момента сил сводится к задаче нахождения электромагнитного поля внутри и вне шара.

Мы будем решать задачу методом разложения по параметру $(\Omega R/c)$, причем, как видно из соотношения (4), нам достаточно ограничиться лишь членами первого порядка для электрического и второго порядка для магнитного поля. При этом мы воспользуемся известным свойством квазистационарных конфигураций, когда для полей, зависящих от угла φ и времени t лишь в комбинации $\varphi - \Omega t$ временные производные можно заменить на пространственные, в результате чего уравнения Максвелла могут быть переписаны в виде [10]

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \beta_{\mathrm{R}} \times \mathbf{B}) = 0, \tag{5}$$

$$\nabla \times (\mathbf{B} - \beta_{\mathrm{R}} \times \mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - 4\pi\rho_e\beta_{\mathrm{R}}. \tag{6}$$

Поскольку же как внутри, так и вне шара правая часть второго уравнения оказывается равной нулю, получаем в итоге

$$\mathbf{E} + \beta_{\mathrm{R}} \times \mathbf{B} = -\nabla\psi, \tag{7}$$

$$\mathbf{B} - \beta_{\mathrm{R}} \times \mathbf{E} = \nabla h, \tag{8}$$

где ψ и h суть две скалярные функции, которые следует находить из условия непрерывности соответствующих компонент электрического и магнитного полей и из условий $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ вне шара.

Таким образом, зная магнитное поле в нулевом порядке по параметру $(\Omega R/c)$, можно, используя уравнение (7), найти электрическое поле, соответствующее первому порядку по параметру $(\Omega R/c)$. Как хорошо известно, вне шара оно складывается из радиационного поля излучения магнитного диполя и квадрупольного поля зарядов, наводимых в шаре. В свою очередь, уравнение (8) позволяет однозначно найти магнитное поле во втором порядке по параметру $(\Omega R/c)$. Оно складывается из волнового поля как магнитодипольного, так и квадрупольного излучения.

Подчеркнем, что предлагаемый здесь метод неприменим для расчета момента, ответственного за магнитодипольное излучение, поскольку он не может различить запаздывающие и опережающие поитенциалы [10]. Однако эта неопределенность появляется лишь на следующем шаге разложения, поскольку, как мы видели, аномальный момент (1) в

$(\Omega R/c)^{-1}$ больше тормозящего момента, направленного против оси вращения. Поэтому описанная выше процедура оказывается адекватной поставленной задаче.

Результаты.

Прежде всего, рассмотрим случай, когда в нулевом порядке по параметру $(\Omega R/c)$ магнитное поле как внутри, так и вне шара является дипольным

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathfrak{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathfrak{m}r^2}{r^5}. \tag{9}$$

В этом случае поверхностные токи нулевого порядка отсутствуют, и поэтому для вычисления аномального момента требуется определение лишь электрического поля. При этом его непрерывная тангенциальная компонента может быть определена непосредственно из соотношения (7) при $\psi = 0$, а поверхностный заряд имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathfrak{m}}{R^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)\left(\cos^2\theta\cos\chi + \sin\theta\cos\theta\sin\chi\right). \tag{10}$$

В итоге, получаем

$$\xi = \frac{8}{15} - \frac{1}{5}\frac{R}{R_{\mathrm{in}}}, \tag{11}$$

где R_{in} — радиус внутреннего шара, моделирующего точечный диполь.

В случае же однородно намагниченного шара магнитное поле в нулевом порядке по параметру $(\Omega R/c)$ внутри шара определяется через магнитный момент формулой $\mathbf{B} = 2\mathfrak{m}/R^3$, а вне шара является дипольным (9). Это значит, что на поверхности шара должны существовать электрические токи (а значит, и скачок магнитного поля) нулевого порядка. Поэтому в этом случае, помимо электрического поля первого порядка необходимо определить и магнитные поля второго порядка. В результате, после элементарных, хотя и достаточно трудоемких вычислений, получаем

$$\xi = \frac{1}{3}. \tag{12}$$

Таким образом, мы видим, что аномальный момент сил, действующий на вращающийся намагниченный шар в вакууме, не равен нулю и при этом зависит от структуры его внутреннего магнитного поля. Отличие же от предыдущих расчетов, по-видимому, связано с тем, что в них не были учтены токи коротации внутри звезды.

Авторы благодарят Я.Н.Истомина и А.А.Филиппова за полезное обсуждение. Работа была поддержана ФЦП Министерства образования и науки, соглашение 14.A18.21.0790.

Список литературы

[1] Deutsch A.J. Annales d'Astrophysique, **18**, 1 (1955).

[2] Ostriker J.P., Gunn J.E., ApJ, **458**, 347 (1969).

[3] Davis L., Goldstein M., ApJ, **159**, L81 (1970).

[4] Goldreich P., ApJ, **160**, L11 (1970).

[5] Melatos A., MNRAS, **313**, 217 (2000).

[6] Good M.L., Ng K.K., ApJ, **299**, 706 (1985).

[7] Mestel L., Moss D., MNRAS, **361**, 595 (2005).

[8] Michel F.C., *Theory of neutron star magnetospheres* (University of Chicago Press, Chicago, 1991)

[9] Istomin Ya.N. in *Progress in Neutron Star Research*, A.P.Wass (Ed.), (Nova Science Publisher, New-York, 2005).

[10] Beskin V.S., *MHD Flows in Compact Astrophysical Objects* (Springer-Verlag, Berlin, 2010).