

УДК 524.35

К СТРУКТУРЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ В АКТИВНЫХ ГАЛАКТИЧЕСКИХ ЯДРАХ

© 2013 г. В. С. Бескин*, А. А. Желтоухов

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва

Поступила в редакцию 10.10.2012 г.

В данной статье с помощью метода уравнения Грэда–Шафранова рассматривается новая аналитическая модель магнитосферы черной дыры, основанная на предположении о радиальном магнитном поле вблизи горизонта и однородном (цилиндрическом) магнитном поле в области струйного выброса. В рамках рассматриваемой модели удалось показать, что угловая скорость частиц Ω_F вблизи оси вращения черной дыры может быть меньше $\Omega_H/2$, что согласуется с последними результатами численного моделирования.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, черная дыра.

DOI: 10.7868/S0320010813040013

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, основной моделью, ответственной за энерговыделение активных галактических ядер, сейчас является электродинамическая модель, восходящая к работе Блендфорда и Знайека (1977). В рамках этой модели потери энергии вращающейся черной дыры связаны с потоком электромагнитной энергии, текущей вдоль магнитных силовых линий от поверхности черной дыры в направлении струйных выбросов. При этом вопрос о структуре магнитного поля в окрестности черной дыры (которое должно генерироваться в аккреционном диске) до сих пор остается открытым. Этот вопрос становится особенно актуальным как в связи с последними наблюдениями внутренних областей струйных выбросов (см., например, Долеман и др., 2012), так и с успешным запуском космической обсерватории Спектр-Р (Радиоастрон), также позволяющим разрешить пространственные масштабы, сравнимые с размером центральной черной дыры (Кардашев, 2009).

К настоящему времени в рамках аналитического подхода в бессиловом приближении вблизи черной дыры рассматривались самые различные варианты геометрии магнитного поля. Это квазирадиальное поле у горизонта и вдали от черной дыры (Блендфорд, Знайек, 1977), параболическое поле у горизонта и вдали от черной дыры (Блендфорд, Знайек,

1977; Гош, Абрамович, 1997), а также однородное магнитное поле вблизи горизонта и квазирадиальное поле на больших расстояниях (Бескин и др., 1992). При этом во всех случаях угловая скорость вращения плазмы Ω_F (которая, как известно, однозначно зависит от геометрии магнитного поля) вблизи оси вращения всегда составляла

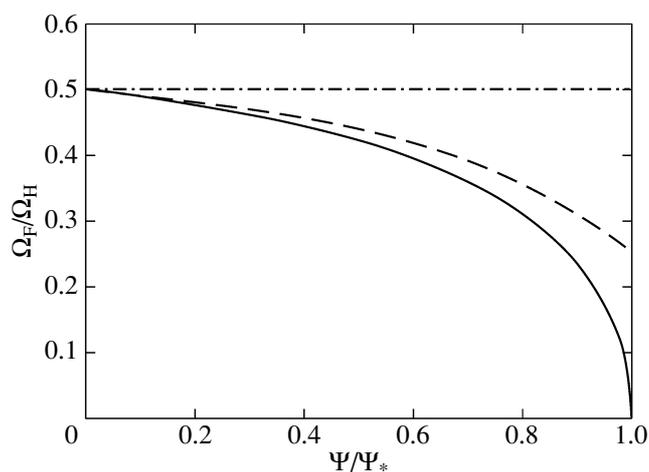


Рис. 1. График Ω_F/Ω_H в случае квазирадиального поля у горизонта и вдали от черной дыры (штрихпунктирная линия), параболического поля у горизонта и вдали от черной дыры (штриховая линия), а также однородного магнитного поля вблизи горизонта и квазирадиальное поле на больших расстояниях (сплошная линия). Здесь Ψ_* — полный поток через поверхность горизонта.

* Электронный адрес: beskin@td.lpi.ru

ровно половину от угловой скорости вращения черной дыры Ω_H (см. рис.1). Однако проведенные в последнее время численные расчеты показывают, что условие $\Omega_F = \Omega_H/2$ может нарушаться. В частности, в работе Маккини и др. (2012) сделано утверждение, что полученный ими профиль угловой скорости $\Omega_F(\theta)$ в районе горизонта черной дыры больше соответствует параболическому полю, для которого при $\theta = \pi/2$ величина Ω_F действительно опускается до $0.3\Omega_H$. Однако в этом случае часть силовых линий должна быть связана не с горизонтом черной дыры, а с аккреционным диском в районе эргосферы (Пансли, 2001).

Данная работа посвящена изучению аналитической модели магнитосферы черной дыры, основанной на ранее не рассматривавшейся геометрии магнитного поля: радиального поля вблизи горизонта, и вертикального поля на больших расстояниях от черной дыры. Во втором разделе будет дан краткий обзор используемого метода уравнения Грэда–Шафранова и полученных на его основе других моделей магнитосферы черной дыры. В третьем разделе мы рассмотрим непосредственно саму модель и проведем ее сравнение с результатами численного моделирования магнитосферы черной дыры (Маккини и др., 2012). Будет показано, что в рамках рассматриваемой модели полученный профиль угловой скорости может быть легко объяснен.

2. МЕТОД УРАВНЕНИЯ ГРЭДА–ШАФРАНОВА

Метод уравнения Грэда–Шафранова описывает осесимметричные стационарные течения в рамках идеальной магнитной гидродинамики. Такое приближение основывается на предположении о хорошей проводимости плазмы, заполняющей магнитосферу компактного астрофизического объекта. В окрестности вращающейся черной дыры (метрика которой также является осесимметричной и стационарной) это обеспечивается эффективным рождением электронно-позитронной плазмы (Блендфорд, Знайек, 1977). Удобство данного подхода связано с тем, что в случае стационарной идеальной магнитной гидродинамики существует достаточно много интегралов движения, т.е. величин, сохраняющихся вдоль траектории движения частиц. Это позволяет свести уравнения магнитной гидродинамики к одному уравнению второго порядка функцию магнитного потока $\Psi(r, \theta)$, определяющую магнитное поле:

$$\mathbf{B} = \frac{\nabla\Psi \times \mathbf{e}_\varphi}{2\pi\varpi} - \frac{2I}{c\varpi}\mathbf{e}_\varphi. \quad (1)$$

Здесь $\varpi = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}$ есть расстояние до оси вращения. При таком выборе обозначений функция $\Psi(r, \theta)$ совпадает с потоком магнитного поля, проходящем

через круг $r, \theta, 0 < \varphi < 2\pi$, а функция $I(r, \theta)$ представляет собой полный ток, текущий через тот же круг.

Кроме того, выполняются следующие важные свойства.

1. Уравнение $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ выполняется автоматически. В результате три компоненты магнитного поля определяются двумя скалярными функциями $\Psi(r, \theta)$ и $I(r, \theta)$.

2. Автоматически выполняется уравнение $\mathbf{B} \cdot \nabla\Psi = 0$, поэтому линии $\Psi(r, \theta) = \text{const}$ задают форму магнитных поверхностей.

Далее, используя уравнение вмерзности $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c = 0$ и предположение об осесимметричности, можно определить электрическое поле следующим образом (подробнее см. Бескин, 2010):

$$\mathbf{E} = -\frac{(\Omega_F - \omega)}{2\pi c}\nabla\Psi, \quad (2)$$

где ω — угловая частота Лензе–Тирринга. В итоге уравнение Максвелла $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ приводит к соотношению $\nabla\Omega_F \times \nabla\Psi = 0$, откуда следует, что

$$\Omega_F = \Omega_F(\Psi). \quad (3)$$

Введенная таким образом функция Ω_F имеет смысл угловой скорости вращения частиц, движущихся в магнитосфере, полностью заполненной плазмой, а условие (3) представляет собой закон изоротации Ферраро, согласно которому угловая скорость вращения частиц на осесимметричных магнитных поверхностях должна быть постоянной (Ферраро, 1937). Аналогичным образом из уравнений Максвелла можно вывести, что $\nabla I \times \nabla\Psi = 0$, и, следовательно,

$$I = I(\Psi). \quad (4)$$

Это значит, что полный электрический ток внутри магнитной трубки также сохраняется.

Важно подчеркнуть, что в отличие от нерелятивистской задачи, в магнитосфере черной дыры присутствует второе семейство особых поверхностей, связанное с аккрецирующим веществом. В результате дополнительное критическое условие позволяет определить дополнительную связь между током $I(\Psi)$ и угловой скоростью $\Omega_F(\Psi)$. В бессиловом приближении эта связь может быть записана в виде (Торн, Макдональд, 1982)

$$4\pi I(\Psi) = \quad (5)$$

$$= [\Omega_H - \Omega_F(\Psi)] \sin\theta \frac{r_g^2 + a^2}{r_g^2 + a^2 \cos^2\theta} \left(\frac{d\Psi}{d\theta} \right),$$

где r_g — радиус черной дыры, а a — параметр вращения. Напомним, что истинный смысл соотношения (5) — это критическое условие на внутренней быстрой магнитозвуковой поверхности, которая в

бессиловом приближении совпадает с горизонтом черной дыры (Бескин, 2010). В результате это условие позволяет определить не только продольный ток, но и угловую скорость $\Omega_F(\Psi)$.

3. ПРОФИЛЬ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ПЛАЗМЫ

Как уже говорилось, в литературе предлагалось несколько аналитических моделей магнитосферы черной дыры. Первая из них была построена Блендфордом и Знайеком (1977), рассмотревшими медленно вращающуюся черную дыру, для которой в качестве нулевого приближения была выбрана невращающаяся черная дыра с квазирадиальным (*split*) монопольным полем. Такая геометрия легко может быть реализована в присутствии тонкого аккреционного диска. В этом случае функция потока $\Psi = \Psi_*(1 - \cos \theta)$ при $\theta < \pi/2$ и $\Psi = \Psi_*(1 + \cos \theta)$ при $\theta > \pi/2$ будет точным решением уравнения Грэда–Шафранова для невращающейся черной дыры. Эти же авторы рассмотрели модель магнитосферы с параболическим магнитным полем в окрестности медленно вращающейся черной дыры. Форму силовых линий при $\theta < \pi/2$ на больших расстояниях описывает функция потока $\Psi = \Psi_* r(1 - \cos \theta)$. Поскольку для нее $\Psi(r, \pi) \neq \text{const}$, то это означает наличие в объеме (а не только в гравитирующем центре или на бесконечности) источников или стоков. Такие источники также могут быть реализованы в аккреционном диске. Наконец, в работе Бескина и др. (1992) был исследован случай, когда черная дыра находится в центре хорошо проводящего диска, ограниченного внутренним радиусом b . При этом вблизи черной дыры поле являлось почти однородным, а на больших расстояниях ($r \gg b$) магнитное поле оставалось по-прежнему квазирадиальным. Как видно из рис. 1, во всех этих случаях угловая скорость $\Omega_F(\Psi)$ вблизи оси вращения равна $\Omega_H/2$.

С другой стороны, как показано на рис. 2, в недавней работе Маккини и др. (2012), посвященной численному моделированию магнитосферы черной дыры, был получен профиль угловой скорости Ω_F , которая не только отличается от $\Omega_H/2$ вблизи оси, но даже становится здесь отрицательной. При этом авторы делают вывод, что получившийся профиль все же ближе к параболическому решению, тем более что внешне магнитные поверхности действительно имеют подобную форму. Однако в параболическом решении значительная часть магнитных силовых линий должна проходить через аккреционный диск. Следовательно, для соответствующих магнитных поверхностей источником энергии будет не вращающаяся черная дыра, а экваториальная область эргосферы (подобная

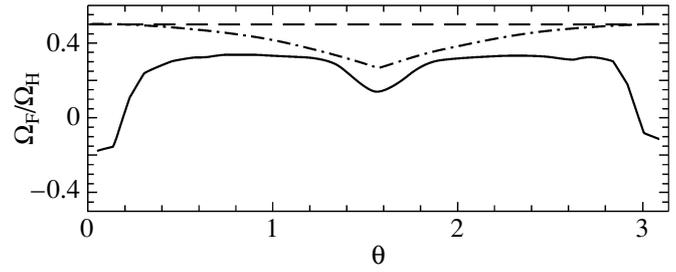


Рис. 2. График Ω_F/Ω_H на горизонте в зависимости от полярного угла θ , полученный в процессе численного моделирования магнитосферы черной дыры (Маккини и др. 2012). Штриховая линия соответствует монополюсному полю, штрих-пунктирная — параболическому.

модель развивалась, например, в работах Пансли, см. Пансли, 2001).

Ниже мы покажем, что лучше всего полученные в работе Маккини и др. (2012) результаты согласуются с еще не рассмотренной ранее моделью магнитосферы черной дыры с (квази)монопольным магнитным полем вблизи горизонта черной дыры и цилиндрическим полем вдали от горизонта. В этой модели, в которой теперь основная часть магнитного потока проходит через горизонт черной дыры, можно получить не только коллимацию магнитных поверхностей (она будет связана с достаточно большой плотностью внешней среды), но и значения угловой скорости, меньшие $\Omega_H/2$ вблизи оси.

В нашей модели мы будем использовать предположение, что на больших расстояниях от черной дыры, как это получается в численном моделировании, вблизи оси вращения течение является цилиндрическим, так что все величины зависят только от цилиндрического радиуса ϖ . В данном случае уравнение Грэда–Шафранова является одномерным и может быть проинтегрировано. В бессиловом приближении решение уравнения Грэда–Шафранова принимает вид (см., например, Истомин, Парьев, 1994)

$$\begin{aligned} \Omega_F^2(\Psi)\varpi^4 B_z^2 c^{-2} &= \\ &= \varpi^2 B_\varphi^2 + \int_0^\varpi x^2 \frac{d}{dx} (B_z)^2 dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя выражение тороидального поля через полный ток $B_\varphi = -2I/\varpi c$ (1), можно переписать уравнение (6) в виде

$$\Omega_F^2(\Psi)A_1^2(\Psi) = 4I^2(\Psi) + A_2(\Psi), \quad (7)$$

где были введены обозначения:

$$A_1(\Psi) = \varpi^2 B_z; \quad (8)$$

$$A_2(\Psi) = c^2 \int_0^{\varpi} x^2 \frac{d}{dx} (B_z)^2 dx. \quad (9)$$

Что же касается “граничного условия на горизонте” (5), то его можно переписать в виде

$$2I(\Psi) = [\Omega_H - \Omega_F(\Psi)] A_3(\Psi), \quad (10)$$

где

$$A_3 = \frac{1}{2\pi} \sin \theta \frac{r_g^2 + a^2}{r_g^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{d\Psi}{d\theta} \right). \quad (11)$$

Подставляя последнее выражение для $2I(\Psi)$ в уравнение (7), получим квадратное уравнение на $\Omega_F(\Psi)$:

$$\Omega_F^2 (A_3^2 - A_1^2) - 2\Omega_F \Omega_H A_3^2 + \Omega_H^2 A_3^2 + A_2 = 0. \quad (12)$$

Отсюда общее выражение для угловой скорости $\Omega_F(\Psi)$ может быть записано в виде

$$\Omega_F = \Omega_H \left[\frac{A_3}{A_3 + A_1} + \frac{A_2}{\Omega_H^2 A_1 A_3 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{A_2(A_3^2 - A_1^2)}{\Omega_H^2 A_1^2 A_3^2}} \right)} \right]. \quad (13)$$

Такая форма записи связана с тем, что для рассмотренных ранее решений на оси вращения выполнено соотношение $A_1 = A_3$, и мы поэтому постарались избежать величин $(A_1 - A_3)$ в знаменателях соответствующих выражений.

Рассмотрим, прежде всего, случай, когда магнитное поле вдали от черной дыры является вертикальным и однородным ($\Psi = \pi \varpi^2 B_0$ при $r \gg r_g$), а на горизонте оно является строго радиальным ($\Psi = \Psi_* (1 - \cos \theta)$ при $r = r_g$). Тогда, подставляя в выражения (8), (9) и (11) соответствующие функции потока, получим

$$A_1(\Psi) = \varpi^2 \frac{1}{2\pi \varpi} \frac{d\Psi}{d\varpi} = \frac{\Psi}{\pi}, \quad (14)$$

$$A_2(\Psi) = c^2 \int_0^{\varpi} x^2 \frac{d}{dx} (B_0)^2 dx = 0,$$

$$A_3(\Psi) = \frac{\Psi}{\pi} \frac{r_g^2 + a^2}{r_g^2 + a^2 (1 - \Psi/\Psi_*)^2}.$$

Следовательно, на оси вращения вращения $\Omega_F = \Omega_H/2$.

С другой стороны, как аналитические (Бескин, Нохрина, 2009), так и численные (Комиссаров и

др., 2006; Чеховской и др., 2009; Порт и др., 2011) расчеты показывают, что в джете может существовать центральный кор, который, как будет показано далее, может существенно изменить ситуацию. Рассмотрим случай, когда магнитное поле на горизонте по-прежнему является строго радиальным, а вдали от черной дыры поле является вертикальным, но теперь вблизи оси вращения существует более плотная сердцевина радиуса r_{core} . Как было показано, такая сердцевина действительно должна образовываться при достаточно малом давлении внешней среды, причем (см. например, Бескин, Нохрина, 2009)

$$r_{\text{core}} = k \frac{c}{\Omega_F(0)}. \quad (15)$$

Здесь $k \approx \gamma_{\text{in}}$, где γ_{in} есть характерный лоренц-фактор частиц, текущих вдоль оси джета. Тогда на расстояниях $\varpi \leq r_{\text{core}}$ от оси вращения можно записать

$$B_z = B_0 - B_0 \frac{\varpi^2}{r_{\text{core}}^2}. \quad (16)$$

Этому полю соответствует следующая функция потока

$$\Psi = \pi \varpi^2 B_0 - \frac{1}{2} \pi B_0 \frac{\varpi^4}{r_{\text{core}}^2}. \quad (17)$$

В результате, вблизи оси вращения в первом порядке по величине Ψ мы по-прежнему имеем $A_1(\Psi) \approx A_3(\Psi) \approx \Psi/\pi$. Однако теперь A_2 уже будет отлична от нуля

$$A_2 \approx -\frac{\Psi^2}{\pi^2 r_{\text{core}}^2}. \quad (18)$$

В итоге, подставляя выражения для A_1 , A_2 и A_3 в общую формулу (13), имеем

$$\Omega_F(0) \approx \frac{\Omega_H}{2} \left(1 - \frac{c^2}{\Omega_H^2 r_{\text{core}}^2} \right). \quad (19)$$

Если же выразить здесь r_{core} с помощью соотношения (15), то

$$\Omega_F(0) \approx \frac{\Omega_H}{1 + \sqrt{1 + 1/k^2}}. \quad (20)$$

Как мы видим, при наличии плотной сердцевины угловая скорость на оси джета $\Omega_F(0)$ может быть меньше $\Omega_H/2$. В частности, для слаборелятивистского течения $k = 1$ получаем $\Omega_F(0) = 0.41\Omega_H$.

Применим теперь нашу модель для анализа результатов численного моделирования, проведенного в работе Маккини и др. (2012), в которых плотная сердцевина также имеет место. Согласно этим результатом, вблизи горизонта черной дыры

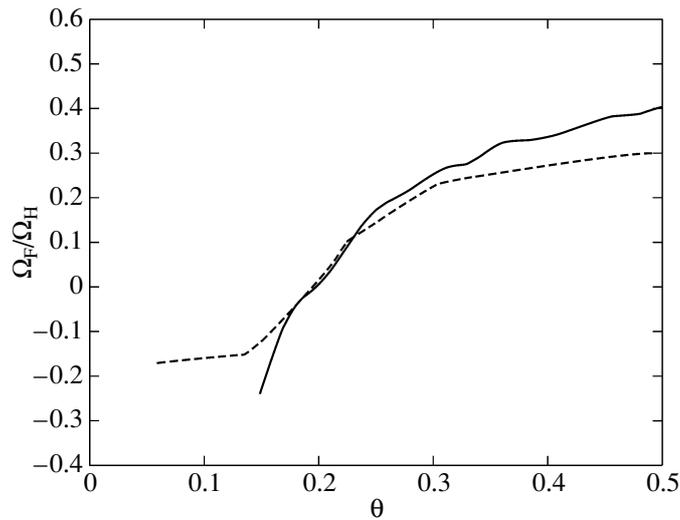


Рис. 3. График Ω_F/Ω_H на горизонте в зависимости от полярного угла θ , полученный на основе аналитической модели, описанной в данной статье (сплошная линия) и график из работы Маккини и др. (2012) (штриховая линия).

магнитное поле с хорошей точностью можно считать радиальным. Тогда по графику $B_r(r_H, \theta)$ можно получить график функции магнитного потока $\Psi(r_H, \theta)$, а затем и график $A_3(\Psi)$. Вблизи оси на больших расстояниях течение можно с хорошей точностью считать цилиндрическим, поэтому в этой области можно положить $B_z \approx B_r$ и использовать график радиального магнитного поля на $r = 30r_g$. Однако непосредственно на оси магнитное поле завышено, что связано с особенностями численного метода.

Рассмотрим теперь модельное магнитное поле

$$B_z = \frac{B_0}{1 + \varpi^2/r_{\text{core}}^2} + B_1, \quad (21)$$

где B_0, B_1 и r_{core} есть параметры задачи. Выберем их таким образом, чтобы, во-первых, график функции $B_z(\theta)$ при малых θ был близок к графику $B_r(30r_g, \theta)$ из работы Маккини и др. (2012). Во-вторых, полный поток магнитного поля, соответствующий этому B_z , должен совпадать с полным потоком магнитного поля на горизонте. Последнее условие основано на свойстве сохранения магнитного потока и том факте, что значительная часть магнитного потока, выходящего с горизонта черной дыры, далее сосредотачивается внутри джета, т.е. вблизи оси. Модельному магнитному полю (21) соответствует следующая функция потока

$$\Psi = \pi r_{\text{core}}^2 B_0 \ln(1 + \varpi^2/r_{\text{core}}^2) + \pi B_1 \varpi^2. \quad (22)$$

Такая функция потока не дает возможность аналитически получить обратную зависимость $\varpi(\Psi)$, а следовательно, и зависимости $A_1(\Psi)$ и $A_2(\Psi)$. Однако эти зависимости можно получить численно

и с помощью формулы (13) найти профиль угловой скорости $\Omega_F(\Psi(\varpi))$.

На рис. 3 представлен график, где по вертикальной оси откладывается величина Ω_F/Ω_H на горизонте черной дыры, а по горизонтальной оси — полярный угол θ . При этом интервал углов был выбран из следующих соображений. При очень малых θ магнитное поле, полученное в численном моделировании, расходится, что, скорее всего, связано с особенностями численного метода. С другой стороны, при больших θ будет нарушаться предположение о том, что магнитное поле вертикально. Как мы видим, предложенная модель находится в отличном согласии с результатами численного счета. Заметим, что вблизи оси Ω_F принимает отрицательные значения, что также согласуется с работой Маккини и др. (2012).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено исследование новой аналитической модели магнитосферы черной дыры, основанной на ранее не рассматривавшейся геометрии магнитных поверхностей: радиального магнитного поля вблизи горизонта и вертикального поля на больших расстояниях от черной дыры. Показано, что при наличии плотной сердцевинки вблизи оси джета имеет место отличное согласие рассмотренной модели с результатами численного моделирования. И это при том, что аналитические расчеты были выполнены в рамках простейшего бессилового приближения, а также в предположении об осесимметричности и стационарности течения, тогда как в работе Маккини и др. (2012) проводилось трехмерное численное моделирование

в полной МГД-версии, учитывающее нестационарность рассматриваемых течений.

Подчеркнем, что отрицательные значения угловой скорости Ω_F скорее всего связаны с трудностями численной процедуры вблизи оси вращения. Поэтому в действительности не следует ожидать появления области с обратным вращением вблизи оси джета. Для нас здесь было важно показать лишь то, что зная структуру магнитного поля вблизи горизонта черной дыры и в районе струйного выброса, можно воспроизвести получаемый самоогласованным образом профиль угловой скорости с помощью простой аналитической модели.

Хорошее согласие между теорией и результатами численного моделирования еще раз показывает, что осесимметричные стационарные течения, для которых за последние три десятка лет удалось получить достаточно много аналитических результатов, остаются хорошей основой для анализа процессов, происходящих в реальных астрофизических источниках. Одно из таких свойств состоит в том, что несмотря на турбулентный характер течения в области над аккреционным диском, вблизи оси вращения течение остается достаточно регулярным. Поэтому есть надежда, что сформулированные ранее простые аналитические асимптотики (и, в частности, утверждение о том, что структура магнитного поля вблизи горизонта должно быть близко к радиальному) будут востребованы и в дальнейшем.

Наконец, отметим, что параболическое поле, при котором существенная часть магнитных силовых линий пересекает экватор внутри эргосферы, потребовало бы существования источника энергии непосредственно в аккреционном диске. В стационарной задаче такая ситуация вряд ли возможна. Тот же факт, что обсуждавшиеся выше трехмерные расчеты приводят к квазипараболической структуре магнитных поверхностей, связана, на наш взгляд, просто с достаточно большой величиной внешнего давления, в результате чего радиус джета лишь в несколько раз превышает радиус горизонта

черной дыры. На самом же деле, как хорошо видно из структуры самых внутренних областей магнитосферы, приведенных в работе Маккини и др. (2012), через экватор проходит лишь очень малая часть магнитных силовых линий.

Авторы выражают благодарность А. Чеховскому за предоставленные данные численного моделирования, А.А. Филиппову за полезное обсуждение, и Министерству образования и науки РФ за финансовую поддержку (соглашение 8525).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бескин В.С., Успехи физ. наук **180**, 1241 (2010) [V. S. Beskin, Phys. Usp. **53**, 1199 (2010)].
2. Бескин В.С., Истомин Я.Н., Парьев В.И., Астрон. журн. **69**, 1258 (1992).
3. Бескин, Нохрина (V.S. Beskin and E.E. Nokhrina), MNRAS **397**, 1486 (2009).
4. Бландфорд, Знайек (R.D. Blandford and R.L. Znajek), MNRAS **179**, 433 (1977).
5. Гош, Абрамович (P. Ghosh and M.A. Abramowicz), MNRAS **292**, 887 (1997).
6. Долеман и др. (S.S. Doeleman, V.L. Fish, D.E. Schenck, et al.), Science **338**, 355 (2012).
7. Истомин, Парьев (Ya.N. Istomin and V.I. Pariev), MNRAS **267**, 629 (1994).
8. Кардашев Н.С., Успехи физ. наук **179**, 1191 (2009) [N. S. Kardashev, Phys. Usp. **52**, 1127 (2009)].
9. Комиссаров и др. (S. Komissarov, M. Barkov, N. Vlahakis, and A. Königl), MNRAS **380**, 51 (2006).
10. Маккини и др. (J.C. McKinney, A. Tchekhovskoy, and R.D. Blandford), MNRAS **423**, 2083 (2012).
11. Пансли (B. Punsly), *Black Hole Gravitohydro-magnetics* (Berlin: Springer, 2001).
12. Порт и др. (O. Porth, Ch. Fendt, Z. Meliani, and B. Vaidya), Astrophys. J. **737**, 42 (2011).
13. Торн, Макдональд (K.S. Thorne and D. MacDonald), MNRAS **198**, 339 (1982).
14. Ферраро (V.C.A. Ferraro), MNRAS **97**, 458 (1937).
15. Чеховской и др. (A. Tchekhovskoy, J. McKinney, and R. Narayan), Astrophys. J. **699**, 1789 (2009).