Лабораторная работа

Изучение задачи нескольких тел посредством компьютерного моделирования

С..А. Чернягин

Московский физико-технический институт (Государственный университет)

Кафедра теоретической физики

Аннотация

Основная задача данного практикума – изучение движения нескольких тел в порождаемом ими гравитационном поле. Задача движения тел в гравитационных полях является одной из важнейших астрофизических задач и имеет множество сфер применения таких как движение в планетных системах, динамика галактик и скоплении так и движение в сверхсильных гравитационных полях нейтронных звезд и черных дыр. В данной лабораторной работе есть возможность моделировать движение как в слабых гравитационных полях, с ньютоновским потенциалом, так и с потенциалом Пачиньского-Виита, позволяющим качественно учесть поправки к ньютоновскому в сильных гравитационных полях.В ходе работы студенты получат возможность наглядно представить себе динамику тел в различных полях и конфигурациях начальных условий.

Задачи:

1. Произвести моделирование ряда задач в системе трех тел в слабом гравитационном поле с целью установить ряд закономерностей в классической задаче трех тел.
2. Смоделировать движение одного и двух тел в гравитационном поле сверхмассивной черной дыры, исследовать прецессию орбиты и разрыв тесной двойной пары в поле черной дыры.
3. Провести моделирование движения тела малой массы в поле двойной черной дыры.

Необходимые ресурсы: Программа расчета траекторий в системе нескольких гравитационно связанных тел. Компьютер на базе x86- совместимой архитектуры, и, желательно, широкоформатный (16:9) монитор.

Контрольные вопросы:

1. Записать гравитационные силы, действующие на каждое из тел в задаче трех тел в векторном виде.
2. Определить связь между параметрами орбиты двух тел и физическими величинами-полной энергией, моментом импульса и проекцией момента импульса на выделенное направление.
3. Что такое гравитационный радиус и как он зависит от массы тела.
4. Записать потенциал Пачиньского-Вииты и найти силу, действующую на пробное тело в таком потенциале.
5. Если есть два тела, причем оба массивные, как будет выглядеть сила действующая на каждое из них в потенциале Пачиньского-Вииты.

1. Общее описание работы.

Предлагаемая практическая работа дает возможность ознакомиться с основными закономерностями движения нескольких тел в гравитационных полях, как в слабых, так и сильных, в которых существенны эффекты общей теории относительности.

В силу своего дальнодействия и отсутствия разных по знаку гравитационных зарядов, гравитационное поле является доминирующим в космических масштабах. В основном именно оно определяет законы движения тел в масштабах от десятков- сотен тысяч километров до размеров наблюдаемой Вселенной. В планетных системах, где гравитационные поля и скорости движения малы в основном достаточно пользоваться ньютоновской механикой. Собственно в нашей Солнечной системе первый объект, движение которого не описывалось классической ньютоновской механикой, как и следовало ожидать, оказался Меркурий- ближайшая к Солнцу планета. Прецессия перигелия его орбиты составляет 43” в столетие и не может быть объясненена классической ньютоновской механикой. У остальных планет этот эффект практически неизмерим из-за большей удаленности и еще и из-за того, что орбита Меркурия обладает ярко выраженной эллиптичностью, а орбиты Земли и Венеры почти круговые.

Итак, рассмотрим сначала движение нюьтоновском гравитационном поле. В этом поле есть важная задача, которая допускает точное аналитическое решение- кеплерова задача двух тел. Итак рассмотрим ее. Пусть есть два тела с массами M и m и они движутся в созданном ими гравитационном поле. Тогда радиус-вектор тела массы m обозначим **x**, а радиус-вектор тела массы M обозначим **X**. Запишем уравнения движения:

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -G\frac{mM}{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|^3}(\mathbf{x}-\mathbf{X})$$

$$M\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = -G\frac{mM}{|\mathbf{X}-\mathbf{x}|^3}(\mathbf{X}-\mathbf{x})$$

Умножим первое уравнение на M, а второе на m и вычтем из второго уравнения первое:

$$mM\frac{d^2(\mathbf{X}-\mathbf{x})}{dt^2} = -G\frac{mM(M+m)}{|\mathbf{X}-\mathbf{x}|^3}(\mathbf{X}-\mathbf{x})$$

Теперь разделим левую и правую части на $M+m$, и обозначая вектор **X-x** за **R**, имеем:

$$\frac{mM}{(M+m)}\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -G\frac{mM}{|\mathbf{R}|^3}\mathbf{R}.$$

Таким образом мы привели исходную задачу к одномерной задаче движения в центральном поле с радиусом-вектором равным вектору проведенному от одного тела к другому и массой, равной приведенной массе $\frac{mM}{(M+m)}$. Такая задача имеет точное решение и приводит к движению по орбите с формой конического сечения, в фокусе которого находится один из гравитирующих центров.

Для двух гравитирующих тел в ньютоновском потенциале сохраняются следующие величины (функции от адиабатических инвариантов) – *большая полуось орбиты a* (функция от полной энергии системы), *эксцентриситет орбиты e* (функция от полного углового момента количества движения) и наклон *плоскости орбиты к выделенному направлению i* (функция от проекции углового момента на выделенное направление).

Такой подход позволяет решить точно только задачу двух тел. Если же гравитирующих центров больше двух, то в общем случае такая задача не имеет точного аналитического решения.

В таком случае для приближенного аналитического решения пользуются теорией возмущений, разделяя взвимодействия между телами на сильные и слабые, или для практических приложений, например для вычисления эфемерид планет в солнечной системе, применяют численные методы.

Однако, как уже упоминалось выше, ньютонова механика дает точные результаты только в относительно слабых гравитационных полях, например, с хорошей точностью она применима для движения тел в солнечной системе. Но если мы будем рассматривать движение тел в окрестности сильных гравитационных центров (вблизи компактных и массивных объектов- белых карликов, нейтронных звезд и черных дыр), то учет эффектов общей теории относительности является необходимым. Точное решение уравнений теории относительности является существенно трудоемкой задачей, поэтому для качественного рассмотрения движений тел в поле больших масс пользуются некоторыми приближениями потенциала взаимодействия. Одним из наиболее удачных приближений является потенциал Пачиньского-Вииты:

$$U(R) = -G\frac{mM}{R - r_g}$$

Здесь R-расстояние между телами, r_g- гравитационный радиус более массивного тела $r_g = \dfrac{2GM}{c^2}$.

c-скорость света. Для примера приведем гравитационные радиусы Солнца и Земли, они равны соответственно около 3 километров и 1 сантиметра. То есть действительно, в солнечной системе поправки теории относительности- величины малые.

2. Описание программы расчета траекторий.

В данной лабораторной работе для исследования движения в гравитационных полях применяется программа расчета траекторий, основанная на численном интегрировании системы уравнений движения методом Рунге-Кутта. Максимальное число гравитирующих тел- четыре. Для запуска программы необходимо запустить исполняемый файл *trajectory.exe*. При этом на экране появится заставка программы (*Рис.1*). и 2 кнопки *«Запуск программы»* и *«Выход из программы»*

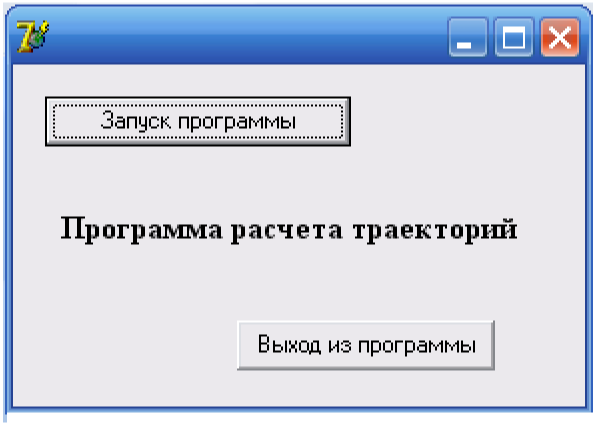

Рис.1 Основное Меню.

При нажатии клавиши *«Выход из программы»* осуществится выход из программы, а по нажатию клавиши *«Запуск программы»* осуществляется переход к разделу ввода параметров, рисования траекторий и вывода текущих элементов взаимных орбит (*Рис.2*).

Программа позволяет вводить количество тел и начальные условия движения- координаты скорости и массы тел, при этом первыми вводятся координаты и скорости по оси *Ox*, вторыми по оси *Oy*, третьими по оси *Oz*. Траектория отображается в плоскости Oxy. **Разделительным символом между целой и дробной частями при вводе рациональных чисел в данной программе является запятая** При этом используется следующая система единиц: Координаты тел измеряются в астрономических единицах (размерах орбиты Земли вокруг Солнца 149,6 млн километров). Скорости измеряются в скоростях Земли вокруг Солнца (за единицу принимается скорость 29786м/с). Массы измеряются в массах Солнца ($2*10^{30}$кг). Таким образом, если задать количество тел равное двум, координату одного из них по оси *Ox* равной единице а по остальным осям нулю, скорости по всем осям кроме *Oy* равными нулю, а по оси *Oy* равной единице, массу этого тела задать 0,000001, а все координаты и скорости второго тела принять равными 0, а массу задать равной единице, то получим движение по круговой орбите. Нажимая на клавишу *«Рисовать»* получаем следующую картинку. Для остановки счета необходимо нажать клавишу *«Escape»* на клавиатуре, после этого можно осуществлять ввод новых параметров или выйти в основное меню (*Рис.1*) по нажатию клавиши *«К основному меню»*.

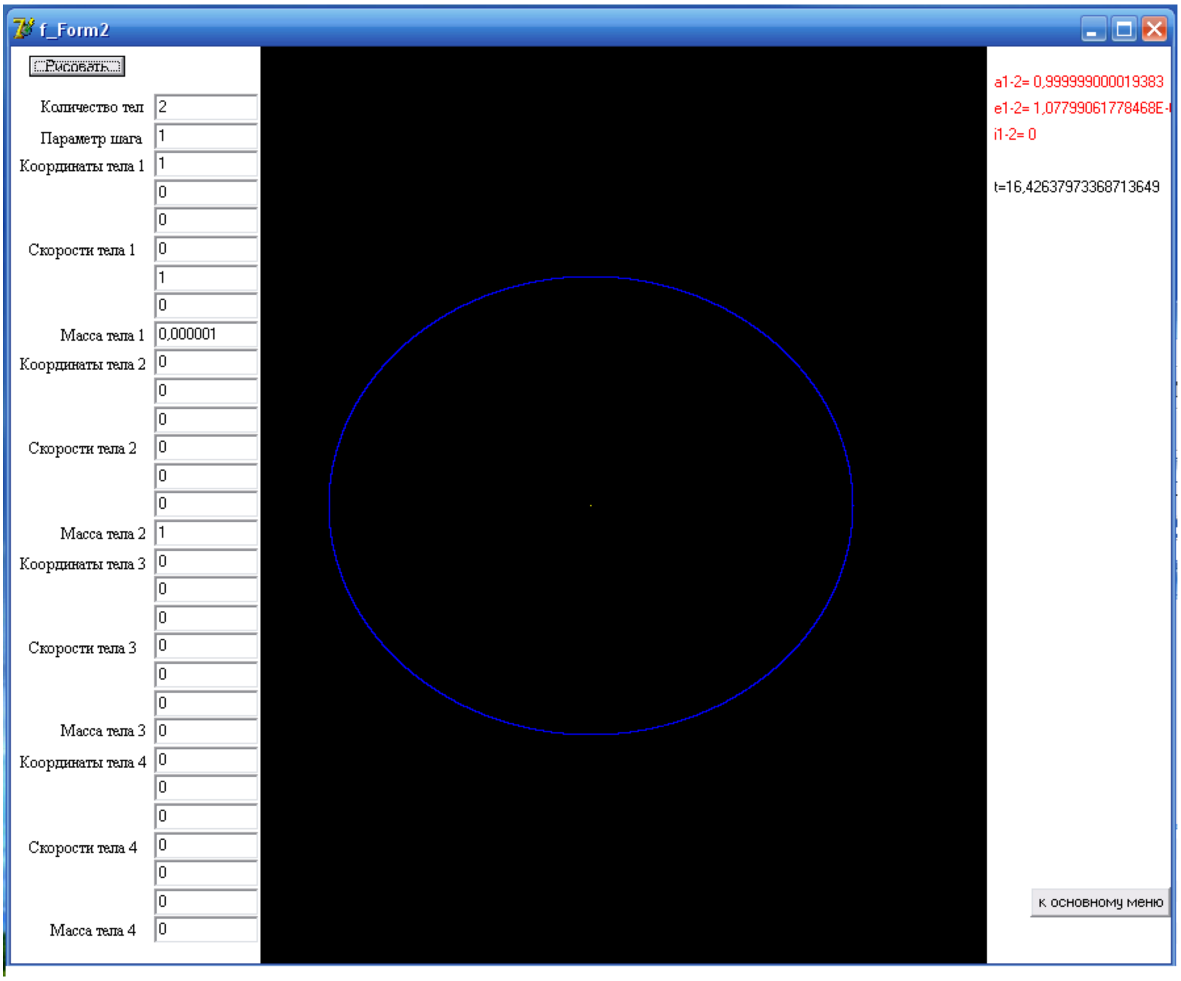

Рис.2 Раздел ввода параметров, рисования орбит и вывода текущих элементов орбит.

Также в программе предусмотрена возможность приостановки процедуры вывода траекторий по нажатию клавиши *«BackSpace»* на клавиатуре и продолжение процедуры вывода по нажатию клавиши *«Пробел»* (это удобно для исследования и рассмотрения траекторий в прмежуточные моменты времени). В правом верхнем углу отображаются текущие взаимные элементы орбит, причем красным цветом выделяются взаимные параметры тел, орбиты которых близки к эллиптическим (взаимодействие между ними много больше взаимодействия с другими телами гравитирующей системы).

3. **Этапы выполнения Работы.**

Программа расчета траекторий использует потенциал Пачиньского-Вииты, который при небольших гравитационных полях переходит в ньютоновский. Поэтому программа позволяет работать как со слабыми гравитационными полями, так и с сильными.

А. Слабые гравитационные поля.

1. Построить траекторию движения Земли вокруг Солнца, Убедиться в том, что она круговая, записать параметры орбиты.

2. Построить траекторию движения тела с массой равной массе Солнца по орбите вокруг тела с такой же массой при начальных параметрах движения (скоростях и координатах) из предыдущего пункта, записать параметры орбиты.

3. Добавить в эту систему третье маломассивное тело с координатами (1,1. 0. 0) и скоростями (1. 0. 0) и массой 0,0001 массы Солнца и произвести вычисления орбит и выписать параметры. Какие из тел вращаются по почти эллиптическим орбитам?

4.В предыдущем примере увеличить координату x до 1,2. Как изменилась эволюция траекторий? Почему именно самое легкое тело было выброшено из системы?

5.Перебором подобрать граничное значение (с точностью до сотых долей астрономической единицы) начальной координаты по оси Ox, чтобы движение было на грани связанного.

6.Построить устойчивую систему из двух маломассивных тел и одного массивного. Какие 2 категории движений можно получить (параметры орбит скольких тел могут быть одновременно постоянно выделены красным цветом) и как их реализовать?

7.Рассмотреть движение трех тел одинаковой массы равной Солнечной, построить систему с обменом спутниками. Почему в большинстве случаев эти системы распадаются на пару тесно связанных тел и одиночное? Как зависит энергия разлета от большой полуоси образовавшейся пары.

8. В тройной системе звезд с одинаковой массой, состоящей из тесной пары (0,2 астрономической единицы и относительной скоростью в 2 скорости Земли по орбите вокруг Солнца), движущейся в плоскости Oxz и третьего тела движущегося в начальный момент на удалении 1 а.е. в плоскости Oxy изучить зависимость произведения угла наклона на эксцентриситет орбиты тесной пары.

Б. Сильные гравитационные поля.

1. Как надо изменить начальную скорость легкого тела в задаче 1 пункта А, чтобы получить прецессию орбиты из-за поправок теории относительности? При каком значении скорости начинает хорошо прослеживаться прецессия орбиты?

2. Построить движение тела солнечной массы в поле сверхмассивной черной дыры с массой миллион масс солнца, при начальном расстоянии 1 а.е. от черной дыры (начальное значение вектора скорости ортогонально радиусу вектору). Экспериментально определить при каких минимальных начальных скоростях (с точностью до 1 скорости Земли) не происходит падение на черную дыру.

3. Построить движение тела солнечной массы в поле сверхмассивной черной дыры с массой десять миллионов масс солнца, при начальном расстоянии 1 а.е. от черной дыры.

Экспериментально определить при каких минимальных начальных скоростях (с точностью до 1 скорости Земли) не происходит падение на черную дыру

4. Рассмотреть разрыв звездной пары звезд солнечной массы в поле сверхмассивной черной дыры входные параметры взять из (*Рис.3*).

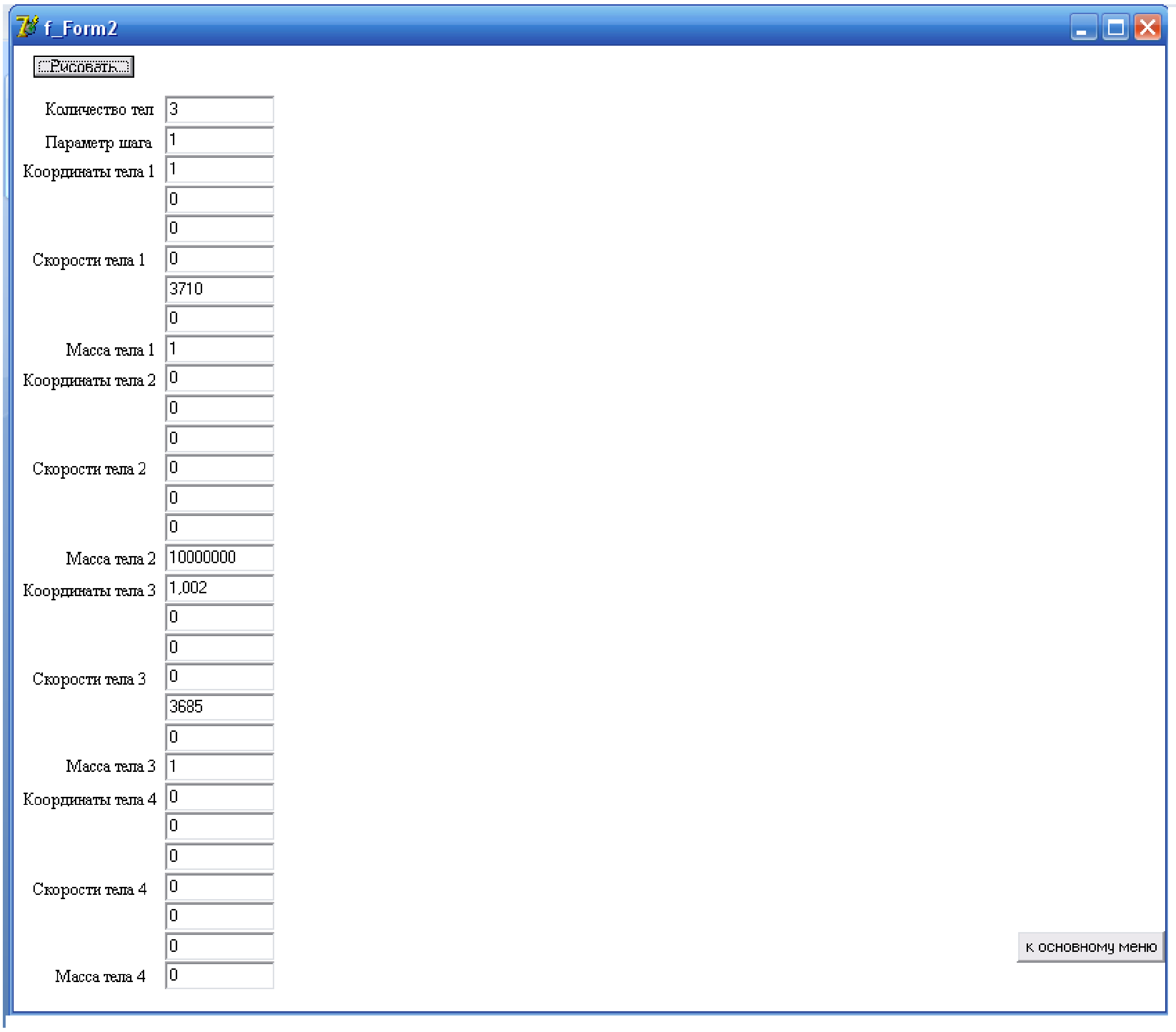

Рис 3. Входные данные для пункта 4Б.

Литература

1. *Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М.* Механика. — Издание 5-е, стереотипное. — М.: Физматлит, 2004. — 224 с. — («Теоретическая физика», том I).

2. Paczyński, Bohdan; Wiita, Paul J. (August 1980), "Thick accretion disks and supercritical luminosities", *Astronomy & Astrophysics* **88**: 23–31,