

Лабораторная работа 1.

Построение углового спектра мощности реликтового излучения

О. В. Верходанов^{a*};

^a *Специальная астрофизическая обсерватория РАН, Нижний Архыз, Карачаево-Черкесия, Россия*

Аннотация

Целями данного практикума являются ознакомление с процессом анализа данных микроволнового излучения на небесной сфере, исследование карт реликтового излучения, построение спектра мощности. Необходимо сгенерировать собственную карту реликтового излучения на небесной сфере, используя модель спектра в сценарии эволюции Вселенной Λ CDM и гипотезу о случайных гауссовых полях первичных возмущений, добавить точечные источники, сгладить ее гауссовой диаграммой и исследовать поведение спектра мощности в зависимости от заданных условий. В результате выполнения работы отрабатываются навыки работы с современными методами и системами анализа данных микроволнового фонового излучения на небесной сфере.

Задача:

1. Построить карту CMB в рамках Λ CDM.
2. Сгенерировать шаблон карты с радиоисточниками и сгладить ее гауссовой диаграммой направленности.
3. Найти спектр мощности суммы этих карт.

Необходимые ресурсы:

Пакет анализа данных фоновых излучений на сфере GLESP¹ [1], библиотека расчета быстрого преобразования Фурье FFTW² версии не ранее 3.2, Интернет, компьютер с ОС Linux.

Продолжительность работы: 1–2 дня.

Проверочные вопросы:

1. Что такое спектр мощности карты излучения ?
2. Какое количество пятен на сфере образует мультиполь с номером ℓ ?
3. На каких мультиполях вклад точечных источников в спектр мощности становится существенным ?
4. Почему при вычитании дипольной компоненты не меняется остальной спектр ?
5. Сколько пиков на спектре мощности CMB в модели Вселенной Λ CDM до $\ell < 1000$?

*e-mail: vo@sao.ru

¹<http://www.glesp.nbi.dk>

²<http://www.fftw.org>

1 Описание работы

Предлагаемая лабораторная работа позволит конспективно изучить некоторые процедуры в обработке карт реликтового излучения. Этот практикум является вспомогательной частью для Лекций 3 [2] и 4 [3] поможет почувствовать особенности анализа данных на сфере. Задание включает в себя самостоятельное описание и примеры использования процедур.

Говоря о важности понимания распределения микроволнового фона и умения обращаться с мультиполями и угловым спектром мощности, напомним, что исследование реликтового излучения — центральная проблема современной наблюдательной космологии. Только один факт — две Нобелевские премии: за открытие самого излучения (премия 1978 г.) и за обнаружение его флуктуаций (премия 2006 г.) — говорит о международном признании важности этого направления исследований. Космическое микроволновое фоновое излучение, предсказанное Г.Гамовым в 1946 г. и обнаруженное Пензиасом и Уильсоном в 1965 г., является основным доказательством теории горячей Вселенной. Реликтовое излучение образовалось на красном смещении $z \sim 1100$, когда возраст Вселенной составлял всего около 380 тыс. лет. В то время это было оптическое излучение горячего газа с температурой ~ 3000 К, однородно заполнявшее всю Вселенную. Из-за расширения Вселенной и, как следствие, ее охлаждения, произошла рекомбинация водорода (ядра и электроны объединились в атомы) и излучение стало распространяться свободно. В ходе расширения Вселенной температура реликтового излучения уменьшилась примерно в тысячу раз. Сейчас это излучение характеризуется очень высокой степенью изотропии (до $\delta T/T = 10^{-5}$ на различных угловых масштабах), т.е. одинаковой интенсивностью по различным направлениям. Но теоретически оно не может быть абсолютно однородным, т.к. в наблюдаемой Вселенной существуют структуры (галактики и их скопления), формирование которых должно было отразиться на однородности космического микроволнового фона (СМВ — cosmic microwave background).

Современные галактики и их скопления образовались в результате роста незначительных по амплитуде неоднородностей плотности вещества, существовавших до рекомбинации водорода во Вселенной. В любой космологической модели можно найти закон роста амплитуды неоднородностей в ходе расширения Вселенной. Для этого надо знать, каковы были амплитуды неоднородности вещества в момент рекомбинации. Это позволяет установить, за какое время они могли вырасти и стать порядка единицы. После этого области с плотностью, значительно превышающей среднюю, должны были выделиться из общего расширяющегося фона и дать начало галактикам и их скоплениям. Амплитуда начальных неоднородностей плотности в момент рекомбинации связана с уровнем флуктуаций отделившегося излучения: поскольку до рекомбинации излучение было жестко связано с веществом (электроны рассеивали фотоны), то неоднородности в пространственном распределении вещества приводили к неоднородностям плотности энергии излучения, т.е. к различию температуры излучения в разных по плотности областях Вселенной. Теория предсказывает существование периодической зависимости средней величины флуктуации от углового масштаба и описывает их в рамках физики звуковых волн в плазме. Впервые этот эффект появления неоднородностей был предсказан А.Д.Сахаровым в 1965 г. [4] и называется сейчас Сахаровскими осцилляциями. Осцилляции возникают в результате взаимодействия адиабатических флуктуаций плотности вещества с излучением в звуковых волнах вблизи момента рекомбинации водорода. Существует различие в амплитуде неоднородностей в зависимости от углового масштаба, и оно проявляется в пиках на спектре мощности реликтового излучения, характеризующем распределение температуры СМВ на небесной сфере. Положение и величина этих пиков зависят от параметров космологической модели, в частности, от величины вклада барионного вещества в общую космологическую плотность, плотности темной энергии, параметра Хаббла, массы нейтрино и других. После рекомбинации вещество перестает взаимодействовать с излучением и становится для

него прозрачным. Таким образом, наблюдаемое сейчас реликтовое излучение хранит всю информацию о неоднородностях плотности во Вселенной в период рекомбинации. Флуктуации СМВ были открыты в 1992 г. при анализе данных наблюдений специализированного спутника COBE (COsmic Background Explorer), запущенного в 1989 г. и в течение нескольких лет проводившего измерение микроволнового фона в радиодиапазоне на трех частотах.

Анализ данных реликтового излучения на всей небесной сфере содержит несколько этапов, включающих

1. регистрацию данных в формате временных рядов,
2. пикселизацию,
3. преобразование карты в сферические гармоники,
4. разделение компонент излучения,
5. анализ статистики сигнала,
6. вычисление спектра $C(\ell)$ – мощности сигнала в зависимости от номера гармоники (мультиполя),
7. оценку космологических параметров.

Каждый этап представляет собой отдельную задачу, решаемую различным набором методов. Поясним частично приведенные шаги. Карты СМВ строятся на полной сфере на основании данных, полученных на космических телескопах. До 2010 г. были две космические миссии — это зонды COBE [5] и WMAP³ [6], которые проводили обзор неба на нескольких частотах с целью поиска искажений реликтового фона. За счет вращения спутника последовательно измерялась температура фона на небе, т.е. строились временные ряды $T(t)$, где в каждый момент времени в соответствии с выбранным временным шагом было проведено измерение. Шаг обычно выбирается равным в угловом измерении трети размера полуширины диаграммы направленности. Полученные данные передавались на Землю, и с учетом знания движения зонда строилась сетка пикселизации. Т.е. в каждом пикселе сферы в зависимости от небесных координат и с учетом формы пиксела производилось осреднение измеренных значений температуры. В 2010 г. была запущена миссия Planck, которая представит результаты и карты неба в 2013 г.

Для обработки данных используется гармонический анализ на сфере, включающий разложение по сферическим гармоникам (мультиполям) и их анализ. Стандартное разложение вариаций температуры на небе $\Delta T(\theta, \phi)$ на сферические гармоники $Y_{\ell m}$ записывается следующим образом:

$$\Delta T(\theta, \phi) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (1)$$

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(x) e^{im\phi}, \quad (2)$$

$$x = \cos \theta,$$

где $P_{\ell}^m(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра.

Для непрерывной функции $\Delta T(x, \phi)$ коэффициенты разложения $a_{\ell m}$ записываются как

$$a_{\ell m} = \int_{-1}^1 dx \int_0^{2\pi} \Delta T(x, \phi) Y_{\ell m}^*(x, \phi) d\phi, \quad (3)$$

³<http://lambda.gsfc.nasa.gov>

где $Y_{\ell m}^*$ обозначает комплексное сопряжение $Y_{\ell m}$.

Обратим внимание, что сферические гармоники $Y_{\ell m}$ и коэффициенты при них $a_{\ell m}$ являются а) комплексными, б) двумерными. Вариации температуры $\Delta T(\theta, \phi)$ являются, естественно, вещественной функцией координат. Разложение по сферическим гармоникам ортогонально, т.е. если удалить какую-либо гармонику из карты, оставшиеся не изменяются. Сферическая гармоника называется мультиполем. Ей приписывается номер ℓ . Каждая гармоника представляется набором из $2\ell + 1$ мод, описывающих положение пятен на сфере и отмеченных в обозначении индексом m . Наличие у каждого мультиполя двух мод (ℓ, m) есть следствие двумерности исходной карты. Первые гармоники имеют свои названия: монополь ($\ell = 0$), диполь ($\ell = 1$), квадруполь ($\ell = 2$) и октуполь ($\ell = 3$). В названии гармоник таким образом прослеживается количество пятен, которые они формируют на сфере — 2^ℓ . Монополь — это фактически температура реликтового излучения (2.73 К), умноженная на площадь сферы. Диполь — это два пятна, горячее и холодное, размером с полусферу, используемых, например, для описания движения местной группы галактик (реально в излучение фона входят также космологический диполь и диполь, связанный с излучением нашей Галактики). При анализе неоднородностей фона обычно из карты исключают монополь и диполь, тем самым приводя средний сигнал к нулевому значению. Номер мультиполя ℓ соответствует характерному угловому масштабу $2\pi/\ell$ в радианах в одномерном центральном сечении. На Рис. 1 приведены различные виды квадруполей.

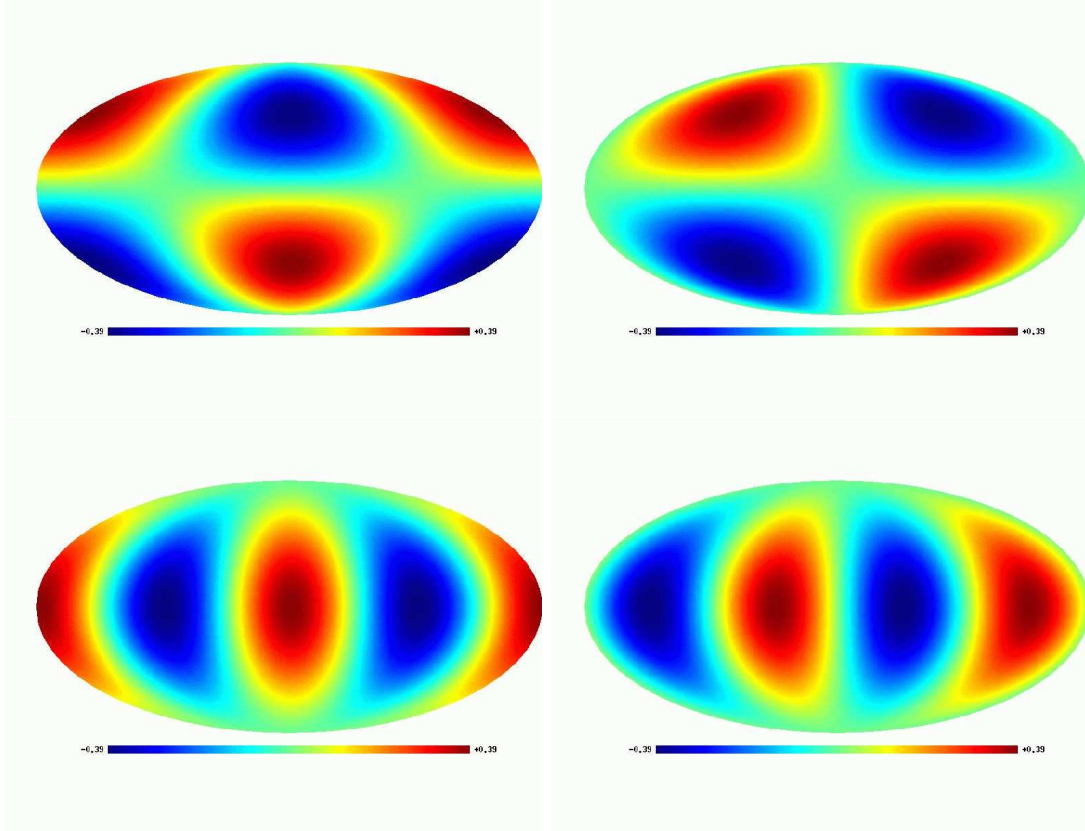


Рис. 1: Сферические функции (квадруполи): $Y_{21}(\theta, \phi)$ (cos-компонент: $a_{21} = (1, 0)$) (верхний слева), $Y_{21}(\theta, \phi)$ (sin-компонент: $a_{21} = (0, 1)$) (верхний справа), $Y_{22}(\theta, \phi)$ (cos-компонент: $a_{22} = (1, 0)$) (нижний слева), $Y_{22}(\theta, \phi)$ (sin-компонент: $a_{22} = (0, 1)$) (нижний справа).

Получив разложение по сферическим гармоникам, можно перейти к процедуре разделения компонент. Реликтовое излучение, будучи чернотельным, имеет одинаковые характеристики на всех частотах, в то время как вклады нашей Галактики и источников меняются. Можно записать для регистрируемого сигнала

Сигнал = (РИ + синхротрон.И. + И.пыли + свободно-свободное И. + РадиоИсточники)
 * Диаграмма + Шум,

где символ '*' обозначает процедуру свертки, а символ 'И' – термин “излучение”.

Вклад нашей Галактики для синхротронного излучения, излучения пыли и свободно-свободного излучения оценивается по дополнительным наблюдениям и экспериментам. Для этого измеряются спектральные индексы, показывающие зависимость потока излучения от длины волны и углового масштаба. Зная диаграмму направленности, догадываясь о свойствах шума, можно решить системы уравнений и выделить реликтовое излучение (РИ) из регистрируемого сигнала. Задача эта нетривиальна, и именно в этой процедуре скрыты самые большие подводные камни, например, такие как неточное знание поведения фоновых компонент в зависимости от частоты наблюдения и углового масштаба, диаграммы направленности антенна и шум системы.

Выделив реликтовое излучение, можно, с одной стороны, построить его спектр мощности и по его форме оценить космологические параметры, а, с другой стороны, исследовать статистику флуктуаций. Спектр мощности СМВ показывает, сколько энергии на каких угловых масштабах содержится в приходящем излучении. Для полной сферы он определяется как среднее значение квадратов всех мод гармоник

$$C(\ell) = \frac{1}{2\ell + 1} \left[|a_{\ell 0}|^2 + 2 \sum_{m=1}^{\ell} |a_{\ell, m}|^2 \right].$$

В данном выражении удваиваются гармоники с модой $m > 0$, что объясняется комплексным сопряжением гармоник и, следовательно, равенством квадратов их амплитуд. Отметим, что при вычислении спектра мощности мы явно закладываем в анализ данных гипотезу о случайном гауссовом распределении амплитуд первичных возмущений, которое отражается и на распределении амплитуд гармоник реликтового излучения. Это гипотеза используется в процедуре осреднения всех мод m для заданного мультиполя ℓ . Вариация амплитуд мод гармоники для заданного ℓ происходит внутри допустимого интервала определяемого как cosmic variance.

Спектр мощности $C(\ell)$ отражает физические условия в ранней Вселенной и таким образом является функцией соответствующих космологических параметров [14],

$$C(\ell) \equiv C_{\ell}(h, \Omega_b h^2, \Omega_{CDM} h^2, \Omega_{\Lambda}, \Omega_{\nu}, n, \dots).$$

Здесь, в частности, указаны постоянная Хаббла $h = H_0/100$ км/с/Мпк, плотность барионной материи Ω_b , плотность скрытой массы Ω_{CDM} , плотность “темной энергии” Ω_{Λ} , плотность массивных нейтрино Ω_{ν} , показатель спектра адиабатических возмущений n и другие параметры. Полученные современные значения основных параметров такие: постоянная Хаббла $h = 0.704 \pm 0.014$, плотность вещества $\Omega_m = 0.2726 \pm 0.0016$, барионная плотность $\Omega_b = 0.0456 \pm 0.0016$, возраст Вселенной $t_0 = 13.75 \pm 0.11$ Гигалет, спектральный индекс $n_s = 0.963 \pm 0.016$ на масштабе $k = 0.05$ Мпк⁻¹, $\Omega_{\nu} h^2 < 0.0076$, что дает верхний предел на массу нейтрино 0.2 еВ [7], установленных на конец 2011 г., в комбинации WMAP7, ВАО (Барионные Акустические Осцилляции в распределении галактик [8]) и постоянной Хаббла H_0 [9]).

Такая модель Вселенной: с Λ -членом, холодной темной материей (CDM — cold dark matter) и начальной инфляционной стадией (быстрым расширением до момента 10⁻³⁷сек) — называется инфляционной Λ CDM-моделью. Решение функционала, связанного с подгонкой космологической модели к наблюдательным данным, в настоящий момент практически автоматизировано и выполняется программой *SAMB* [10] *SMBFast* [11], принимающей со своего входа космологические параметры и выдающей в виде результата гладкий спектр мощности флуктуаций микроволнового фонового излучения (Рис. 2).

На Рис. 2 слева приведена карта реликтового излучения, построенная по данным спутника WMAP (<http://lambda.gsfc.nasa.gov>) с разрешением $\ell \leq 100$. На том же рисунке

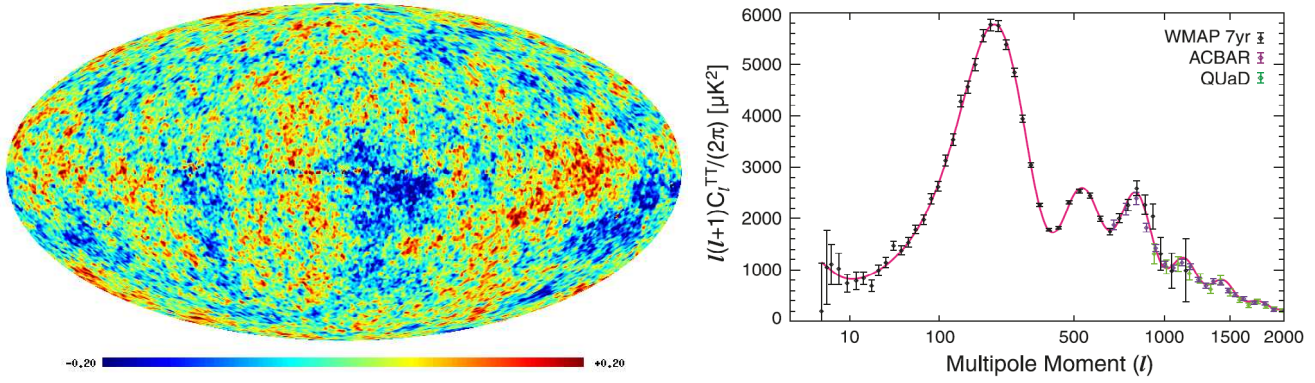


Рис. 2: Слева: карта ИС СМВ, построенная по данным работы миссии WMAP 7-го года в галактических координатах. Рисунок приведен с разрешением до $\ell_{max} = 150$. Справа: угловой спектр мощности $\ell(\ell + 1)C(\ell)/2\pi$ карты WMAP седьмого года наблюдений [7]. На рисунке также приведены результаты измерения углового спектра мощности флуктуаций температуры в экспериментах ACBAR и QUaD (показаны другим цветом). Сплошной линией показан модельный спектр для Λ CDM–космологии с параметрами, определенными на основе результатов миссии WMAP. Серым цветом показан диапазон cosmic variance. Рисунок воспроизведен с сайта <http://lambda.gsfc.nasa.gov>.

справа показан спектр мощности СМВ построенный по данным WMAP и других экспериментов.

В данной практической работе по анализу данных реликтового излучения можно выделить следующие этапы:

1. симуляция карты реликтового излучения для модели Вселенной Λ CDM.
2. Добавление в модельную карту радиоисточников с различной плотностью потока.
3. Сглаживание карты диаграммой направленности выбранного размера в области пространственных гармоник.
4. Вычисление спектра мощности.

2 Процедуры GLESP

На первом этапе необходимо сгенерировать карту по заданному спектру мощности. Угловой спектр мощности можно рассчитать, используя on-line программу *CAMB* по адресу

http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_camb_form.cfm.

Для анализа и дальнейшего моделирования можно использовать FITS-файл, содержащий таблицу в кодировке ASCII, либо заранее рассчитанный файл, доступный на сайте

http://sed.sao.ru/~vo/cosmo_school/presentations/vo/LCDM.dat,

в котором записана двухколоночная символьная таблица с номерами мультиполей и соответствующими значениями спектра мощности в модели Вселенной Λ CDM ($\Omega = 0.728$, $\Omega_{CDM} = 0.227$, $\Omega_b = 0.046$) [7].

Для моделирования карты используется программа '*cl2map*' пакета GLESP, которая запускается со следующими параметрами:

```
cl2map -Dl LCDM.dat -r 6 -lmax 1000 -nx 2001 -np 4002 -ao alm.fits -o map.fits
```

В формате задания этой команды присутствуют следующие ключи: '-Dl' — флаг показывает, что следующий параметр '*LCDM.dat*' — файл со спектром мощности; '-r' — флаг

показывает, что будет генерироваться случайный гауссовый шум, соответствующий случайным гауссовым полям начальных возмущений плотности, с некоторым стартовым номером посева, заданным следующим параметром строки (например, здесь 6); '*-lmax 1000*' — ключ показывает, что максимальный мультиполь, для которого будет генерироваться карта $\ell_{max} = 1000$; '*-nx 2001 -np 4002*' — ключи '*-nx*' и '*-np*' задают сетку пикселизации, определяющую число колец и количество пикселей в экваториальном кольце соответственно (число колец всегда должно быть не меньше $n_x = 2\ell_{max}$, а число пикселей в экваториальном кольце — $2n_x$, чтобы соблюсти теорему Найквиста и сделать пиксели квазиквадратными); ключ '*-ao*' показывает, что следующий параметр '*alm.fts*' — файл для вывода сгенерированных коэффициентов сферических гармоник $a_{\ell m}$ в виде FITS-файла; ключ '*-o*' показывает, что следующий параметр '*map.fts*' — файл для вывода сгенерированной карты флуктуаций реликтового излучения.

Посмотреть карту можно, переведя ее в GIF-картинку и отобразив, например, с помощью программы '*xv*':

```
f2fig map.fts -o map.gif; xv map.gif
```

Посмотреть коэффициенты $a_{\ell m}$ можно, переведя их из двоичного представления в ASCII-таблицу, с помощью программы '*alm2dl*':

```
alm2dl -g alm.fts > alm.dat; less alm.dat
```

На втором этапе работы по практикуму необходимо создать свой файл со списком радиоисточников, которые потом должны быть нанесены на небо. Файл должен содержать информацию не менее, чем о 20 источниках, записанную в следующем ASCII-формате:

```
hh:mm:ss1   dd:mm:ss1   amplitude1
hh:mm:ss2   dd:mm:ss2   amplitude2
hh:mm:ss3   dd:mm:ss3   amplitude3   ,
```

где в первой и во второй колонках приводятся экваториальные координаты радиоисточников, а в третьей — плотность потока в мЯн. Списки реальных источников можно получить, используя базу данных CATS⁴ [12]. Например, можно построить выборку радиоисточников обзора NVSS [13] (Рис. 3), проведенного на радиоинтерферометре VLA (США).

Для добавления к карте СМВ карты с источниками нужно сначала сгенерировать карту с источниками командой:

```
mappat -fp src.dat -o src.fts -nx 2001 -np 4002
```

Разрешение обеих карт (число колец и пикселей в экваториальном кольце) должно быть одинаковое. Ключ '*-fp*' говорит о том, что следующий параметр '*src.dat*' — файл со списком радиоисточников. Ключ '*-o*' используется для ввода имени выходного файла '*src.fts*'.

Далее обе карты: с СМВ и источниками, могут быть сложены с помощью команды '*difmap*':

```
difmap -sum src.fts map.fts -o map_src.fts
```

На третьем этапе практикума необходимо разложить на сферические гармоники новую карту '*map_src.fts*' и сгладить ее гауссовой диаграммой направленности. Для расчета разложения по сферическим гармоникам используем старую процедуру '*cl2map*', но с новым

⁴<http://cats.sao.ru>

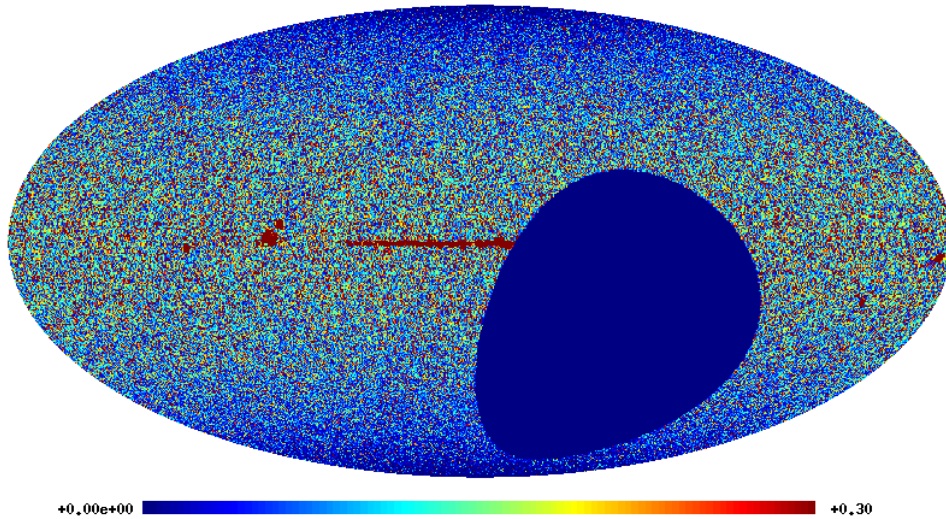


Рис. 3: Карта излучения от источников в обзоре NVSS [13].

КЛЮЧОМ:

```
cl2map -map map_src.fits -lmax 1000 -ao alm_src.fits > /dev/null
```

Здесь ключ `'-map'` показывает, что осуществляется ввод карты `'map_src.fits'` для гармонического анализа.

Сглаживание производится процедурой `'rsalm'`:

```
rsalm alm_src.fits -fw 10 -o alm_sm.fits
```

Здесь ключ `'-fw 10'` говорит о том, что для сглаживания будет использована гауссова диаграмма направленности размером $10'$. Результирующие гармоники записываются в FITS-файл `'alm_sm.fits'`.

Используя программу `'alm2dl'` можно вычислить спектр мощности $C(\ell)$:

```
alm2dl -lmax 1000 alm_sm.fits -cl > cl.dat,
```

который визуализируется как двухколоночная ASCII-таблица, например, с помощью программы `'xmgr'`. Карты для гармоник `'alm_sm.fits'` можно построить, используя также `'cl2map'`:

```
cl2map -lmax 1000 -nx 2001 -ny 4002 -ai alm_sm.fits -o map_sm.fits
f2fig map_sm.fits -o map_sm.gif
```

3 Резюме

Для выполнения практикума необходимо смоделировать несколько карт с различным угловым разрешением, например, для $\ell_{max} = 20, 50, 70, 100, 200, 500$. Сравнить вклад радиоисточников в спектр мощности в зависимости от разрешения карты и от размера сглаживающей диаграммы направленности антенны.

В данном практикуме показаны некоторые процедуры, которые можно выполнить над картами и сферическими гармониками. При усложнении задачи можно подключить процедуру удаления радиоисточников из карт различными методами и сравнить получаемый сигнал с исходным, который был задан до выполнения всех процедур. Кроме того, в идеальном случае проводится моделирование тысяч случайных реализаций и соответствующим

щих операций над ними, которые позволяют оценить доверительный интервал получаемых параметров спектра и качество точечных компонент излучения на сфере.

Для углубленного изучения темы рекомендуются к прочтению монографии по теории [14, 15, 16], а также обзор по роботам на РАТАН-600 [17].

Acknowledgements. В данных исследованиях используется открытый архив наблюдений миссии WMAP NASA. Для анализа данных и построения изображения СМВ применяется пакет GLESP⁵ [18, 19]. Автор признателен Фонду некоммерческих программ Дмитрия Зимина “Династия” за поддержку исследований по данной тематике. Автор также признателен Н.В.Верходановой за коррекцию стиля текста.

Список литературы

- [1] Doroshkevich A.G., Naselsky P.D., Verkhodanov O.V., Int. J. Mod. Phys. D, **14**, 275, astro-ph/0305537.
- [2] Верходанов О.В., Лекция 3. Реликтовое излучение: как измерить космологические параметры. Этот сборник (2012).
- [3] Верходанов О.В. Лекция 4. Негауссовость микроволнового фона: новая физика и старые проблемы. Этот сборник (2012).
- [4] Сахаров А.Д., ЖЭТФ **49**, 345 (1965).
- [5] Smoot G.F. et al., ApJL **396**, L1 (1992).
- [6] Hinshaw G. et al. ApJS **170** 288 (2007), astro-ph/0603451.
- [7] Komatsu E. et al., ApJS **192**, 18 (2011), arXiv:1001.4538.
- [8] Percival W.J. et al., 2009, MNRAS, 1741 MNRAS **401**, 2148 (2010), arXiv:0907.1660.
- [9] Riess A.G. et al., ApJ **699**, 539 (2009), arXiv:0905.0695.
- [10] Lewis A., Challinor A., Lasenby A., ApJ **538**, 473 (2000), astro-ph/9911177.
- [11] Seljak U., Zaldarriaga M., ApJ **469**, 437 (1996), astro-ph/9603033.
- [12] O. V. Verkhodanov, S. A. Trushkin, H. Andernach and V. N. Chernenkov Bull.SAO **58**, 118 (2005), arXiv:0705.2959.
- [13] J. J. Condon, W. D. Cotton, E. W. Greisen et al., AJ **115**, 1693 (1998).
- [14] Насельский П.Д., Новиков Д.И., Новиков И.Д., *Реликтовое излучение* (Изд-во “Наука”, 2003).
- [15] Горбунов Д.С., Рубаков В.А., *Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория.* (М.:КРАСАНД, 2010).
- [16] Лукаш В.Н., Михеева Е.В., *Физическая космология.* (М.:ФизМатЛит, 2010).
- [17] Парийский Ю.Н., Корольков Д.В. 1986. “Эксперимент “Холод”. Первый глубокий обзор неба с помощью радиотелескопа РАТАН-600”. В сб. “Итоги науки и техники”. Астрономия. **31**. Москва. ВИНТИ. 73-197
- [18] Верходанов О.В., Дорошкевич А.Г., Насельский П.Д. и др., Бюлл. САО, **58**, 40 (2005).

⁵<http://www.glesp.nbi.dk>

- [19] Doroshkevich A.G., Verkhodanov O.B., Naselsky P.D., et al., Intern. J. Mod. Phys. **20**, 1053 (2011), arXiv:0904.2517.