Движение пробных частиц в поле сил тесной двойной системы

1. Введение

Целью курсового проекта является создание программы, позволяющей исследовать особенности движения пробных частиц в поле сил тесной двойной системы.

Общая идея задачи сводится к следующему. В двойных системах с круговыми орбитами угловая скорость обращения звезд вокруг общего центра масс не меняется с течением времени. Поэтому каждая звезда движется равномерно по окружности. Движение пробных частиц в поле сил двойной системы удобно описывать в системе отсчета, вращающейся вместе со звездами. В этой системе отсчета на пробные частицы будут действовать силы гравитации от звезд, центробежная сила и сила Кориолиса. В общем случае гравитационные потенциалы зависят от распределения плотности внутри каждого из компонентов двойной системы. На практике, однако, в большинстве случаев для определения гравитационного потенциала используется приближение Роша. В этом приближении учитывается, что вещество звезды сильно сконцентрировано к центру, и на основании этого предполагается, что звезды можно рассматривать как точечные массы. В этом случае сумма гравитационных потенциалов звезд и центробежного потенциала называется потенциалом Роша Φ. Потенциал Роша имеет 5 стационарных точек, называемых также точками Лагранжа. Положение этих точек определяется из условия $\nabla\Phi = 0$. Все 5 точек Лагранжа лежат в экваториальной плоскости системы, причем 3 из них (L_1, L_2 и L_3) лежат на оси, соединяющей центры звезд, и являются точками перегиба функции Φ. Внутренняя точка Лагранжа L_1 находится между компонентами. Точки L_4 и L_5 являются максимумами функции Φ. Эквипотенциаль, проходящая через внутреннюю точку Лагранжа L_1, ограничивает два соприкасающихся объема, известных под названиями критической поверхности или полости Роша. Данное понятие чрезвычайно важно в астрономической практике, поскольку для звезды, поверхность которой находится внутри полости Роша, еще возможна стационарная конфигурация, при которой градиент потенциала Роша уравновешивается градиентом газового давления. При достижении же звездой критической поверхности суммарная сила (сумма гравитационных сил притяжения к каждому из компонентов и центробежной силы) равняется нулю во внутренней точке Лагранжа и градиент давления в этой точке уже не может быть уравновешен, в результате чего начинается перетекание вещества на другой компонент. Характер движения газа, после того как он миновал внутреннюю точку Лагранжа можно исследовать в баллистическом приближении. Формальным основанием для такого допущения является сверхзвуковой характер потока, позволяющий пренебречь эффектами давления.

2. Описание задачи

Назовем звезду, из которой вытекает вещество звездой-донором, а вторую звезду — звездой-аккретором. Потенциал Роша можно записать в следующем виде:

$$\Phi = -\frac{GM_a}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a|} - \frac{GM_d}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_d|} - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c)\right]^2, \tag{1}$$

где G — гравитационная постоянная, M_a и M_d — массы аккретора и донора, $\boldsymbol{r}_a$, $\boldsymbol{r}_d$, $\boldsymbol{r}_c$ — радиус-векторы центра аккретора, центра донора и центра масс двойной системы, соответственно, $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости орбитального вращения. Уравнение движения, описывающее траекторию пробной частицы в отсутствии магнитного поля и эффектов давления, может быть записано в виде:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla\Phi + 2\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}, \tag{2}$$

где второй член в правой части описывает силу Кориолиса.

Для описания движения пробных частиц в тесной двойной системе удобно использовать декартову систему координат $(x,\,y,\,z)$, заданную следующим образом. Начало координат находится в центре аккретора: $\boldsymbol{r}_a = (0,0,0)$. Центр донора лежит на расстоянии A на оси x от центра аккретора: $\boldsymbol{r}_d = (-A,0,0)$. Ось z направлена вдоль оси вращения системы: $\boldsymbol{\Omega} = (0,0,\Omega)$. Движение пробных частиц в экваториальной плоскости системы определяется следующими уравнениями:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + 2v_y\Omega, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - 2v_x\Omega, \tag{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y. \tag{4}$$

Численное решение этих уравнений удобно находить в безразмерных переменных. При этом в качестве масштаба длины можно взять межкомпонентное расстояние A, в качестве масштаба времени — величину Ω^{-1}, а в качестве масштаба массы — полную массу двойной системы $M_a + M_d$.

Основные подзадачи и их взаимосвязь. В поставленной задаче можно выделить несколько взаимосвязанных подзадач.

1) Исследовать тракетории движения пробных частиц в поле сил тесной двойной системы для различных значений отношения масс компонентов $q = M_d/M_a$. В качестве начальных условий принять, что частицы вылетают из внутренней точки Лагранжа L_1 с малой скоростью

$$v_0 = \varepsilon\sqrt{\frac{G(M_a+M_d)}{A}}, \quad \varepsilon \approx 0.01 - 0.05 \tag{5}$$

в направлении к центру аккретора. Визуализировать траектории на плоскости переменных (x, y).

2) В результате действия силы Кориолиса струя газа при удалении от внутренней точки Лагранжа отклоняется от линии, соединяющей центры звезд. Исследуя характер движения пробных частиц, определить численную зависимость угла отклонения струи θ в окрестности внутренней точки Лагранжа в зависимости от отношения масс компонентов q.

3) Анализ траекторий пробных частиц показывает, что струя подходит достаточно близко к центру аккретора. Минимально достижимое расстояние $R_{\min}$ между траекторией отдельной частицы и центром звезды-аккретора зависит от отношения масс компонент q. Определить эту зависимость численно и сравнить с соответствующим приближенным аналитическим выражением (см. ниже).

4) Для двойных систем, где радиус звезды-аккретора $R_a > R_{\min}$, струя вещества попадает непосредственно на поверхность звезды. В случае же, когда $R_a < R_{\min}$ поток вещества огибает звезду и в конце концов пересекает сам себя в некоторой точке, отстоящей от центра аккретора на расстоянии R_h. Величина R_h (радиус циркуляризации) определяет характерный размер кольца вещества, которое формируется вокруг аккретора. В дальнейшем под действием эффектов вязкости происходит трансформация этого кольца в аккреционный диск. С помощью численных расчетов найти зависимость радиуса циркуляризации R_h от отношения масс q.

3. Вспомогательный материал

Исследуем аналитически динамику струи в окрестности внутренней точки Лагранжа. Для удобства выберем начало координат в точке Лагранжа L_1. При этом будем считать, что ось x направлена в сторону аккретора. Силу Роша $\boldsymbol{g} = -\nabla\Phi$ вблизи точки Лагранжа с помощью разложения в ряд Тейлора можно представить в виде:

$$g_x = \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right|_{L_1} x = (2\kappa+1)\Omega^2, \quad g_y = \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right|_{L_1} y = -(\kappa-1)\Omega^2, \tag{6}$$

где

$$\kappa = \frac{1}{1+q}\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{q}{\beta^3}\right), \tag{7}$$

q — отношение масс, α — расстояние от центра аккретора до внутренней точки Лагранжа, выраженное в единицах A, $\beta = 1-\alpha$ — аналогичное расстояние до центра донора. Вертикальную компоненту уравнения (2) не рассматриваем. Получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{dv_x}{dt} = (2\kappa+1)\Omega^2 x + 2\Omega v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -(\kappa-1)\Omega^2 x - 2\Omega v_x, \tag{8}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y. \tag{9}$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$\tau = t\Omega, \quad X = \frac{x}{A}, \quad Y = \frac{y}{A}, \quad V_x = \frac{v_x}{A\Omega}, \quad V_y = \frac{v_y}{A\Omega}. \tag{10}$$

Тогда систему уравнений (8), (9) можно переписать следующим образом:

$$\dot{V}_x = (2\kappa+1)X + 2V_y, \quad \dot{V}_y = -(\kappa-1)Y - 2V_x, \tag{11}$$

$$\dot{X} = V_x, \quad \dot{Y} = V_y. \tag{12}$$

Здесь точкой обозначены производные по τ. Баллистическое решение этих уравнений

$$X = X_0 e^{\lambda\tau}, \quad Y = \operatorname{tg}\theta X_0 e^{\lambda\tau}, \tag{13}$$

где

$$\lambda = \left\{ \frac{1}{2} \left[(\kappa - 2) + \sqrt{9\kappa^2 - 8\kappa} \right] \right\}^{1/2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\lambda^2 - (2\kappa + 1)}{2\lambda}, \tag{14}$$

θ — угол отклонения струи, изменяющийся в зависимости от q в пределах от -28.4° до -19.5°.

В диапазоне $0.05 < q < 1$ величина $R_{\min}$ с точностью до 1% может быть аппроксимирована выражением:

$$R_{\min}/A = 0.0488 q^{-0.464}. \tag{15}$$