

Инфляция во Вселенной с излучением

1 Введение

Инфляцией в космологии называется период экспоненциально быстрого расширения в ранней Вселенной. В самой простой модели инфляции материей, вызывающей ускоренное расширение, является массивное скалярное поле φ массы m . В этой модели уравнения движения выглядят следующим образом¹:

$$3H^2 = \frac{4\pi}{M_{Pl}^2} (\dot{\varphi}^2 + m^2\varphi^2), \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + m^2\varphi = 0, \quad (2)$$

где точка над буквой означает производную по времени, M_{Pl} – масса Планка (в обычных единицах $M_{Pl} \sim 10^{19}$ ГэВ), $H = \dot{a}/a$, a – масштабный фактор (именно его величину имеют в виду, когда говорят о расширении Вселенной). Инфляционному режиму соответствуют решения этой системы уравнений, в которых $H \simeq const$ (тогда из $\dot{a} = Ha$ следует $a \sim e^{Ht}$).

2 Упражнение

Перепишем ур-ия (1),(2) в виде динамической системы, введя безразмерное ”время” $\tau = mt$ и положив $\phi = \varphi/M_{Pl}$:

$$\phi' = \psi, \quad (3)$$

$$\psi' = -\phi - \psi\sqrt{12\pi(\psi^2 + \phi^2)}.$$

Задание: построить фазовый портрет этой динамической системы на плоскости (ψ, ϕ) , задавая в качестве начальных условий всевозможные пары на так называемой квантовой границе: $\psi^2 + \phi^2 = 2M_{Pl}^2/m^2$. Большинство решений должно садиться на инфляционную сепаратрису. Исследовать зависимость от параметра $p = M_{Pl}/m$.

¹Используем систему единиц $\hbar = c = 1$. Легко проверить, что соотношения между размерностями длины, времени и массы в ней принимают вид: $[L] = [T] = [M^{-1}]$

3 Задача

Если добавить к скалярному полю излучение, динамическая система становится существенно трехмерной:

$$\begin{aligned}\phi' &= \psi, \\ \psi' &= -\phi - \psi \sqrt{12\pi(\psi^2 + \phi^2 + \frac{\mathbb{C}}{a^4})}, \\ a' &= a \sqrt{\frac{4\pi}{3}(\psi^2 + \phi^2 + \frac{\mathbb{C}}{a^4})}.\end{aligned}\tag{4}$$

Третий член под корнем как раз соответствует энергии излучения (как известно, энергия фотонного газа падает при адиабатическом расширении как $V^{-4/3}$, а не V^{-1} ; \mathbb{C} – некоторая константа). Начальные условия для ψ и ϕ по-прежнему следует брать на квантовой границе, а главное требование к начальному условию на a должно определяться тем, что $(\phi^2 + \psi^2) \ll \mathbb{C}/a^4$, т.е. в начальный момент времени энергия излучения преобладает над энергией скалярного поля. Например, можно положить $a(0) = 1$ и варьировать \mathbb{C} . Задача состоит в том, чтобы ответить на вопрос, по-прежнему ли большая часть решений будет садиться на инфляционную сепаратрису, когда скалярное поле начинает доминировать. Также желательно визуализировать ответ и построить фазовый портрет системы (теперь он трехмерный).