Задачи

1. **Волновая дорожка**

Волны, оставляемые движущимся по поверхности воды телом, имеют закон дисперсии

$$\omega(k) = \sqrt{gk}, \tag{1}$$

где g — ускорение свободного падения. Воспользовавшись формулами для фазовой ($V_{\mathrm{ph}} = \omega/k$) и групповой ($V_{\mathrm{gr}} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$) скоростей, найти угол раствора следовой дорожки и показать, что он не зависит от скорости тела.

2. **Распределение Гиббса**

Получите уравнение

$$N(\varepsilon)\frac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}\varepsilon^2} - \left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)^2 = 0 \tag{2}$$

(из которого следует распределение Гиббса) из условия максимума статистического веса

$$G = \frac{N!}{N_1!N_2!\dots N_K!}, \tag{3}$$

для эквидистантного спектра в случае, если из ячейки на уровне m забираются три частицы, две из них переносятся на уровень $m+1$, а еще одна — на уровень $m-2$.

3. **Распределение Гиббса**

Найдите наиболее вероятное распределение 10 шариков в ячейках с энергиями 0, ε, 2ε и 3ε и т.д. с полной энергией 8ε и оцените температуру, соответствующую этому распределению.

4. **Распределение Планка**

Покажите, что для изотропного излучения плотность энергии w [эрг/см^3] и плотность потока $\mathcal{P}$ [эрг/(см^2 с)] связаны соотношением

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4}cw. \tag{4}$$

5. **Сферические функции**

Проверьте, что функция $\mathcal{Y}(\theta,\varphi) = \sin^{11}\theta\,\sin(11\varphi)$ является собственной функцией оператора $\hat{l}^2$

$$\hat{l}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{5}$$

с собственным числом $132\hbar^2$ и найдите коэффициент a такой, чтобы сферическая функция $Y_{11}^{11}(\theta,\varphi) = a\,\mathcal{Y}(\theta,\varphi)$ удовлетворяла условию нормировки

$$\int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} |Y_{11}^{11}|^2\,\mathrm{d}\varphi = 1. \tag{6}$$

6. **Координаты и орты**

Покажите, что если $2l{+}1$ "ортов" $Y_l^m(\theta,\varphi)$ при повороте на угол Θ преобразуются с помощью матрицы поворотов A, то $2l{+}1$ "координат" a_m в разложении $\Psi = \sum_{m=1}^{2l+1} a_m Y_l^m(\theta,\varphi)$ преобразуются с помощью матрицы A^{T}.

7. **Матрица поворота**

Воспользовавшись явным видом сферических функций второго порядка

$$Y_2^{(2c)} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{4\pi}}\sin^2\theta\cos 2\varphi, \tag{7}$$

$$Y_2^{(c)} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4\pi}}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi, \tag{8}$$

$$Y_2^{(0)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4\pi}}\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}, \tag{9}$$

$$Y_2^{(s)} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4\pi}}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi, \tag{10}$$

$$Y_2^{(2s)} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{4\pi}}\sin^2\theta\sin 2\varphi, \tag{11}$$

получите матрицу поворотов на угол Θ вокруг оси x для пяти коэффициентов $a_{2+} = a_1$, $a_+ = a_2$, $a_0 = a_3$, $a_- = a_4$ и $a_{2-} = a_5$ в разложении $\Psi = \sum_{m=1}^{5} a_m \psi_2^m(\theta,\varphi)$, где "волновые функции" $\psi_2^m(\theta,\varphi)$ соответстующие проекциям углового момента $2\hbar$, $\hbar$, 0, $-\hbar$ и $-2\hbar$.

8. **Неравенства Белла**

Записать неравенства Белла для смешанной ЭПР-пары с полным нулевым спином, если анализаторы A, B и C для одной частицы противоположны по направлению анализаторам A', B' и C' для второй частицы. При каких углах это неравенство будет нарушаться?