

## Задачи

### 1. Распределение Гаусса

Используя формулу Стирлинга  $N! \approx \sqrt{2\pi N}(N/e)^N$  покажите, что при  $n \gg 1$  вероятность биномиального распределения

$$\mathcal{P}(K) = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{K!(N-K)!} \quad (1)$$

стремится к распределению Гаусса.

### 2. Преобразования Лоренца

Электронно-позитронные пары рождаются в покое в постоянном скрещенном электромагнитном поле  $\mathbf{E} = (1 - \varepsilon)V_0\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{B} = V_0\mathbf{e}_z$ , где  $\varepsilon \ll 1$ . Найти среднюю (по времени) энергию частиц.

*Указание: В системе, движущейся вдоль оси  $x$  со скоростью  $V = cE/B$  электрического поля нет, так что частицы движутся по окружности вокруг магнитного поля, по-прежнему направленному вдоль оси  $z$ . Ответ выразить через Лоренц-фактор  $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ .*

### 3. Криволинейные координаты

Найдите метрический тензор плоского пространства:

- В координатах  $u, v, z$ , связанных с цилиндрическими координатами  $r, \varphi$  и  $z$  соотношениями

$$u = r(1 - \cos \varphi), \quad (2)$$

$$v = r(1 + \cos \varphi). \quad (3)$$

- В координатах  $u, v, \varphi$ , связанных со сферическими координатами  $r, \theta$  и  $\varphi$  соотношениями

$$u = r(1 - \cos \theta), \quad (4)$$

$$v = r(1 + \cos \theta). \quad (5)$$

#### 4. Кривизна поверхности

Найдите кривизну поверхности гиперboloида вращения

$$x^2 + y^2 - z^2 = R^2. \quad (6)$$

#### 5. Формула Эйнштейна

Получите формулу Эйнштейна для мощности излучения гравитационных волн при условии  $M_1 \ll M_2$ . Покажите, что и в этом случае излучение идет на удвоенной частоте.

#### 6. Движение по эллипсу

Переходя при интегрировании к углу  $E$

$$r \cos \varphi = a(\cos E - e), \quad (7)$$

$$r \sin \varphi = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (8)$$

найдите средний по времени квадрат расстояния планеты от фокуса  $\langle r^2(t) \rangle_t$ .

#### 7. Длина формирования

Релятивистский электрон (лоренц-фактор  $\gamma$ ) движется по прямой, затем по части окружности радиуса  $R_c$ , и затем вновь по прямой. Определить характерную частоту излучения, если длина искривленного сегмента  $L \ll R_c/\gamma$ .

#### 8. Мера дисперсии

Разность времен прихода импульсов на частотах 408 МГц и 409 МГц от радиопульсара, находящегося на расстоянии 1 кпк от Земли (1 пк = 3 световых года), составляет 1 с. Определить минимальную частоту электромагнитных волн, которые еще могут распространяться в межзвездной плазме и найти характерную концентрацию электронов на луче зрения.

## 9. Движение периастра

Найдите угол поворота эллиптической орбиты за один период обращения в рамках нерелятивистской теории Всемирного тяготения для потенциала

$$\varphi_g = -\frac{GM}{r - r_g} \quad (9)$$

(т.н. потенциал Пачиньского-Вииты) при  $r \gg r_g$ .

*Указание: Учет релятивистских поправок приводит к тому, что периоды орбитального ( $P_\varphi = 2\pi/\Omega_\varphi$ ) и радиального ( $P_r = 2\pi/\Omega_r$ ) движения не будут в точности равны друг другу. В результате, за один период орбита повернется на дополнительный угол  $\Delta\varphi = \Omega_\varphi\Delta t$ , где  $\Delta t = 2\pi/\Omega_r - 2\pi/\Omega_\varphi$  — разность периодов колебаний.*