Задачи к зачету (весна)

1. Используя формулу Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, покажите, что при $N \gg 1$ и $K \gg 1$ вероятность биномиального распределения

$$\mathcal{P}_N^K = \frac{N!}{2^N K!(N-K)!} \tag{1}$$

стремится к распределению Гаусса.

2. Покажите, что для изотропного излучения плотность энергии w [эрг/см^3] и плотность потока $\mathcal{P}$ [эрг/(см^2 с)] связаны соотношением

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4}cw. \tag{2}$$

3. Воспользовавшись соотношеними $\mathcal{E} = \hbar\omega$ и $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ для энергии и импульса фотона, получите выражение

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_{\mathrm{e}}c}(1-\cos\theta) \tag{3}$$

для изменения длины волны фотона в зависимости от угла рассеяния θ на покоящемся электроне (эффект Комптона).

4. Как изменится энергия фотона при лобовом соударении, если налетающий электрон имеет энергию $\mathcal{E}_{\mathrm{e}} = \gamma_{\mathrm{e}} m_e c^2$ ($\gamma_{\mathrm{e}} \gg 1$)?

5. Получите закон квантования Бора $m_{\mathrm{e}}vr = n\hbar$ из идеи Де Бройля, согласно которой на орбите укладывается целое число длин волн $\lambda = h/(m_{\mathrm{e}}v)$.

6. Волны, оставляемые движущимся по поверхности воды телом, имеют закон дисперсии

$$\omega(k) = \sqrt{gk}, \tag{4}$$

где g — ускорение свободного падения. Воспользовавшись формулами для фазовой ($V_{\mathrm{ph}} = \omega/k$) и групповой ($V_{\mathrm{gr}} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$) скоростей, найти угол раствора следовой дорожки и показать, что он не зависит от скорости тела.

7. Найдите произведение среднеквадратичных отклонений Δx и Δk для бегущей волны.

8. Оцените, сколько оборотов сделает электрон в магнитном поле $B_\hbar = m_e^2 c^3/e\hbar$, прежде чем он потеряет значительную часть своей энергии.

9. Оцените, сколько оборотов сделал бы электрон, находящийся на нижнем уровне в атоме Бора, если бы он терял энергию по классической формуле $\dot{\mathcal{E}} \sim e^2 \ddot{r}^2 c^3$.

10. Покажите, что оператор проекции момента импульса $l_z = y\partial/\partial z - z\partial/\partial y$ может быть записан просто как $\partial/\partial\varphi$.

11. Воспользовавшись явным видом сферических функций второго порядка

$$\begin{aligned} Y_2^{(2c)} &= \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{4\pi}} \sin^2\theta \cos 2\varphi, &(5)\\ Y_2^{(c)} &= \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4\pi}} \sin\theta\cos\theta\cos\varphi, &(6)\\ Y_2^{(0)} &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4\pi}} \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}, &(7)\\ Y_2^{(s)} &= \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4\pi}} \sin\theta\cos\theta\sin\varphi, &(8)\\ Y_2^{(2s)} &= \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{4\pi}} \sin^2\theta \sin 2\varphi, &(9)\end{aligned}$$

и правилом преобразования углов

$$\begin{aligned} \sin\theta'\cos\varphi' &= \sin\theta\cos\varphi, \\ \cos\theta' &= \cos\theta\cos\Theta - \sin\theta\sin\varphi\sin\Theta, \qquad (10)\\ \sin\theta'\sin\varphi' &= \cos\theta\sin\Theta + \sin\theta\sin\varphi\cos\Theta, \end{aligned}$$

постройте матрицу поворотов вокруг оси x на угол Θ для пяти коэффициентов a, определяющих вероятности зарегистрировать проекции углового момента $2\hbar$, $\hbar$, 0,$-\hbar$ и $-2\hbar$.