Преобразования Лоренца

Данный вид преобразований, по предложению А. Пуанкаре, назван в честь голландского физика Х. А. Лоренца, который в серии работ (1892, 1895, 1899 годы) опубликовал их приближённый вариант (с точностью до членов порядка v^2/c^2). Позднее историки физики обнаружили, что эти преобразования были опубликованы независимо другими физиками:

1. 1887 год: В. Фогт, при исследовании эффекта Доплера[4][5].
2. 1897 год: Дж. Лармор, его целью было обнаружить преобразования, относительно которых уравнения Максвелла инвариантны[6].

Лоренц исследовал связь параметров двух электромагнитных процессов, один из которых неподвижен относительно эфира, а другой движется[7].

Современный вид формулам преобразования придали французский математик А. Пуанкаре (1900 год) и (параллельно и независимо) А. Эйнштейн (1905 год). Пуанкаре первым установил и детально изучил одно из самых важных свойств преобразований Лоренца — их групповую структуру, и показал, что *«преобразования Лоренца представляют ничто иное как поворот в пространстве четырёх измерений, точки которого имеют координаты* $(x,\ y,\ z,\ it)$*»*[8]. Пуанкаре ввёл термины «преобразования Лоренца» и «группа Лоренца» и показал, исходя из эфирной модели, невозможность обнаружить движение относительно абсолютной системы отсчета (то есть системы, в который эфир неподвижен), модифицировав таким образом принцип относительности Галилея[*источник не указан 1392 дня*].

Эйнштейн в своей теории относительности (1905 год) распространил преобразования Лоренца на все физические (не только электромагнитные) процессы и указал, что все физические законы должны быть инвариантны относительно этих преобразований. Геометрическую четырёхмерную модель кинематики теории относительности, где преобразования Лоренца играют роль вращения координат, открыл Герман Минковский. В 1910 году В. С. Игнатовский первым попытался получить преобразование Лоренца на основе теории групп и без использования постулата о постоянстве скорости света.

Приведем вывод этих преобразований, основанный только на принципе относительности (т. е. на равноправии всех инерциальных систем отсчета). В этом выводе постулат постоянства скорости света не используется *ad hoc*, а оказывается следствием принципа относительности.

Обозначим множество всех инерциальных систем отсчета K. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета k, k' из K, движущиеся друг относительно друга со скоростью V. Выберем декартовы координаты в этих системах отсчета так, чтобы в начальный момент времени начала координат совпадали, а оси были параллельны. В системе отсчета k моменты времени и координаты вдоль направления $\mathbf{u}$ будем обозначать t и x соответственно, в системе отсчета k' — t' и x' .

Оси X и X' направим так, чтобы система k' двигалась со скоростью **V** относительно системы k вдоль оси X, а система k двигалась со скоростью **-V** вдоль оси X' системы k'.

Равномерное движение свободной материальной точки со скоростью **v** в системе k описывается уравнением

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t \qquad (L1)$$

а в системе k' — уравнением

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{v}'t' \qquad (L2)$$

Преобразование координат $t, x, y,$ z системы k в координаты t', x', y', z' системы k' должно быть таким, чтобы уравнение (L1) переходило в уравнение (L2). Это означает, что прямая в пространстве **r**, t должна переходить в прямую в пространстве **r'**, t'. Таким свойством обладает линейное преобразование. (см. примечание 1)

$$\begin{aligned}
t' &= a_{tt}(V)t+a_{tx}(V)x+a_{ty}(V)y+a_{tz}(V)z,\\
x' &= a_{xt}(V)t+a_{xx}(V)x+a_{xy}(V)y+a_{xz}(V)z,\\
y' &= a_{yt}(V)t+a_{yx}(V)x+a_{yy}(V)y+a_{yz}(V)z,\\
z' &= a_{zt}(V)t+a_{zx}(V)x+a_{zy}(V)y+a_{zz}(V)z,
\end{aligned}$$

где величины a_{ij} зависят только от скорости относительного движения систем отсчета.
При нашем выборе направления этой скорости вдоль параллельных осей X, X' общий вид линейных преобразований можно упростить:

$$t' = a_{tt}(V)t+a_{tx}(V)x, \qquad (L3)$$
$$x' = a_{xt}(V)t+a_{xx}(V)x, \qquad (L4)$$
$$y' = y,\ z' = y. \qquad (L5)$$

Действительно, в силу однородности и изотропности пространства, преобразования вдоль оси X не должны зависеть от значения координат y и z. Сами координаты y и z тоже не должны преобразовываться, иначе поперечные размеры тел будут зависеть от скорости их движения, что приведет к неравноправию различных инерциальных систем отсчета (см. примечание 2).

Найдем явный вид четырех неизвестных функций $a_{tt}(V)$, $a_{tx}(V)$, $a_{xt}(V)$, $a_{xx}(V)$, опираясь только на принцип относительности и свойства однородности и изотропности нашего пространства-времени. Повернем оси координат в двух системах отсчета вокруг некоторого направления, перпендикулярного скорости **V**, на 180^0. Это приведет замене

x на $-x$ и x' на $-x'$. Если теперь заменить направление скорости **V** на противоположное, т. е. на **-V**, то преобразования (L3), (L4) примут вид

$$t' = a_{tt}(-V)t - a_{tx}(-V)x, \qquad (L6)$$

$$x' = -a_{xt}(-V)t + a_{xx}(-V)x \qquad (L7)$$

Заметим, что произведенные преобразования привели к тому, что система k' движется, как и прежде, вдоль оси X системы k со скоростью **V**. В силу изотропности пространства (равноправия всех направлений) вид равенств (L3), (L4) не зависит от направления осей X, X'. Следовательно, формулы (L6), (L7) должны совпадать с (L3), (L4). Это возможно лишь в то случае, если функции $a_{tt}(V)$, $a_{xx}(V)$ четные, а функции $a_{xt}(V)$, $a_{tx}(V)$ — нечетные.

Теперь учтем, что точка $x = 0$ движется со скоростью **-V** вдоль оси X' в системе k', так что $x' = -Vt'$. Из уравнений (L3), (L4) следует, что

$a_{xt}(V) = -Va_{tt}(V)$.

Аналогично, точка $x'=0$ движется со скоростью **V** вдоль оси X в системе k: $x=Vt$, так что

$a_{xt}(V) = -Va_{xx}(V)$.

Вводя теперь вместо нечетной функции $a_{tx}(V)$ четную функцию $g(V)$

$a_{tx}(V) = -Va(V)g(V)$,

получаем

$$t' = a(V)[t - V\,g(V)x], \qquad (L8)$$

$$x' = a(V)[x - Vt]. \qquad (L9)$$

Рассмотрим еще одну инерциальную систему отсчета k'', движущуюся со скоростью **V'** вдоль о си X' системы k'. Закон преобразования из системы k' в систему k'' должен иметь вид, аналогичный (L8), (L9):

$$t'' = a(V')[t' - u'\,g(V')x'], \qquad (L10)$$

$$x'' = a(V')[x' - V't']. \qquad (L11)$$

Подставляя в (L10), (L11) выражения для x', t' из (L8), (L9), получаем (u=V)

$$t'' = a(u')\,a(u)\left(1+uu'g(u')\right)\left(t - \frac{u'g(u') + ug(u)}{1+uu'g(u')}x\right), \qquad (L12)$$

$$x'' = a(u')\,a(u)\left(1+uu'g(u)\right)\left(x - \frac{u'+u}{1+uu'g(u)}t\right). \qquad (L13)$$

С другой стороны, равенства (L12), (L13) описывают переход из системы k в систему k', движущуюся вдоль оси X с некоторой скоростью u'':

$$t'' = a(V'')[t - V''g(V'')x], \qquad (L14)$$

$$x'' = a(V'')[x - V''t]. \qquad (L15)$$

Из сравнения соотношений (L12), (L13) с (L14), (L15) следуют равенства

$$g(V)=g(V')=g=const, \qquad (L16)$$

$$a(V'')=a(V)a(V')(1+VV'g), \qquad (L17)$$

$$V''=(V+V')/(1+VV'g). \qquad (L18)$$

Равенство (L16) вводит некоторую постоянную величину, размерность которой — обратный квадрат скорости. Эта величина одинакова во всех системах отсчета, и ее численное значение не может быть выведено из каких-либо общих принципов. Экспериментальное значение этой величины $g=c^{-2}$, где c — скорость света в вакууме. В классической нерелятивистской механике g=0.

Равенство (L17) — функциональное уравнение, из которого (с учетом (L18)) можно определить вид неизвестной функции $a(u)$ (см. примечание 3):

$$a(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad (L19)$$

Равенство (L18) определяет закон сложения скоростей для движений вдоль оси X: Важное свойство этого закона: если u', *то* u''; *если* $u'=c$, *то* $u''=c$; *если* $u'>c$, *то* $u''>c$.
Следовательно, если скорость частицы (или электромагнитной волны) равна с в одной системе отсчета, то она одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Итак, мы вывели соотношения (*) из принципа относительности и получили следствием постоянство скорости с во всех инерциальных системах отсчета. Важно отметить принципиальное отличие данного подхода к выводу преобразований Лоренца от общепринятого. Постоянство скорости света во всех инерциальных системах отсчета — это экспериментальный факт, установленный с определенной степенью точности. Приведенный выше вывод не опирается на этот факт, из него следует только ***существование*** скорости, одинаковой во всех инерциальных системах отсчета.

Примечание 1. О линейности преобразований Лоренца

В книге В. А. Фока ``Теория пространства, времени и тяготения", (1961) в Добавлении А на стр. 510—514 показано, что самым общим видом преобразования, переводящим прямую в прямую, является дробно-линейное. Преобразования, которые получаются в этом случае (преобразования Лоренца-Фока), приводят к интересным и необычным свойствам пространства-времени. Так например, точки, бесконечно удаленные друг от друга (в пространстве или во времени) в одной системе отсчета, оказываются на конечных расстояниях в другой системе отсчета. Однако, если ввести дополнительное требование инвариантности бесконечности, преобразование сводится к линейному.

Примечание 2. О преобразовании поперечных размеров движущихся тел

Рассмотрим, машину, проезжающую в ворота с поперечными размерами, равными поперечным размерам машины. Если предположить, что поперечные размеры движущихся тел уменьшаются, то в системе отсчета, связанной с воротами, машин а проедет, так как ее поперечные размеры стали меньше. В системе отсчета машины меньше стали поперечные размеры ворот, и машина застрянет. Если предположить, что поперечные размеры движущихся тел увеличиваются, то машина застрянет в системе отсчета, связанной с воротами. В любом случае требование равноправия инерциальных систем отсчета приводит к инвариантности поперечных размеров движущихся тел.

Примечание 3. Вывод явного вида функции $a(V)$

Явный вид функции $a(V)$ можно получить и не решая сложное функциональное уравнение (L17), если записать преобразование из системы k' в систему k. Оно отличается от преобразования из k в k' заменой u на -u в формулах (L8), (L9):
$t=a(V)(t'+Vg(V)x'),\ x=a(V)(x'+Vt')$.
Подставив в правые части этих формул выражения для x', t' из (L8), (L9):, получаем тождественное преобр азование из k в k: $t=a(V)2(1-V^2g(V))t,\ x=a(V)2(1-V^2g(V))x,$ откуда следует равенство (L19).