

Временная переменность как инструмент
исследования физических процессов вблизи
компактных объектов

М.Ревнивцев

Глава 1

Лекция 1

Аннотация

Общая информация о характеристиках временных рядов. Ряды Фурье, спектры мощности, искажения спектров мощности в реальных наблюдениях. Статистические свойства характеристик сигнала, аппроксимация результатов наблюдения моделями и методы оценки достоверности.

Введение

Релятивистские компактные объекты представляют собой интереснейшие объекты Вселенной с большим набором свойств и явлений, которые практически невозможно наблюдать в лабораториях. Наблюдения за такими объектами позволяют не только проверять предсказания различных теорий (например, теории гравитации, теории плазмы и т.д.), но и открывать новые явления. Одним из наиболее востребованных аспектов исследования релятивистских компактных объектов в настоящее время является вопрос о том, каким образом ведет себя вещество при сверхядерных плотностях в центрах нейтронных звезд. Образуется ли там нейтронное вещество, различные конденсаты (каонные, пи-мезонные), или вещество переходит в более фундаментальное состояние кварковой материи? (Lattimer & Prakash, 2007).

Релятивистские компактные источники – нейтронные звезды, черные дыры, белые карлики – имеют очень малые размеры, что ограничивает их угловые размеры на небе величиной, недостижимой для разрешения современными астрономическими инструментами. Например, угловой размер горизонта черной дыры в системе Лебедь X-1 составляет менее угловой наносекунды, угловой размер даже ближайших нейтронных звезд (находящихся на расстоянии всего несколько сотен парсек) также не превышает угловую наносекунду. Поэтому из всей возможной информации в излучении от таких объектов мы можем в настоящее время изучать лишь два ее аспекта: спектроскопическую информацию (распределение яркости объекта на разных энергиях) и временную зависимость их яркости. Настоящие лекции посвящены вопросам исследования временной

переменности яркости релятивистских объектов.

Временную переменность объектов можно грубо разделить на три больших класса: 1) на переменность во время отдельных событий (затмения, всплески и т.д.), 2) периодическую и квазипериодическую переменность (пульсации, квазипериодические осцилляции, орбитальная переменность и т.д.), 3) хаотическую переменность (фликкер-шум и т.д.).

1.1 Ряды Фурье и преобразование Фурье

Большая часть наблюдаемой переменности яркости астрономических объектов является стохастической.

Стохастической переменностью мы назовем переменность яркости, которую нельзя предсказать детерминистически. В реальности, скорее всего изменения яркости происходят в результате вполне определенных детерминистических процессов, но возможно их число в результирующем сигнале настолько велико, что учесть их все не представляется возможным и переменность выглядит стохастически.

Примером такого стохастического поведения является "случайное" дрожание мгновенного значения давления газа в сосуде за счет движения молекул. Несмотря на то, что каждая молекула в каждый конкретный момент времени движется по законам механики и отражаясь от стенок сосуда создает совокупные "давление газа", их совместное движение предсказать практически невозможно из-за большого числа участвующих молекул и вариации мгновенного значения давления могут считаться "стохастическими".

Стохастический сигнал невозможно анализировать "поточечно", т.е. пытаясь в моделях воспроизвести все детали реальной наблюдаемой кривой. Модель стохастического процесса должна воспроизводить общие свойства сигнала. Для того, чтобы иметь возможность строить модели и сравнивать их с наблюдениями общие свойства сигнала не должны зависеть от времени, т.е. стохастический процесс, формирующий сигнал, должен быть так же и *стационарным*.

Для того, чтобы определить какие именно свойства сигнала являются определяющими в наблюдательных проявлениях сигнал разлагают на систему функций, составляющих базис данного пространства.

Простейшим примером разложения стохастического сигнала на системы базовых функций в обычной жизни является разложение любого вектора трехмерного пространства на его компоненты, параллельные векторам ортонормированного базиса (см рис. 1.1, слева). В бесконечномерном функциональном пространстве разложение анализируемой функции происходит на бесконечный набор базисных функций (см рис.1.1, справа) - например частотный анализ звукового сигнала. В астрофизике аналогом такого разложения является анализ временной переменности яркости объектов при помощи рядов Фурье или преобразования Фурье.

Рядом Фурье функции $f(t)$, периодичной на интервале $[-\pi, \pi]$ называется ряд

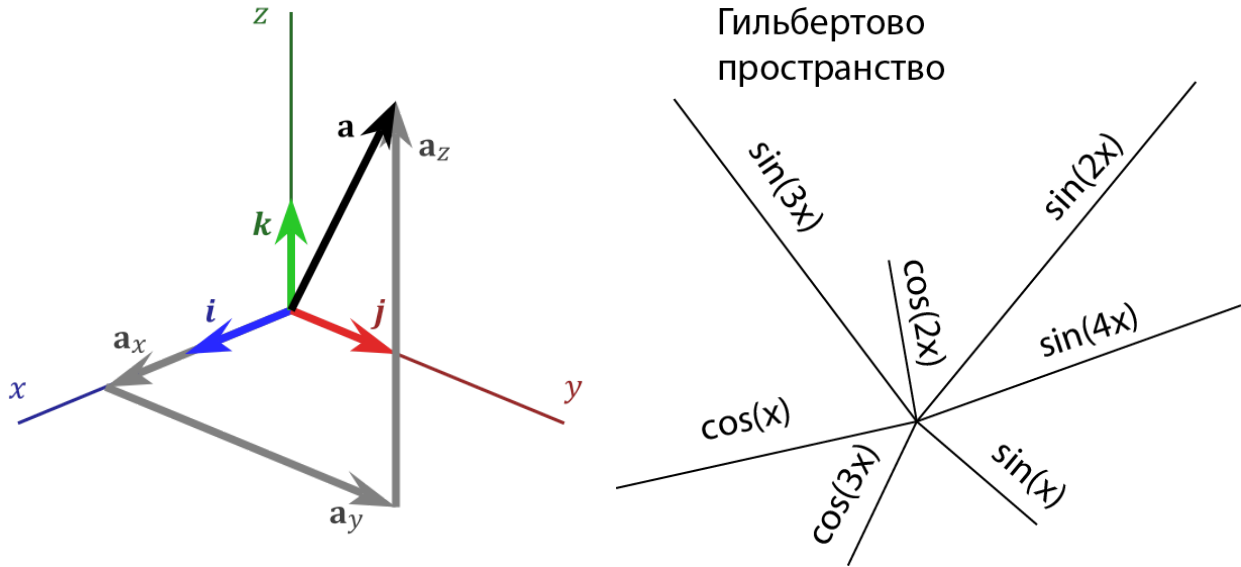


Рис. 1.1: Разложение элемента пространства по базисам. Слева – разложение трехмерного вектора по ортонормированному базису. Справа - схематичная иллюстрация разложения функции Гильбертова пространства по базисным тригонометрическим функциям.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.1)$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad (1.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (1.3)$$

фактически являющимися скалярными произведениями исследуемой функции с элементами ортонормированного базиса тригонометрических функций. Ортонормированность базиса тригонометрических функций следует из формул:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lxdx = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \pi & k = l \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lxdx = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \pi & k = l \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos lxdx = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \pi & k = l \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2 \dots).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2 \dots).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$$

Строго говоря, в ряд Фурье обычно раскладывают функций имеющие период 2π . Для произвольной интегрируемой функции можно получить преобразование Фурье.

Преобразованием (или образом) Фурье функции $f(t)$ называется функция $\hat{f}(\omega)$, вычисляемая по формуле:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt + i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \right] \quad (1.4)$$

Отметим, что если начальная функция $f(t)$ действительная, то тогда выполняется условие $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$.

1.1.1 Фурье образ реально измеряемых функций.

В реальности преобразование Фурье реально наблюдаемых функций отличается от идеального случая преобразования функции, определенной на всем бесконечном пространстве.

Во первых измерение реальных функций всегда происходит на конечном интервале времен $[0, T]$, т.е. начальная функция $f(t)$, умножается на квадратное окно вида:

$$w(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & t < 0, t > T \end{cases} \quad (1.5)$$

а так же на функцию "сэмплирования" вида

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{kT}{N}) \quad (1.6)$$

где N - число измерений за интервал времени T .

Так как умножение функций в прямом пространстве соответствует свертке Фурье-образов функции в Фурье пространстве, но Фурье-образ функции, полученной в реальном наблюдении из "истинной" стохастической функции представляет собой как минимум свертку истинного Фурье-образа исследуемой функции с двумя функциями, представляющими собой Фурье-образы функции окна и функции "сэмплирования".

Фурье образ функции квадратного окна представляет собой функцию вида $\sin x/x$, которая фактически уширяет Фурье-образ истинной исследуемой функции, происходит "утечка" мощности из самых низких частот как под порог исследования, так и на высокие частоты.

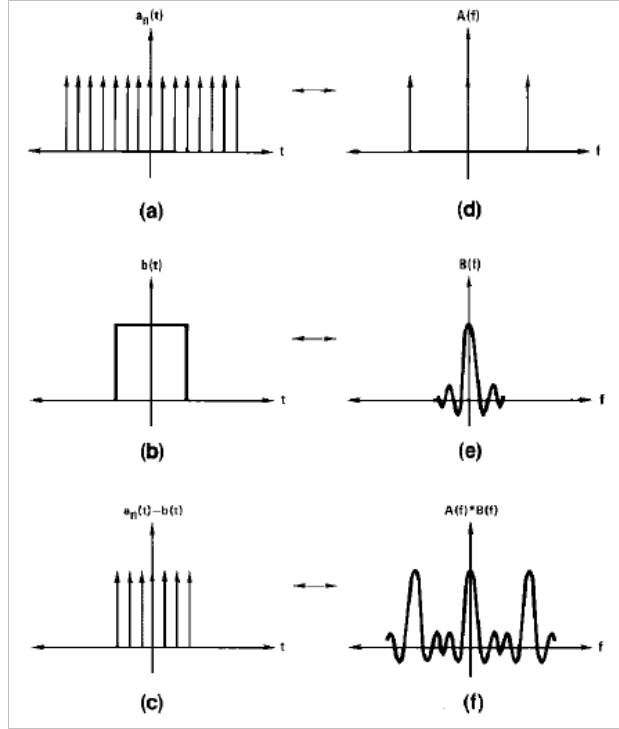


Рис. 1.2: Модификация кривой блеска (слева) за счет различных эффектов и влияние этих эффектов на получаемый спектр мощности сигнала (справа). Сверху вниз: сэмплирование, функция окна, и совместное действие сэмплирования функции окна.

Пример Фурье-образа функции окна показан на рис. 1.3.

Фурье образ функции "сэмплирования" представляет собой бесконечный периодических ряд дельта-функций:

$$\hat{s}(\omega) = \int s(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{N}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{\omega}{2\pi} - \frac{lN}{2\pi T}\right) \quad (1.7)$$

Свертка такой функции с Фурье-образом истинной исследуемой функции означает, что конечная функция составляется из ее сдвига (на частоту $\Delta\omega = N/T$) и повторения.

Если мы анализируем спектр мощности сигнала, т.е. не $\hat{f}(\omega)$, а $|\hat{f}(\omega)|^2$, то ввиду действительности исходной функции ее спектр мощности симметричен относительно нулевой частоты. А значит при сдвиге истинного фурье-образа или спектра мощности на частоту сэмплирования (N/T) значения мощности на половинной частоте ($N/2T$) складываются с со значениями на частотах, симметричных относительно этой половинной частоты. В таком случае мощность в области высоких частот увеличивается за счет так называемого "алиасинга", т.е. попадание мощности с частот, находящихся под порогом сэмплирования в области частот ниже частоты Найквиста-Котельникова $\nu_{Nyq} = N/2T$.

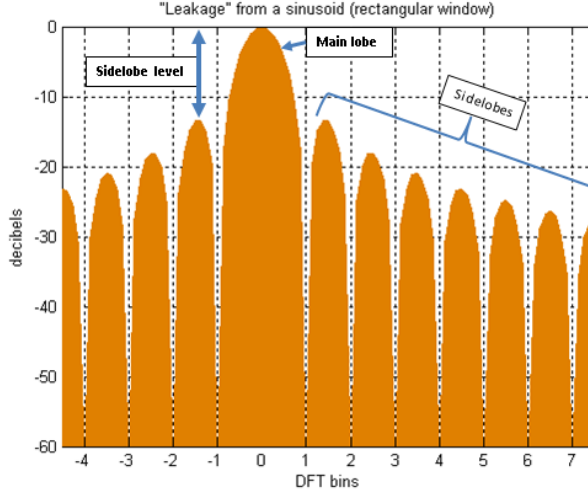


Рис. 1.3: Пример спектра мощности P функции квадратного окна. По оси X отложена частота в единицах длины окна $\Delta F = 1/T$. Видно, что Фурье образ квадратного окна состоит из основного пика эффективной ширины $\Delta F = 1/T$ и длинного "хвоста" степенного вида $P \propto f^{-2}$

На практике, как правило происходит не бесконечно быстрое сэмплирование исходной функции, а ее измерение в интервалах времени конечной длины, т.е. свертка с "окном усреднения":

$$b(t) = \begin{cases} N/T, & -T/2N < t < T/2N \\ 0, & |t| > T/2N \end{cases} \quad (1.8)$$

а только затем - сэмплирование. В таком случае свертка с одним усреднения эффективно понижает мощность в области частоты Найквиста-Котельникова, а алиасинг - повышает.

1.1.2 Влияние пробелов в данных на измеряемые спектры мощности

Вариантом функции окна в данных реальных наблюдений являются периодические или случайные пробелы в данных. Очень часто пробелы в данных встречаются в данных оптических наблюдений по простой причине чередования ночи и дня (в дневное время астрономические наблюдения, очевидно, не проводятся). В космических экспериментах пробелы в данных возникают из-за ограничений видимости объекта со спутников на околоземных орбитах (период обращения спутников на близких околоземных орбитах около 1.5 часов, на далеких - до нескольких дней). Однако переменность яркости астрономических объектов существует в гораздо большем диапазоне масштабов времен, от миллисекунд до десятков и сотен лет. Поэтому необходимо научиться работать с

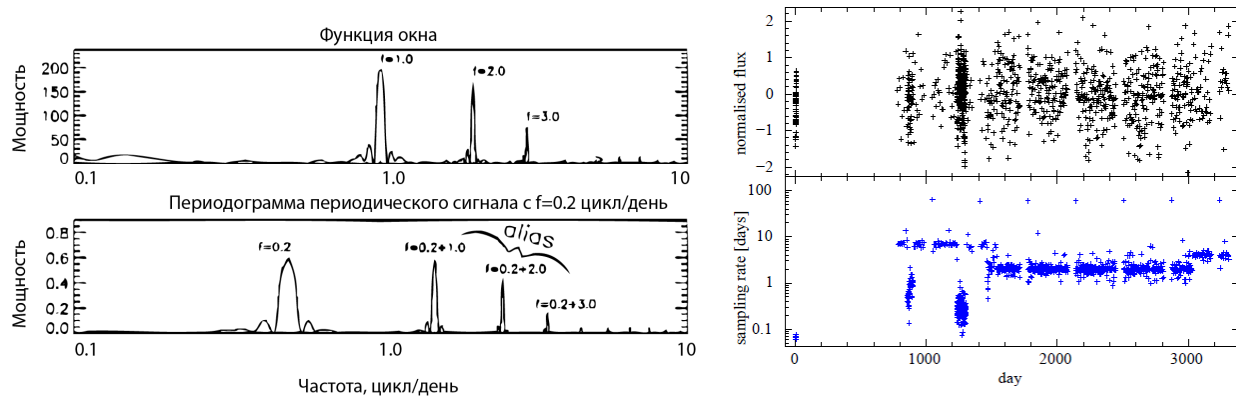


Рис. 1.4: Слева: Фурье образ одного из вариантов функции окна в случае многочисленных оптических наблюдений объекта. Хорошо видны паразитные пики на значениях кратных одному дню. Из-за влияния этой функции окна к истинному пику на периодограмме в реальных данных добавляются паразитные пики (алиасинг). Справа: Типичная схема измерений рентгеновского потока активной сверхмассивной черной дыры. Сверху - моделированная кривая блеска объекта, внизу - типичная скважность наблюдений.

данными, имеющими существенные пробелы в покрытии.

Однозначного метода работы с данными, имеющими существенные пробелы, не существует. Невозможно абсолютно надежно заполнить пробелы в данных имея даже обширную информацию о статистических/стохастических свойствах кривой. Всегда остается вероятность того, что именно в пропущенной части данных кривая яркости источника обладала свойствами, совершенно отличными от свойств в измеренной области. Поэтому работа с данными, имеющими существенные лакуны, должна опираться на дополнительные предположения, например, стационарности стохастического шума и т.д.

Наиболее понятным способом работы с данными, имеющими пропуски, является моделирование истинной кривой блеска объекта с пропусками, идентичными пропускам в реальных измерениях и сравнение спектра мощности этого моделированного ряда с наблюдаемым.

Методика работы в таком случае следующая:

1. Моделирование истинной исходной кривой яркости объекта.
2. Модификация исходной кривой яркости пробелами в данных, аналогичных реальным наблюдениям
3. Получение спектра мощности переменности моделированного ряда, вычисляемого любым возможным способом (через периодограммы Ломба-Скаргла, через Фурье преобразование автокорреляционной функции и т.д.), примененным ранее к реальным данным

4. Сравнение спектра мощности, полученного для моделированного ряда со спектром мощности реального ряда. Метод χ^2 (менее правильный в данном случае, см. ниже), метод максимального правдоподобия и т.д.
5. Повторение пунктов 1-4 для других параметров стохастической переменности истинной кривой яркости. Определение доверительных интервалов на параметры спектра мощности истинной кривой.

Более простым методом оценки свойств спектра мощности набора данных с пропусками является вычисление дисперсий набора данных с изолированными масштабами. Метод недавно хорошо был изложен в работе Arevalo et al. (2012).

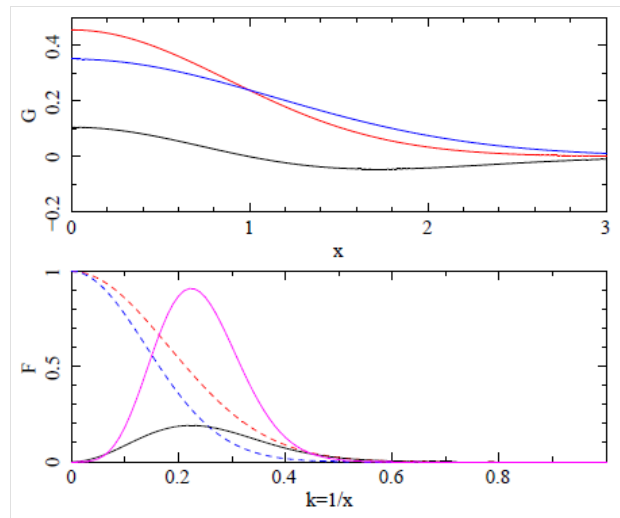


Рис. 1.5: Верхняя панель: две Гауссовы кривые (красная и синяя кривые) используемые для свертки с исходным набором данных (исходной кривой). Черная кривая показывает разность между ними. Нижняя панель: Фурье-образы кривых, показанных на верхней панели. Сиреневая кривая является черной кривой, увеличенной на этом рисунке для наглядности.

В этом методе оригинальный набор данных $I(x)$ рассматривается как модификация "истинного" набора данных $I_0(x)$ за счет маски M вида:

$$M(x) = \begin{cases} 1 & \text{где } I \text{ определена} \\ 0 & \text{где } I \text{ неопределена} \end{cases} \quad (1.9)$$

здесь маска M считается равной нулю не только в пропусках данных, но и везде вне области наблюдений: $I(x) = I_0(x) \times M$.

Для выделения из начального набора данных сигнала с характерными масштабом σ набор данных сворачивается с двумя гауссианами вида:

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2\sigma^2) \quad (1.10)$$

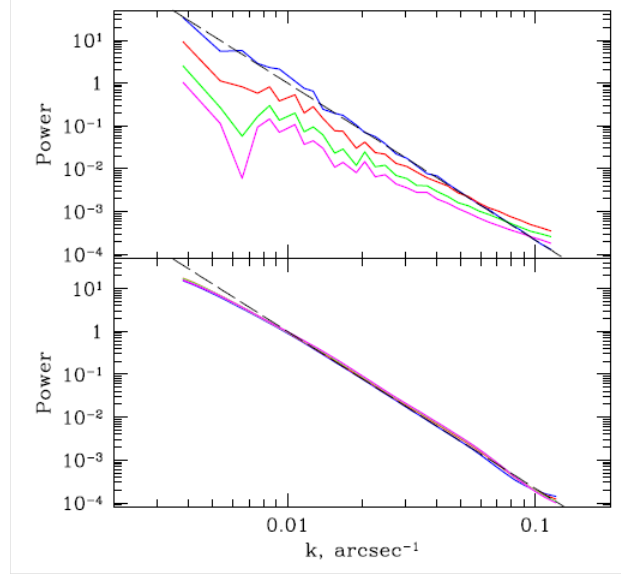


Рис. 1.6: Спектры мощности кривых блеска, посчитанные разными методами. Верхняя панель: спектры мощности, посчитанные про помощи периодограмм Фурье (периодограммы Ломба-Скаргла), кривых блеска содержащие различные пропуски в данных. Истинный спектр мощности начальной кривой блеска показан штриховой прямой. Нижняя панель показывает результат расчета спектра мощности с использованием гауссовых фильтров, рассмотренных в этой части.

с характерными ширинами $\sigma_1 = \sigma/\sqrt{1+\epsilon}$, $\sigma_2 = \sigma\sqrt{1+\epsilon}$, где $\epsilon \ll 1$.

Для ϵ стремящемся к нулю форма получающегося фильтра $F(x) = G_{\sigma_1}(x) - G_{\sigma_2}(x)$:

$$F(x) = G_{\sigma_1}(x) - G_{\sigma_2}(x) \sim \frac{\partial G_\sigma(x)}{\partial \sigma} (\sigma_2 - \sigma_1) \sim \epsilon \left[1 - \frac{x^2}{\sigma^2} \right] e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (1.11)$$

не зависит от ϵ .

Свертка оригинального набора данных с фильтром изменяет получаемый спектр мощности переменности в наборе данных за счет умножения истинного спектра мощности с Фурье образом использованного фильтра (см. рис. 1.5).

Свертка начального набора данных с гауссовыми функциями создает искажения вблизи пробелов в данных. Для того, чтобы их эффект дополнительно подавить используется функция, получаемая из маски, свернутой с теми же гауссовыми функциями. В таком случае, исправленная свернутая начальная функция выглядит как:

$$I_c = \frac{G_\sigma * (I_0 \times M)}{G_\sigma * M} \quad (1.12)$$

И тогда функция содержащая только масштабы $\sim k_r = 0.225/\sigma$ запишется как:

$$I_c(k_r) = I_{1,c} - I_{2,c} \times M = \left(\frac{G_{\sigma_1} * I}{G_{\sigma_1} * M} - \frac{G_{\sigma_2} * I}{G_{\sigma_2} * M} \right) \times M \quad (1.13)$$

Оценка мощности переменности на масштабе k_r получается в результате расчета дисперсии лучшей кривой $I(k_r)$. Результат такого расчета на моделированных кривых приведен на рис. 1.6

1.2 Оценки параметров и достоверности результатов

Измерения мощности переменности, как и любые другие измерения, проводимые в реальной жизни, имеют свои неопределенности. Поэтому, при проверке любых гипотез, оценке любых параметров модели необходимо учитывать то, что отклонения результатов измерений от модели могут быть обусловлены тем, что любые измерения есть реализации случайного процесса с определенными свойствами. Проиллюстрируем работу с ошибками, вероятностями и статистиками на нескольких примерах.

Возьмем простейший пример, многочисленные измерения одной и той же величины. Говоря более строго об этом процессе можно сказать, что мы 1) пытаемся к набору измерений применить гипотезу о постоянстве измеряемой величины и 2) пытаемся получить наиболее точную и надежную оценку истинного значения этой величины.

Предположим, что у нас есть априорные знания о свойствах наших измерений (как правило, такие знания для реальных измерений существуют). Предположим, что ошибка нашего измерения гауссова, т.е. плотность вероятности того, что истинное значение измеренного параметра лежит в интервале от a до $a + da$ при условии, что измерение выдало значение x_i :

$$p(a)da = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(x_i - a)^2}{2\sigma_i^2} da \quad (1.14)$$

Предположим, что у нас в результате нашего эксперимента есть набор значений x_i ($i = 1, N$). Зададим следующие вопросы:

- верна ли гипотеза, что измеряемая величина a является постоянной
- какова наилучшая оценка параметра a после всех наших измерений
- какова неопределенность получившейся оценки параметра a

1.2.1 Метод минимизации χ^2

Для того, чтобы проверить, согласуется ли гипотеза с модельным предположением часто используется так называемая статистика χ^2 :

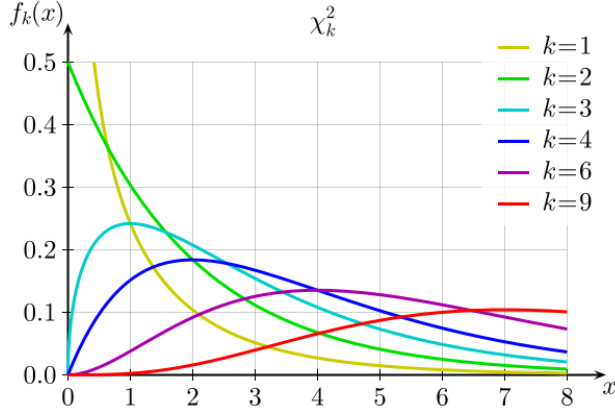


Рис. 1.7: Примеры распределения χ_k^2 с разным числом степеней свободы k .

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - m_a)^2}{\sigma_i^2} \quad (1.15)$$

где m_a представляет собой оценку величины a . Если оценка величины a верна, то случайная величина S представляет собой сумму N реализаций квадрата Гауссовых случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией и, следовательно, должна иметь распределение типа χ_N^2 ("хи квадрат с N степенями свободы"). Поиск наилучшей оценки параметра a сводится к минимизации величины S на пространстве возможных значений параметра a (поиск значения a , где $dS/da = 0$) при имеющемся наборе (x_i, σ_i) . Легко показать, что наилучшая оценка параметра m_a и ошибка этой оценки σ_{m_a} :

$$m_a = \frac{b}{c}, \sigma_{m_a} = \frac{1}{c}, \text{ где } b = \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}, c = \sum \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Проверка верности гипотезы проводится с использованием известных свойств распределения величины S . Если значение величины S превышает некое пороговое значение, то вероятность того, что это случилось из-за ошибок измерений мала (ниже определенного значения, вычисляемого при помощи известных свойств распределения χ_N^2) и выдвинутая гипотеза противоречит данному набору наблюдений. Другими словами, зная поведение статистики S можно предсказать, с какой вероятностью величина S , посчитанная для имеющегося набора измерений, превысит некое пороговое значение из-за вероятностной природы измерений. В реальных экспериментах часто используют пороги 0.997 (так называемый порог 3σ , т.е. вероятность, соответствующая выбросу случайной величины в Гауссовом распределении за три стандартных отклонения от своего истинного значения) и $1 - 5.7 \times 10^{-7}$ (5σ).

1.2.2 Метод максимального правдоподобия

Одним из наиболее широко распространенных методов оценок параметров моделей, а так же сравнения различных гипотез, является метод максимального правдоподобия.

Метод состоит в минимизации так называемой функции правдоподобия \mathcal{L} , в которой содержится вся предполагаемая информация о статистических свойствах выборки и ее связь с моделью. Функция правдоподобия строится как логарифм произведения вероятности реализации каждого измерения в эксперименте в предположении определенной модели. При этом вероятность считается с точностью до мультипликативного фактора, независящего от параметров модели, и, соответственно, функция правдоподобия \mathcal{L} считается с точностью до аддитивного фактора.

Оценки максимального правдоподобия всегда *состоятельны, асимптотически эффективны и асимптотически нормальны*. Поэтому метод максимального правдоподобия является наиболее удобным практически в любых случаях.

Рассмотрим пример из предыдущей части. Вероятность (точнее говоря, плотность вероятности, потому как измеряемая величина – действительное число) того, что при истинном значении параметра a i -ое измерение даст значение $x_i : p(x_i|a) \propto \exp[-(x_i - a)^2/2\sigma_i^2]$. Поскольку наши измерения независимы, то совместная вероятность при истинном значении искомого параметра a иметь набор измерений $x_i, i = 1, N$ можно записать как:

$$P \propto \prod_{i=1}^N \exp[-(x_i - a)^2/2\sigma_i^2] \quad (1.16)$$

Функция правдоподобия \mathcal{L} тогда запишется как $2 \sum \ln p(x_i|a)$ или в нашем случае:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N (x_i - a)^2/\sigma_i^2 \quad (1.17)$$

Т.е. в данном случае метод максимального правдоподобия сходится к методу минимизации χ^2 . Отметим, что в случае, если ошибки измерений в нашем эксперименте не гауссовы, то метод минимизации χ^2 принципиально неприменим. Статистика S , составленная по формуле (1.15), не будет иметь распределение типа χ_N^2 и более того, минимизация S может привести к смещенной оценке параметра a .

1.2.3 Статистика Кэша

Рассмотрим другой пример, регистрацию фотонов как функцию энергии или источников/объектов как функцию потока/светимости. Это будет наблюдаемый спектр излучения источника, либо функция светимости некоего класса объектов. Регистрация фотонов (или источников/объектов) - это Пуассоновский процесс, т.е. при заданном математическом ожидании λ количества фотонов (объектов) в данном энергетическом интервале (или в интервале по светимости/потoku) вероятность зарегистрировать именно данное число n фотонов (объектов) равна:

$$P = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (1.18)$$

Составим функцию правдоподобия для эксперимента из измерений в N интервалах по энергии (или по светимости если рассматривается функция светимости).

$$\mathfrak{L} = -2 \sum_{i=1}^N \ln P_i = -2 \sum_{i=1}^N (n_i \ln \lambda_i - \lambda_i - \ln n_i!) \quad (1.19)$$

Здесь λ_i - модельное предсказание числа событий в i -ом интервале. Используя факт, что $\ln n_i!$ не зависит от параметров модели, можно убрать это слагаемое из выражения для функции правдоподобия. Обозначив $\Lambda = \sum \lambda_i$ сумму предсказаний модели по всем рассматриваемым интервалам запишем:

$$\mathfrak{L} = -2 \sum_{i=1}^N \ln P = -2 \sum_{i=1}^N (n_i \ln \lambda_i - \lambda_i) = 2 \left(\Lambda - \sum_{i=1}^N n_i \ln \lambda_i \right) \quad (1.20)$$

Отметим, что выражение (1.20) можно записать для произвольно малых интервалов по энергии (светимости), т.е. для насколько малых, что в рассматриваемых интервалах будет либо одно событие либо 0 событий. В таком случае можно перейти к несгруппированным данным и суммирование вести по индивидуальным фотонам (объектам):

$$\mathfrak{L} = 2 \left(\Lambda - \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i \right) \quad (1.21)$$

Функция правдоподобия, составленная по формуле (1.21) называется статистикой Кэша (Cash, 1979) и является наиболее удобным и правильным способом работать с данными эксперимента с малым количеством событий.

Литература

Arevalo P., Churazov E., Zhuravleva I., Hernandez-Monteagudo C., Revnivtsev M., 2012, arXiv, arXiv:1207.5825

Бендат Дж., Пирсол А. (Bendat J, Piersol, A.). Прикладной анализ случайных данных. М: Мир, 1989 (ISBN 5-03-00107108 рус., ISBN 0-471-04000-2 англ.).

Cash W., 1979, ApJ, 228, 939

Lattimer J. M., Prakash M., 2007, PhR, 442, 109