1 Эпициклическая частота

Уравнение движения небесного тела:

$$\ddot{r} = \frac{l^2}{r^3} - \varphi_g'(r), \tag{1}$$

где $l = \Omega r^2$ - удельный угловой момент, φ_g - гравитационный потенциал. Здесь и далее точкой обозначается дифференцирование по времени, а штрихом - по координате. На невозмущенной орбите выполнено

$$\Omega^2(r_0) r_0 = \varphi_g'|_{r=r_0}, \tag{2}$$

Продифференцировав, можно получить еще одно полезное соотношение

$$(\Omega^2 + 2\Omega\Omega' r)|_{r=r_0} = \varphi_g''|_{r=r_0}. \tag{3}$$

Чтобы найти частоту колебаний, линеаризуем уравнение движения вблизи невозмущенной орбиты:

$$\ddot{R} = -3\frac{l^2}{r_0^4} R - \varphi_g''(r)|_{r=r_0} R, \tag{4}$$

где $R = r - r_0$. С учетом предыдущего уравнения получаем уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{R} = -(4\Omega^2 + 2\Omega\Omega' r)|_{r=r_0} R, \tag{5}$$

откуда искомая частота

$$\omega = 2\Omega \left(1 + \left(\frac{\Omega' r}{2\Omega}\right)\right)^{1/2}, \tag{6}$$

где все величины вычилены в точке r_0.

2 Потенциал Пачинского-Виита

Зависимость $r(t)$ для частицы, движущейся в заданном потенциале, легко определить из выражения для полной энергии частицы:

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r - r_g}, \tag{7}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{m}\left(E - U(r)\right)^{1/2}, \tag{8}$$

где

$$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r - r_g}. \tag{9}$$

Условием $E > U(r)$ определяются допустимые области движения. На рисунке (1) изображены кривые U(r) для различных значений момента частицы L. Радиусы круговых орбит и соответствующие им значения E и L определяются экстремумами функции U(r), причем минимумы отвечают устойчивым, а максимумы - неустойчивым орбитам. Последняя устойчивая орбита соответствует условию

$$U(r) = E,$$
$$U'(r) = 0,$$
$$U''(r) = 0.$$

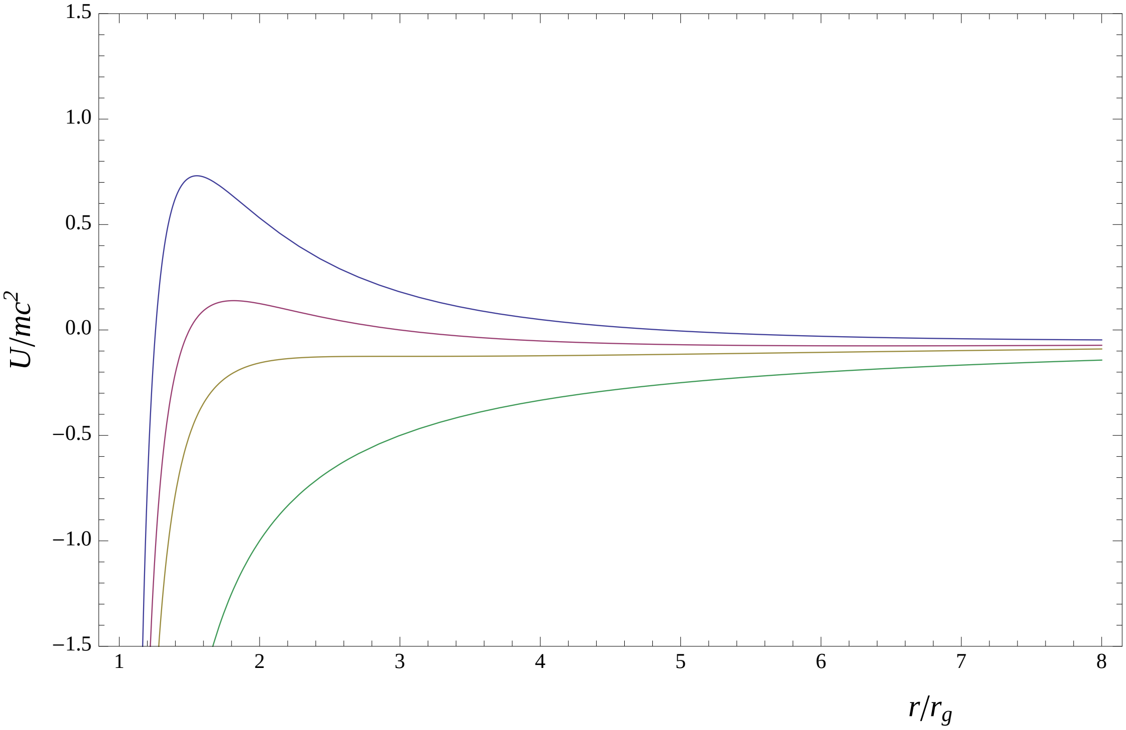

Рис. 1: Функция U(r) для разных значений углового момента L = 3.5, 3, $(3/2)\sqrt{3}$, 0 mcr_g.

Совместное решение этих уравнений дает параметры последней устойчивой орбиты:

$$r_0 = 3r_g, L_0 = \frac{3}{2}\sqrt{3}mcr_g \tag{10}$$

На рисунке (2) показано численное решение системы уравнений

$$U(r) = E,$$
$$U'(r) = 0,$$

в зависимости от значения углового момента частицы. Верхняя ветвь соответствует устойчивым орбитам, нижняя - неустойчивым. Минимальный радиус неустойчивой орбиты равен r_g и достигается в пределе бесконечного значения L.

3 "Сверхсветовое"движение

Подробную информацию можно найти по ссылке http://nature.web.ru/db/msg.html?mid=1161649 &uri=node2.html#superlightjet.

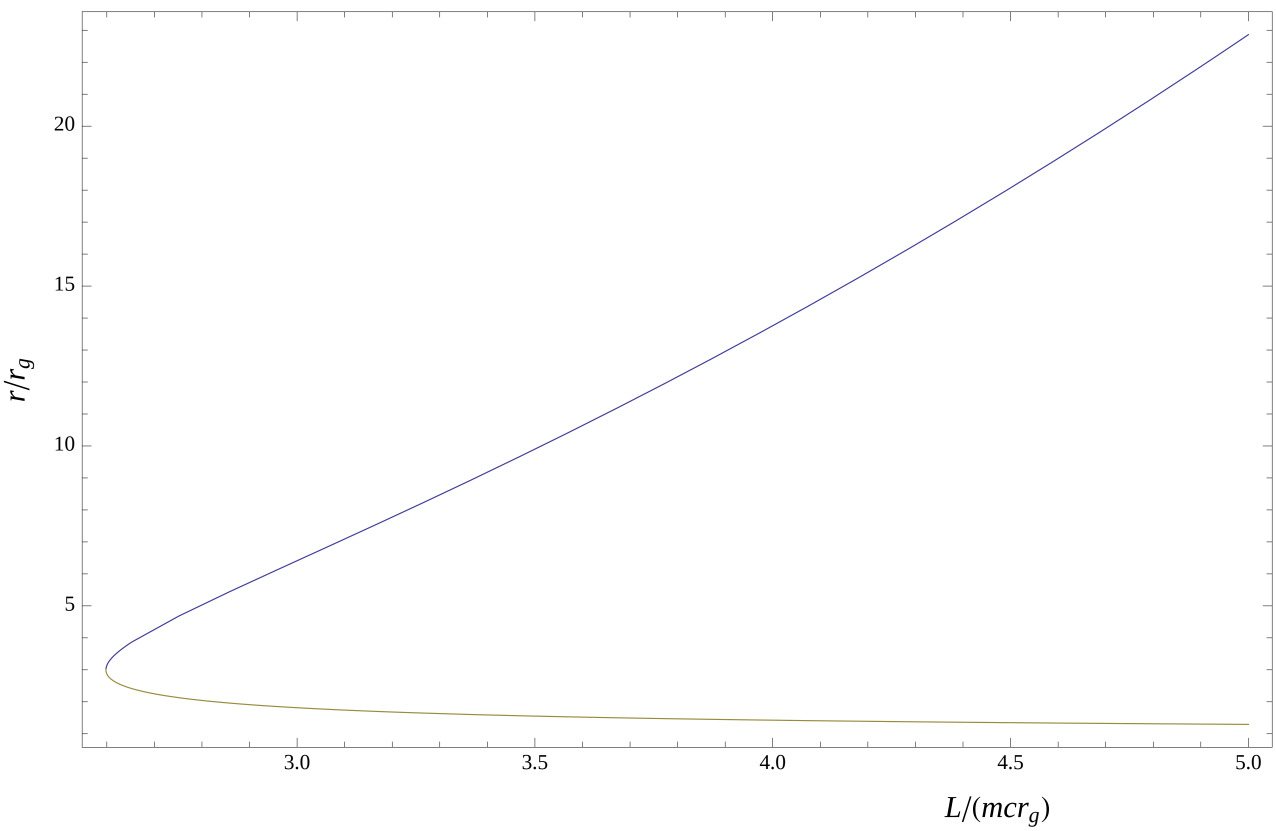

Рис. 2: Зависимость радиуса круговой орбиты от углового момента, верхняя ветвь соответствует устойчивым орбитам