Равновесные конфигурации плазмы z и θ пинчи

date

1 Простейшие уравнения МГД

В работе подробно выводятся уравнения, описывающие состояние плазмы во внешнем магнитном поле. А также качественно рассматриваются случаи равновесных конфигураций.

Для того, чтобы получить замкнутую систему уравнений, описывающую поведение такого рода объектов, запишем уравнения Максвелла для электромагнитного поля в среде движущейся со скоростью $\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
&\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \frac{4\pi\lambda}{c}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]\right) \\
&\nabla \,.\, \mathbf{B} = 0
\end{aligned}$$

где λ - проводимость вещества (в нашем случае плазмы).

Выразив $\mathbf{E}$ из второго уравнения, подставим в первое:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = -\frac{c^2}{4\pi}\nabla \times \left(\frac{\mathrm{rot}\mathbf{B}}{\lambda}\right)$$

Из уравнения $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathrm{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \frac{c^2}{4\pi\lambda}\nabla^2\mathbf{B}$$

Для плазмы имеем $\lambda \to \infty$, т.к. она является сверхпроводимой. С учетом этого имеем два первых уравнения:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \end{cases} \tag{1}$$

Также из соображений гидродинамики учтем уравнение непрерывности и уравнение движение (Эйлера):

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \\ \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla P + \frac{1}{c}\left[\mathbf{jB}\right] \end{cases} \tag{2}$$

С учетом уравнения состояния $P = P(\rho, T)$, уравнения (1) и (2) образуют замкнутую систему, с помощью которой можно определить состояние плазменного объекта. Стоит также заметить, что написанное выше уравнение Эйлера применимо только при условии малости электрического поля $E \approx \frac{v}{c}B$, т.е. при нерелятивистской скорости движения среды. В противном случае необходимо было бы учесть силу электрического поля $\rho_e E$, где ρ_e - плотность заряда. В этом случае для замыкания системы уравнений необходимо рассмотреть также первое уравнение Максвелла $\mathrm{div}E = 4\pi\rho_e$.

2 Равновесные конфигурации

Рассмотрим идеально проводящую жидкость в постоянном магнитном поле. Для равновесия имеем из (2) и (1):

$$\nabla P = \frac{1}{c}\left[\mathbf{jB}\right]$$
$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\mathbf{B}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$

Умножив скалярно первое из этих уравнений на $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$ получим:

$$(\mathbf{B}\nabla)P = 0, \qquad (\mathbf{j}\nabla)P = 0$$

Смысл этих выражений состоит в том, что получаются равными нулю производные давления вдоль магнитных силовых линий и вдоль линий тока. Т.е. получается, что магнитные силовые линии и линии тока лежат на поверхностях:

$$P(x, y, z) = const$$

они называются магнитными поверхностями. Каждая магнитная поверхность может быть границей равновесной конфигурации т.к. на каждой из них P можно принять равное нулю.

Следующее условие можно получить из написанных выше уравнений, проинтегрировав по некоторому объему.

$$\int\left(3P + \frac{B^2}{2\pi}\right)dV = \oint\left\{\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right)\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{Br})\,\mathbf{B}}{4\pi}\right\}d\mathbf{f} \tag{3}$$

Это условие на равновесное состояние было получено в совместной работе Чандрасекара и Ферми в 1953 году. Это уравнение позволяет сделать очень важное замечание о равновесной конфигурации. Пусть плазма занимает некий конечный объем, за пределами которого давление $P = 0$. А также пусть за пределами этого объема нет никаких источников поля (проводников с током). Тогда вдали от плазмы поле должно убывать как $\frac{1}{r^3}$, а следовательно правая часть (3) обращается в 0 при интегрировании по бесконечно большой поверхности. Но интеграл от заведомо положительной величины $3P + B^2/8\pi$ не может обращаться в нуль. Следовательно не может существовать ограниченной в пространстве равновесной конфигурации, не поддерживаемой магнитным полем от внешних источников. Очевидно, что при наличии внешних источников правая часть сведется к интегралу по их поверхности и условие может быть удовлетворено.

2.1 Частные случаи Z и θ пинчей

Рассмотрим одну из самых простых моделей - модель плазменного пинча. Рассматривается бесконечный плазменный цилиндр, все параметры в нем зависят лишь от координаты r (в цилинтрических координатах r, φ, z, где z направлена вдоль оси цилиндра). Из уравнений $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ и $\mathrm{div}\mathbf{j} = 0$ следует, что B_r и j_r равны нулю (иначе они обращались бы в бесконечность при $r \to \infty$).

Из уравнений Максвелла получаем в цилиндрических координатах:

$$j_\varphi = -\frac{c}{4\pi}\frac{dB_z}{dr}, \qquad j_z = \frac{c}{4\pi r}\frac{d}{dr}(rB_\varphi)$$

Проинтегрировав второе выражение найдем:

$$B_\varphi = \frac{2J(r)}{cr}, \qquad J(r) = \int\limits_0^r j_z \cdot 2\pi r dr$$

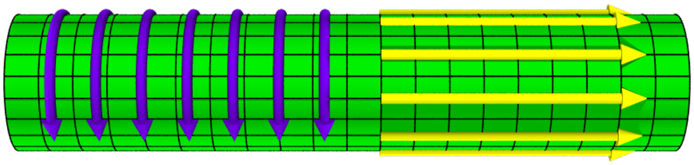
Для производной давления найдем:

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{1}{2\pi c^2 r^2}\frac{dJ^2(r)}{dr} + \frac{1}{8\pi}\frac{dB_z^2}{dr}$$

Далее рассмотрим два отдельных случая. В первом будем предполагать $B_z = 0$, $j_\varphi = 0$ (случай z-пинча). Проинтегрировав выражение для градиента давления, получим равновесие в виде:

$$\int\limits_0^a P(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{J_a^2}{2c^2}$$

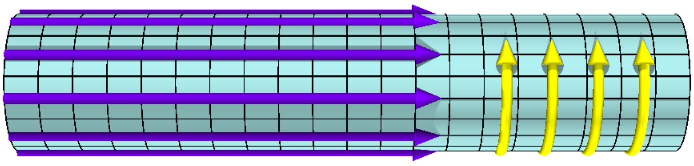
где $J(a)$ - полный ток вдоль шнура. Удержание равновесной конфигурации плазмы осуществляется полем продольного тока.



Во втором случае рассмотрим т.н. θ-пинч, когда $B_\varphi = 0$, $j_z = 0$. Тогда получим:

$$P + \frac{B_z^2}{8\pi} = \frac{B_o^2}{8\pi}$$

где B_o - продольное магнитное поле вне шнура. Удержание плазмы осуществляется здесь внешним продольным полем.



Особый интерес для изучение представляют z-пинч эффекты, которые используется при удержании плазмы в ТоКамАках и является одной из основных причин стабильности космических струйных выбросов или т.н. галактических джетов, где как раз наблюдается противоположный (неклассический) случай, а именно, ультрарелятивистское движение частиц среды.

Список литературы

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред.* — М.:Наука., 1982.

[2] Дж. Джексон, *Классическая электродинамика.* — М.: Мир, 1965.