Аккреция Бонди

Запишем уравнения идеальной стационарной ($\partial/\partial t = 0$) гидродинамики в плоском пространстве [1]:

- уравнение непрерывности
$$\nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0, \tag{1}$$

- уравнение Эйлера
$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{m_{\mathrm{p}} n} - \nabla \varphi_{\mathrm{g}}, \tag{2}$$

- условие идеальности
$$\mathbf{v} \cdot \nabla s = 0, \tag{3}$$

- уравнение состояния
$$P = P(n, s). \tag{4}$$

Последнее соотношение может быть переписано в виде

$$\mathrm{d}P = m_{\mathrm{p}} n \mathrm{d}w - nT\mathrm{d}s. \tag{5}$$

Здесь n (см$^{-3}$) есть концентрация, s — энтропия на одну частицу (безразмерна), w (см^2/с^2) — удельная энтальпия, m_{p} (г) — масса частиц ($\rho = m_{\mathrm{p}} n$ — плотность), T (эрг) — температура в энергетических единицах, и, наконец, c_s (см/с) — скорость звука. Для политропного уравнения состояния

$$P = k(s) n^{\Gamma}, \tag{6}$$

которым мы для простоты будем пользоваться в дальнейшем, имеем для $\Gamma = \mathrm{const} \neq 1$

$$c_s^2 = \frac{1}{m_{\mathrm{p}}} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_s = \frac{1}{m_{\mathrm{p}}} \Gamma k(s) n^{\Gamma - 1}, \tag{7}$$

$$w = \frac{c_s^2}{\Gamma - 1}, \tag{8}$$

$$T = \frac{m_{\mathrm{p}}}{\Gamma} c_s^2. \tag{9}$$

Воспользовавшись термодинамическим тождеством (5) и явными выражениями (6)–(9), можно показать, что для $\Gamma = \mathrm{const} \neq 1$ функция $k(s)$ должна иметь вполне определенный вид

$$k(s) = k_0 e^{(\Gamma-1)s}. \tag{10}$$

Уравнение Эйлера (2) вместе с соотношениями (1), (3) и (5) может быть переписано в виде сохранения потока энергии

$$\nabla \cdot \left[n\mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w + \varphi_{\mathrm{g}} \right) \right] = 0. \tag{11}$$

Используя теперь уравнение непрерывности (1), получаем

$$\mathbf{v} \cdot \nabla E = 0, \tag{12}$$

где

$$E = \frac{v^2}{2} + w + \varphi_{\mathrm{g}}. \tag{13}$$

Это хорошо известный интеграл Бернулли, который, как мы видим, должен сохраняться на линиях тока.

В качестве простейшего, но очень важного примера рассмотрим сферически симметричное течение. Поскольку, как мы видели, уравнения идеальной гидродинамики могут быть записаны в виде законов сохранения, имеем для чисто радиального течения

- уравнение непрерывности

$$\Phi = 4\pi r^2 n(r) v(r) = \mathrm{const}, \tag{14}$$

- условие идеальности

$$s = \mathrm{const}, \tag{15}$$

- уравнение энергии

$$E = \frac{v^2(r)}{2} + w(r) + \varphi_{\mathrm{g}}(r) = \mathrm{const}. \tag{16}$$

В результате, зная три параметра Φ, s и E, можно определить все физические характеристики течения. Действительно, переписав уравнение Бернулли (16) как

$$E = \frac{\Phi^2}{32\pi^2 n^2 r^4} + w(n, s) + \varphi_{\rm g}(r), \tag{17}$$

мы видим, что это уравнение содержит лишь одну неизвестную величину — концентрацию n. Следовательно, это алгебраическое уравнение в неявной форме определяет концентрацию n как функцию трех инвариантов и радиуса r:

$$n = n(E, s, \Phi; r). \tag{18}$$

Вместе с энтропией s это соотношение дает возможность определить и все остальные термодинамические функции, а благодаря соотношению (14) — и скорость течения v.

Необходимо подчеркнуть, что уравнение (17) имеет особенность на звуковой поверхности. Чтобы показать это, определим производную ${\rm d}n/{\rm d}r$. Дифференцируя уравнение (17) по r, имеем для гравитационного потенциала $\varphi_{\rm g} = -GM/r$

$$\frac{{\rm d}n}{{\rm d}r}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_s - \frac{\Phi^2}{16\pi^2 n^3 r^4}\right] - \frac{\Phi^2}{8\pi^2 n^2 r^5} + \frac{GM}{r^2} = 0. \tag{19}$$

В результате, воспользовавшись термодинамическим соотношением (5), получаем для логарифмической производной η_1

$$\eta_1 = \frac{r}{n}\frac{{\rm d}n}{{\rm d}r} = \frac{2v^2 - \dfrac{GM}{r}}{c_s^2 - v^2} = \frac{2 - \dfrac{GM}{rv^2}}{-1 + \dfrac{c_s^2}{v^2}} = \frac{N}{D}. \tag{20}$$

Мы видим, что производная (20) имеет особенность, когда скорость вещества равна скорости звука: $v = c_{\rm s} = c_*$ ($D = 0$). Это означает, что для гладкого прохождения звуковой поверхности $r = r_*$ должно быть выполнено дополнительное условие:

$$N(r_*) = 2 - \frac{GM}{r_* c_*^2} = 0. \tag{21}$$

Иными словами, трансзвуковые течения являются двухпараметрическими. Как показано на Рис. 1, звуковая поверхность является X-точкой на плоскости расстояние r — скорость v.

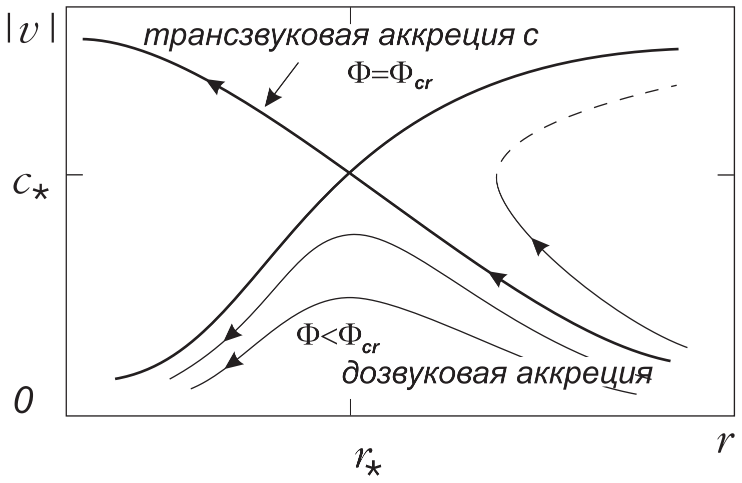

Рис. 1: Структура сферически симметричной аккреции для данных значений n_∞ и c_∞ и различных значений Φ. Трансзвуковое течение соответствует критической скорости аккреции $\Phi = \Phi_{\rm cr}$ (34). Кривые ниже X-точки соответствуют дозвуковой аккреции с $\Phi < \Phi_{\rm cr}$

упражнения

1. Для случая сферически симметричной трансзвуковой аккреции (т.н. аккреция Бонди), когда аккрецирующее вещество имеет нулевую скорость при $r \to \infty$, интеграл Бернулли E может быть выражен через скорость звука на бесконечности

$$E = w_\infty = \frac{c_\infty^2}{\Gamma - 1}.$$

Используя теперь соотношения (14)–(16) и (21), получите известные выражения для скорости звука c_* и концентрации n_* на звуковом радиусе r_* [2]:

$$c_*^2 = \left(\frac{2}{5-3\Gamma}\right) c_\infty^2, \tag{22}$$

$$n_* = \left(\frac{2}{5-3\Gamma}\right)^{1/(\Gamma-1)} n_\infty, \tag{23}$$

$$r_* = \left(\frac{5-3\Gamma}{4}\right) \frac{GM}{c_\infty^2}. \tag{24}$$

2. Покажите, что

$$\eta_1(r_*) = \frac{-4 \pm \sqrt{10-6\Gamma}}{\Gamma+1}, \tag{25}$$

где знак плюс соответствует аккреции, а знак минус — эжекции.

3. Покажите, что для сферически симметричной аккреции

   - для $r \gg r_*$ (дозвуковой режим) течение можно считать несжимаемым:

$$n(r) \approx const, \tag{26}$$
$$v(r) \propto r^{-2}. \tag{27}$$

   - для $r \ll r_*$ (сверхзвуковое течение) движение частиц близко к свободному падению:

$$n(r) \propto r^{-3/2}, \tag{28}$$
$$v(r) \approx \left(\frac{2GM}{r}\right)^{1/2}. \tag{29}$$

4. Покажите, что для сферически симметричного трансзвукового истечения (истечение Паркера):

   - физические параметры на звуковой поверхности $r = r_*$, где вновь

$$r_* = \frac{GM}{2c_*^2}, \tag{30}$$

   связаны с соответствующими значениями на поверхности звезды $r = R$ как

$$c_*^2 = \left(\frac{2}{5-3\Gamma}\right)c_R^2 + \left(\frac{\Gamma-1}{5-3\Gamma}\right)\left(v_R^2 - \frac{2GM}{R}\right), \tag{31}$$
$$n_* = n_R\left(\frac{c_*^2}{c_R^2}\right)^{1/(\Gamma-1)}. \tag{32}$$

   - радиальная скорость на поверхности звезды должна быть

$$v_R = c_*\left(\frac{c_*^2}{c_R^2}\right)^{1/(\Gamma-1)}\left(\frac{r_*}{R}\right)^2. \tag{33}$$

Будучи чрезвычайно упрощенной моделью, радиальное одномерное течение позволяет тем не менее сформулировать несколько важных свойств, причем многие из них останутся справедливыми и для более общего случая произвольного течения.

- Звуковая поверхность может быть пройдена лишь в гравитационном поле. Действительно, числитель N в (20) может быть равен нулю только в присутствии гравитационного слагаемого GM/rv^2.

- Решения (22)–(24) и (31) имеют особенность при $\Gamma = 5/3$. Это означает, что при $\Gamma = 5/3$ увеличение/уменьшение скорости звука за счет адиабатического нагрева/охлаждения в точности совпадает с изменением скорости движения вещества. В результате, в нерелятивистском случае для $\Gamma \geq 5/3$ трансзвуковое течение не может быть реализовано.

- Трансзвуковая задача является двухпараметрической. Это означает, что для полного определения трансзвукового течения нужно задать два граничных условия, например, плотность $\rho_\infty = m_{\rm p} n_\infty$ и скорость звука c_∞ на бесконечности. Тогда все остальные параметры могут быть выражены через эти величины. Например, имеем для полного темпа аккреции $\Phi_{\rm tot} = \Phi_{\rm cr}$, где
$$\Phi_{\rm cr} = 4\pi r_*^2 c_* n_* = 4\pi \left(\frac{2}{5-3\Gamma}\right)^{(5-3\Gamma)/2(\Gamma+1)} \frac{(GM)^2}{c_\infty^3} n_\infty. \qquad (34)$$
С другой стороны, для данных значений n_∞ и c_∞ имеется бесконечное число дозвуковых течений с $\Phi < \Phi_{\rm cr}$ (см. Рис. 1).

- Для заданной структуры течения числа интегралов движения достаточно, чтобы все параметры течения могли быть определены из алгебраических соотношений.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.:Наука, 1986.

[2] *Липунов В.М.* Астрофизика нейтронных звезд. М.:Наука, 1987.